

M. MAURIN

E. TOUBOUL

## **Codage optimal et sur-optimal sur un tableau invariant**

*Mathématiques et sciences humaines*, tome 85 (1984), p. 19-55

[http://www.numdam.org/item?id=MSH\\_1984\\_\\_85\\_\\_19\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSH_1984__85__19_0)

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## CODAGE OPTIMAL ET SUR-OPTIMAL SUR UN TABLEAU INVARIANT

M. MAURIN<sup>\*</sup>, E. TOUBOUL<sup>\*\*</sup>INTRODUCTION

On soumet un ensemble de  $n$  individus à différents stimuli physiques  $S_i$  ( $i=1, \dots, I$ ), stimuli définis par une unité physique connue (on les suppose ordonnés en fonction de leur rang  $i$ ). Ces individus "répondent" aux stimuli en choisissant un niveau de réponse  $R_j$ , ( $j=1, \dots, J$ ) dans une échelle de niveaux ordonnés, échelle posée selon une procédure de saisie définie. Soit  $n_{ij}$  le nombre de sujets exposés à  $S_i$  qui ont répondu  $R_j$  (tableau de contingence du type stimulus-réponse).

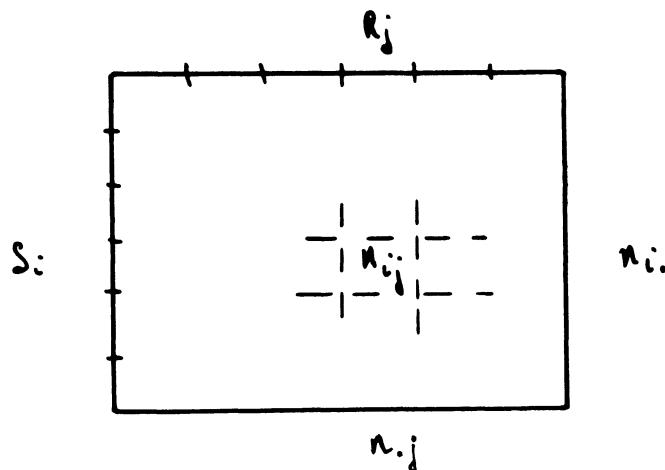


Tableau 1 : tableau de contingence et ses marges

\* Institut de Recherche des Transports, Centre d'Evaluation et de Recherches des Nuisances et de l'Energie, 109 Avenue Allende, 69672 BRON Cedex.

\*\* Etudiant Analyse Numérique, Université de Saint-Etienne, 23 Rue du Docteur Michelon, 42023 SAINT-ETIENNE.

Les techniques du codage optimal ont pour objet le "passage de l'ordinal au cardinal" à l'aide d'une application  $\chi$  telle que les  $\chi(R_j) = \chi_j$  sont supposées prendre leurs valeurs sur une échelle d'intervalle (continuum subjectif collectif sous-jacent), valeurs sur lesquelles on peut ensuite légitimement calculer les statistiques habituelles (moyenne, écart-type).

Dans le chapitre 2, on rappelle la technique habituelle du codage optimal (optimal scaling) pour expliciter les  $\chi_j$ , technique fondée sur une hypothèse d'optimum (réf. 2,5,11). Il faut noter à ce niveau l'existence de rapprochements avec d'autres techniques comme l'Analyse factorielle des correspondances, les moyennes réciproques, la corrélation maximale (réf. 13,17), l'analyse canonique (réf. 13,14,17).

Dans un ordre d'idée différent et voisin, la méthode de codage par intervalles successifs suppose que les réponses à divers stimuli ne sont pas concentrées sur des niveaux discrets  $R_j$ , mais réparties au sein d'intervalles dont on cherche à coder les bornes (réf. 1,5,10,15,18). A la lueur des concepts introduits dans cet autre cadre, on s'aperçoit que le tableau des  $\chi_j$  du codage optimal est la combinaison de deux natures d'informations ; l'une que l'on qualifie d'invariante ne dépend que du schéma de stimulus-réponse envisagé, tandis que l'autre ne reflète que des conjonctures liées à chaque expérience (composante dite locale). Les  $\chi_j$  solutions subissent l'influence de cette conjoncture et ne sont guère de fait compatibles avec la recherche d'un codage des échelons  $R_j$  ne dépendant que du processus. Ci-après nous présentons deux méthodes pour se débarrasser de cette influence quand on le désire. La première est une simple adaptation du codage optimal (chapitre 3) ; la seconde est la poursuite de l'idée du codage optimal, avec la recherche du "meilleur" codage optimal sur l'ensemble décrit par la composante locale. C'est cette solution que l'on appelle le codage sur-optimal, la question mathématique ainsi soulevée est traitée au chapitre 4. La discussion de cette solution et des exemples sont présentés au chapitre 5, les annexes précisent certains compléments.

#### 1 - Notations

On note  $F$  le tableau matriciel  $(I, J)$  des fréquences  $F_{ij} = n_{ij}/n$ ,  
 $\omega_I$  et  $\omega_J$  les vecteurs respectifs de  $R^I$  et  $R^J$  avec les coordonnées égales à 1, l'apostrophe désigne la transposition matricielle ; avec des matrices à deux dimensions l'indice de ligne est  $i$ , l'indice de

colonne  $j$ . On suppose que le tableau  $F$  ne contient aucune ligne ni colonne de zéros, et qu'il n'y a aucun couple de lignes proportionnelles. Pour le codage optimal on définit :

i) les distributions marginales :

$$F_J = F' \omega_I \quad , \quad ( F_{.j} = \sum_i F_{ij} )$$

$$F_I = F \omega_J \quad , \quad ( F_{i.} = \sum_j F_{ij} )$$

sachant que

$$F_{i.} \neq 0 \quad \forall i \quad , \quad F_{.j} \neq 0 \quad \forall j \quad ;$$

ii) les matrices diagonales  $D_I$  et  $D_J$  d'éléments respectifs  $F_{i.}$  et  $F_{.j}$ . Elles vérifient les relations :

$$D_J \omega_J = F' \omega_I \quad ,$$

$$D_I \omega_I = F \omega_J \quad ;$$

iii) les tableaux des distributions conditionnelles :

$$F_{J/I} = D_I^{-1} F \quad \text{d'élément} \quad F_{ij} / F_{i.} \quad ,$$

$$F_{I/J} = F D_J^{-1} \quad \text{d'élément} \quad F_{ij} / F_{.j} \quad ,$$

$u_i$ : les vecteurs lignes de  $D_I^{-1} F$  qui appartiennent au simplexe unité de  $\mathbb{R}^J$ ,

d'où les relations :  $\omega_J = D_J^{-1} F_J = D_J^{-1} F' \omega_I \quad )$

$$\omega_I = D_I^{-1} F_I = D_I^{-1} F \omega_J \quad ,$$

$$F_J = \sum_i F_{i.} u_i \quad .$$

## 2 - Le codage optimal

2.1. Les niveaux de réponse  $R_j$  étant situés sur une échelle ordinale, les techniques du codage optimal usuel ont pour objet d'affecter à chaque  $R_j$  une valeur  $X_j$  sur une échelle d'intervalle (réf. 2,5,11).

i) si l'on suppose l'existence des  $X_j$  on peut calculer les quantités suivantes :

$$\text{valeur moyenne des réponses} \quad E_T(X) = \sum_j F_{.j} X_j \quad ,$$

$$\text{valeurs moyennes par stimulus} \quad \bar{X}_i = \sum_j F_{ij} X_j / F_{i.} \quad ,$$

$$\text{variance des réponses} \quad \sigma^2 = \sum_j F_{.j} (X_j - E_T(X))^2 = \sum_j F_{.j} X_j^2 - E_T(X)^2 \quad ,$$

$$\text{variances par stimulus} \quad \sigma_i^2 = \sum_j F_{ij} (X_j - \bar{X}_i)^2 / F_{i.} \quad .$$

ii) on a les identités statistiques suivantes :

$$\begin{aligned} E_T(X) &= \sum_j \sum_i F_{ij} X_j \\ &= \sum_i F_{i.} \sum_j F_{ij} X_j / F_{i.} \\ &= \sum_i F_{i.} \bar{X}_i = E_I(\bar{X}) \quad . \end{aligned}$$

donc la moyenne des niveaux de réponse sur la population totale est aussi la  $i$ -moyenne des niveaux moyens par stimulus ( $i$ -moyenne avec la distribution  $F_I$  ).

$$\begin{aligned} \text{Et aussi :} \quad \sigma^2 &= \sum_i \sum_j F_{ij} [X_j - \bar{X}_i + \bar{X}_i - E_T(X)]^2 \\ &= \sum_i F_{i.} \left[ \sum_j \frac{F_{ij}}{F_{i.}} (X_j - \bar{X}_i)^2 + (\bar{X}_i - E_T(X))^2 \right] \\ &= \sum_i F_{i.} \sigma_i^2 + \sum_i F_{i.} (\bar{X}_i - E_I(\bar{X}))^2 \quad , \end{aligned}$$

donc la variance totale est la  $i$ -variance des niveaux moyens par stimulus augmentée de la  $i$ -moyenne des variances par stimulus. La quantité  $\sum F_i \sigma_i^2$  est la variance intra-stimuli  $\sigma_{i_n}^2$  et  $\sum F_i \bar{X}_i^2 - E_I(\bar{X})^2$  la variance entre les différents stimuli  $\sigma_e^2$ .

2.2. Ces calculs formels sont insuffisants pour déterminer les  $X_j$ . Il faut leur adjoindre des conditions supplémentaires ; on utilise ici la condition qui consiste à dire que l'échelle d'intervalle cherchée est celle qui maximise la part de la variance entre stimuli dans la variance totale (ou le rapport de corrélation  $\rho = \sigma_e / \sigma$ , réf. 2,5,11,18).

2.2.1. La solution de ce problème d'optimum nécessite une discussion plus détaillée qu'il n'est coutume de le faire.

On met les variances précédentes sous les formes matricielles ci-contre:

$$\sigma^2(X) = X' (D_J - F_J F_J') X$$

$$\sigma_e^2(X) = X' (F' D_I^{-1} F - F_J F_J') X$$

$$\sigma_{i_n}^2(X) = \sigma^2 - \sigma_e^2 = F_I' \sigma_I^2$$

où  $\sigma_I^2$  est le vecteur des  $\sigma_i^2$ .

Ces trois variances sont invariantes pour toute translation  $X + \gamma \omega_J$ , (vérification immédiate). Par conséquent en suivant Guttman (réf.2,11) on peut se limiter à la recherche des solutions  $X$  centrées, c'est-à-dire qui vérifient la relation linéaire  $F_J' X = 0$ . De la sorte quand  $\tilde{X}$  est solution centrée, tout  $\tilde{X} + \gamma \omega_J$  est solution générale. (\*)

Le vecteur  $\omega_J$  annule la variance  $\sigma^2$  (vérification immédiate) donc aussi  $\sigma_e^2$  et  $\sigma_{i_n}^2$ . On démontre que lorsque aucun des  $F_{.j}$  n'est nul, c'est le seul vecteur différent de zéro qui annule  $\sigma^2(X)$  (cf 4.2).

(\*)  $\tilde{X}$  étant centré par rapport à  $F_J$ , on considère que tout  $\eta \tilde{X}$ ,  $\eta \neq 0$  constitue la même solution.



Le Lagrangien  $\mathcal{L} = X' F' D_I^{-1} F X - \lambda (X' D_J X - \sigma_0^2) - \mu F_J' X$

donne le système des conditions nécessaires pour l'optimum (CNO) :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} = 2 F' D_I^{-1} F X - 2 \lambda D_J X - \mu F_J' = 0$$

i) On prémultiplie par  $\omega_J'$

$$2 (\omega_J' F' D_I^{-1} F - \lambda \omega_J' D_J) X - \mu = 0$$

$$2 (1 - \lambda) F_J' X - \mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = 0 \quad ;$$

ii) On prémultiplie par  $X'$ , en vertu des relations d'Euler on a

$$\sigma_e^2 = \lambda \sigma_0^2 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad ;$$

donc le multiplicateur  $\lambda$  est (à l'optimum) égal au carré du rapport de corrélation.

Dans le système CNO les inconnues  $\lambda$  et  $X$  sont les éléments propres (valeurs et vecteurs) de la matrice  $D_J^{-1} F' D_I^{-1} F$  puisque l'optimum vérifie après simplification :

$$F' D_I^{-1} F X = \lambda D_J X \quad .$$

Réciproquement, tout vecteur propre de  $D_J^{-1} F' D_I^{-1} F$  (solution du système CNO) vérifie la relation  $(1 - \lambda) F_J' X = 0$ , pour qu'il soit solution du problème de maximum étudié il suffit qu'il vérifie  $F_J' X = 0$ . Par ailleurs, à l'optimum la fonction  $\sigma_e^2$  est égale à  $\lambda \sigma_0^2$  ; le maximum correspond donc à la plus grande valeur propre  $\lambda$  pour laquelle il existe un (des) vecteur(s) propre(s)  $X$  centré(s) par rapport à  $F_J$  .

- i) On observe que  $\lambda = 1$ ,  $X = \omega_T$  est solution évidente. Elle est cependant inacceptable ici puisque  $F'_T \omega_T = 1 \neq 0$  et que  $\omega_T$  annule  $\sigma^2$  et  $\sigma_e^2$ .
- ii) Si la valeur propre  $\lambda = 1$  est unique, la valeur propre  $\tilde{\lambda}$  immédiatement inférieure est solution acceptable, ses vecteurs propres étant centrés, ( $F'_T X = 0$ ).
- iii) Si la valeur propre  $\lambda = 1$  est valeur propre multiple, les autres vecteurs propres que  $\omega_T$  sont des solutions acceptables à condition qu'ils vérifient  $\sum_{i,j} \alpha_{ij} (F_{ij}) = 0$ , ce qui est toujours possible pour  $H \geq 2$  (cf 2.2.2).

On note  $\tilde{\lambda}$  la solution du problème et  $\tilde{X}$  le vecteur du codage optimal.

2.3.2. On a les points complémentaires suivants:

- i) La solution optimale décentrée telle que  $\tilde{X}_1 = 1$ ,  $\tilde{X}_T = T$  est plus "parlante" que la solution optimale centrée.
- ii) Le système classique du codage optimal possède une solution dès que  $T \geq 2$ ,

En revanche on n'a pas l'unicité de la solution centrée. Cette absence d'unicité peut se présenter :

- soit quand la solution  $\tilde{\lambda} < 1$  est valeur propre multiple d'ordre  $\geq 2$  ;
- soit quand la valeur propre 1 est multiple avec un ordre  $\geq 3$ .

De telles éventualités (qui dépendent du tableau recueilli F) sont assez rares, cependant la discussion est incomplète quand on ne signale pas cette possibilité.

- iii) La recherche des éléments propres d'une matrice se fait aujourd'hui avec des moyens informatiques. Sur le plan algorithmique il est plus simple de rechercher les éléments propres des matrices symétriques. Les solutions  $\tilde{\lambda}$ ,  $\tilde{X}$  cherchées sont aussi les solutions de

$$D_J^{-1/2} F' D_I^{-1} F D_J^{-1/2} D_J^{+1/2} X = \lambda D_J^{+1/2} X$$

où  $S_1 = D_J^{-1/2} F' D_I^{-1} F D_J^{-1/2}$  est symétrique.

iv) Comme cela a été remarqué (réf. 2),  $S_1$  et  $D_J^{-1} F' D_I^{-1} F$  sont les matrices que l'on manipule habituellement en analyse factorielle des correspondances, A.F.C, (réf. 7).  $\tilde{X}$  n'est autre que le premier facteur  $\psi_1$ , c'est-à-dire que les  $\tilde{X}_j$  sont les coordonnées des  $J$  points-réponses dans  $R^E$  sur le premier axe factoriel  $u_1$  multipliées par  $\sqrt{\tilde{\lambda}}$ .

Le vecteur des moyennes par stimuli  $\tilde{\bar{X}} = D_I^{-1} F \tilde{X}$  établit une application numérique entre le continuum  $\{X\}$  des réponses et le continuum physique des stimuli ; il est égal à  $D_I^{-1} F \psi_1 = \sqrt{\tilde{\lambda}} \psi_1$ , c'est le vecteur des coordonnées des points stimuli dans  $R^J$  sur le premier axe factoriel  $u_1$ , (pour les notations  $u_1, v_1, \psi_1, \Psi_1$  voir la réf. 7 chap. II). On sait également que la trace de  $D_J^{-1} F' D_I^{-1} F$ , égale à  $1 + \sum \lambda_k$  est l'inertie du nuage des points  $u_i$  pondérés par  $F_i$  par rapport à son barycentre  $F_J$ , lorsque l'on prend la métrique euclidienne dite du  $\chi^2$  centrée sur  $F_J$  (réf. 7).

Cette rencontre n'a d'ailleurs pas lieu de surprendre une fois que l'on a fait le rapprochement qui s'impose entre le codage optimal, l'A.F.C., les moyennes réciproques et l'analyse canonique (réf. 14, 17).

v) Les algorithmes rappelés ci-dessus conduisent aussi au même résultat que la recherche de la corrélation maximale d'Hirschfeld et de Renyi pour le tableau F (réf. 13, 14; annexe 2).

A l'optimum le rapport de corrélation  $\rho = \sigma_2 / \sigma$  est donc égal au coefficient de corrélation maximal  $\tilde{\rho}$  attaché au tableau F (corrélation de Bravais-Pearson), avec l'interprétation du coefficient de Lagrange:

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\rho}^2 \quad (\text{réf. 3 tome 2}).$$

vi) Les modalités de réponse  $R_j$  vérifient par construction un ordre total donné, en même temps que les stimuli  $S_i$  sont le plus souvent naturellement ordonnés en fonction d'une grandeur physique. Cependant rien ne garantit a priori que l'ordre suivi par les  $\tilde{X}_j$  du scaling optimal soit le même que celui des  $R_j$ , et de même pour  $\tilde{X}_i$  et  $S_i$ .

Cette difficulté ordinale peut-être abordée de différentes façons (réf.11). On a une réponse élégante sous la forme d'une condition suffisante. En effet, si avec des modalités  $R_j$  et  $S_i$  naturellement ordonnées, les différentes distributions conditionnelles de  $F_{I/J}$  et  $F_{J/I}$  vérifient respectivement les relations d'ordre latéral entre distributions, (on dit que les tableaux  $F_{I/J}$  et  $F_{J/I}$  sont latéralement croissants), les premiers facteurs  $\psi_1$  sur les  $R_j$  et  $\varphi_1$  sur les  $S_i$  sont en accord avec les ordres respectifs des modalités (réf.2, 3 tome 1 chap.B8).

vii) Sur un autre plan, on doit remarquer que les calculs précédents sont du ressort des conditions nécessaires. Si un tel continuum d'intervalle existe, ce sont bien les  $X_j$  ci-contre qui réalisent l'optimum de la variance inter-stimuli ; mais on n'a pas démontré l'existence effective de cette solution, ni le bien fondé de la condition d'optimum. Cette question dépasse naturellement les compétences du seul analyste des données. Dans des circonstances analogues on peut signaler que "both Guttman et Mosteller have suggested that this procedure gives scores on an interval scale" (ref. 18 page 344); cf. également la remarque en 5.1.2.

### 3 - Tableau S.R. invariant

Il est bien évident que le codage optimal dépend de la distribution marginale d'exposition aux stimuli  $F_I$ , remarque déjà faite par Torgerson dans des circonstances analogues (réf.18 p.344). Les effectifs qui définissent cette distribution sont souvent le résultat de circonstances conjoncturelles mal maîtrisées (expériences ratées, non réponses dans des enquêtes...) ; à tout le moins cette distribution maîtrisée ou non, peut dans certains cas être préjudiciable à l'acquisition d'un procédé de mesure indépendant d'une application ou d'une expérimentation particulière.

3.1. Ce particulier est représenté par  $F_I$ . Pour connaître avec précision son mode d'intervention il est commode au préalable de décomposer le tableau des fréquences  $F$ , et de faire la part entre deux sources d'information.

La distribution  $F_I$  décrit la répartition des sujets expérimentés en fonction des différents stimuli  $S_i$  employés ; c'est une distribution qui dépend de chaque expérience particulière, et peut varier de l'une à l'autre, nous dirons que c'est une distribution "locale".

A l'opposé, les distributions conditionnelles  $F_{j/i} / F_i$  indiquent la façon dont se répartissent les réponses des sujets pour chacun des stimuli fixé, sur l'ensemble des réponses ordonnées  $R_j$  qui sont offertes par les conditions de l'expérience. On peut raisonnablement supposer que ces distributions conditionnelles sont des "invariants" du processus de stimulus-réponse, qu'elles ne dépendent pas de telle ou telle expérimentation particulière, mais qu'elles décrivent la sensibilité collective d'une population définie de sujets dans leur ensemble, compte tenu du niveau du stimulus et des règles précises de l'expérimentation (échelle  $R_j$ , déroulement de l'expérimentation) qui sont communes à toute expérience<sup>(\*)</sup> (réf.9). Nous dirons que  $F_{J/I}$  est le tableau invariant du processus étudié, compte tenu des  $S_i$  et de l'échelle des  $R_j$ .

Par conséquent, le tableau F des fréquences est la combinaison de deux composantes indépendantes, l'une invariante représentée par le tableau  $F_{J/I}$  et l'autre locale représentée par le vecteur  $F_I$ . Cette composition est entièrement traduite par le produit matriciel :

$$F = D_I F_{J/I} .$$

La notion des distributions invariantes qui composent  $F_{J/I}$ , est celle des "frequency distribution (s) on the psychological continuum of discriminial processes associated with the stimuli" que Thurstone utilise dans la formulation de son modèle des jugements comparatifs (réf.18, chapitre 8 à 10). Ce sont précisément ces distributions que l'on utilise dans les diverses techniques des intervalles successifs (réf. 1,10,15,18).

---

(\*) pour être précis, ces distributions invariantes sont calculées sur chaque ensemble de sujets expérimentés, puis affectées par inférence à la population plus vaste dont on peut considérer que chaque lot de sujets est issu de façon représentative. Il arrive que la répétition des expériences soit faite soit en multipliant les sujets, soit en refaisant plusieurs expériences pour un petit nombre.

Nous supposons que ces distributions de réponse sont connues ; nous n'envisageons pas ici les problèmes d'échantillonnage, de représentativité et d'estimation, comme cela est supposé dans les intervalles successifs.

3.2. On peut donc légitimement désirer éliminer cette influence locale intempes-  
tative. Pour ce faire nous présentons deux manières de procéder. La  
première est la plus simple, il suffit de se donner un  $F_I^*$  fixé à l'avance  
de manière conventionnelle et déclarée. Cette solution est immédiate à mettre  
en oeuvre ; elle conduit à l'algorithme d'optimisation précédent avec le  
tableau de fréquence  $F^* = D_I^* F_{J/I}$ . Le choix d'un  $F_I^*$  particulier  
peut donner matière à discussion ; parmi les candidats possibles on signale  
le local équipondéré  $\omega_I / I$  qui affecte le même poids  $1/I$  à tout  
stimulus  $i$ . C'est de fait la solution qui est implicitement retenue dans le  
contexte des méthodes des intervalles successifs.

Un autre  $F_I^*$  possible est la distribution a priori des sujets face au sti-  
mulus. Cependant cette distribution peut être mal connue, ou mieux ne pas exis-  
ter. Dans le cas des exemples 5.2.1. et 5.2.2. l'IRT-CERNE s'est efforcé d'éta-  
blir la distribution de la population résidente en fonction du bruit de circu-  
lation en façade, (pour les niveaux élevés essentiellement), cette distribu-  
tion n'est connue qu'approximativement ; dans le cas de l'exemple 5.2.4. extrait  
de la référence 18, le stimulus auquel les sujets doivent répondre est une mas-  
se de quelques dizaines de grammes qui est posée dans leur main, il est douteux  
qu'il existe une telle distribution a priori ; de même que pour l'exemple 5.2.3.

La deuxième réponse se situe davantage dans le prolongement logique  
du codage optimal. La solution classique cherche le maximum de  $\sigma_i^2 / \sigma^2 (X)$  ;  
pour supprimer l'influence de  $F_I$  il suffit de chercher le maximum de  
 $\sigma_i^2 / \sigma^2 (X, F_I)$  considéré comme une fonction de deux variables  $X \in R^J$ ,

$F_I \in$  simplexe unité de  $R^I$ . La solution ainsi obtenue ne dépend donc plus  
que de l'invariant  $F_{J/I}$  et peut à ce titre être une solution du codage  
débarassée de toute influence locale. Au chapitre suivant nous étudions le  
problème mathématique ainsi posé, le codage qui en résulte est dit codage  
"sur-optimal".

#### 4 - Le codage sur-optimal

##### 4.1. Préambule

On introduit de nouvelles notations ;  $\bar{e}_i$  et  $e_j$  sont les vecteurs de  
base canonique des espaces vectoriels  $R^I$  et  $R^J$ ,  $f$  est le tableau in-  
variant  $F_{J/I}$  avec les vecteurs lignes  $u^i$  qui appartiennent au  
simplexe unité  $S^J$  de  $R^J$ ,  $I$  est l'ensemble des indices  $i$  variant de  
1 à  $I$  (le contexte permet certainement d'éviter la confusion entre l'ensemble  
 $I$  et la valeur maximale de l'indice  $i$  qui le décrit),  $J$  l'ensemble des indices

$j$  de 1 à  $J$ , (même remarque sur  $J$ ),  $J^i$  le sous-ensemble des  $j$  tels que  $u_{ij} = f_{ij} > 0$  de sorte que tout  $u_i \in \mathbb{R}^{J^i}$  sans aucune coordonnée nulle.

On désigne par  $A^2$  tout vecteur de coordonnées  $a_i^2$  lorsque  $a_i$  sont les coordonnées de  $A$ .

On en déduit les identités suivantes :

$$\omega_I = \sum \bar{e}_i$$

$$\omega_J = \sum e_j$$

$$F_I = \sum F_i \bar{e}_i$$

$$F_J = \sum F_j e_j = \sum F_i u_i$$

$$u_i = f' \bar{e}_i$$

$$\omega_I = f' \omega_J$$

$$\bar{X} = f' X$$

$$F_J = f' F_I$$

$$F = D_I f'$$

$$F' D_I^{-1} F = f' D_I f = \sum_i F_i (u_i u_i')$$

La condition de centrage s'écrit  $F_J' X = F_I' f' X = 0$ ,

les variances  $\sigma^2$  et  $\sigma_e^2$  après centrage prennent les formes suivantes :

$$\sigma^2(X, F_I) = X' D_J X \quad ; \quad \sigma_e^2(X, F_I) = X' f' D_I f' X$$

$$\sigma^2(X, F_J) = F_I' f' X^2 \quad ; \quad \sigma_e^2(X, F_J) = F_I' (f' X)^2 ,$$

les premières montrent la dépendance quadratique en  $X$ , la seconde la dépendance linéaire en  $F_I$ . Le problème posé consiste à chercher le maximum de  $p(X, F_I)$  avec  $X \in \mathbb{R}^J$  et  $F_I \in S^I$ ,  $F_I$  différent de  $\bar{e}_i \forall i = 1, \dots, I$ .

PROPRIETE 1. Dans  $\mathbb{R}^J$  et sa métrique canonique, la variance  $\sigma^2(X, F_I)$  est l'inertie du nuage des  $e_j$  pondérés par  $F_{.j}$ , portée par la direction  $X$ .

En effet 
$$F_I = \sum F_{.j} e_j$$

$$\begin{aligned} \text{puis: inertie portée} &= \sum_j F_{.j} X' (e_j - F_I) (e_j - F_I)' X \\ &= X' \left[ \sum_j F_{.j} e_j e_j' - F_I F_I' \right] X \\ &= X' (D_I - F_I F_I') X \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Par conséquent  $X$  annule  $\sigma^2$  si et seulement si  $X$  est orthogonal au nuage de points  $(e_j, F_{.j})$ .

Dans la suite il est commode d'introduire le sous-ensemble des points  $u_{\bar{i}}$  qui constituent les points extrémaux de l'ensemble borné des points  $u_i$  du simplexe  $S^I$  (réf.12); on pose  $\bar{I}$  le sous-ensemble de  $I$  des indices correspondants  $\bar{i}$ . La recherche de l'optimum  $\tilde{X} \tilde{F}_I$  peut être simplifiée (en théorie tout au moins) par la propriété suivante :

PROPRIETE 2. Quand l'optimum existe il existe au moins un  $\tilde{F}_I$  qui appartient au simplexe  $S^{\bar{I}} \subset S^I$ .

i) En effet on peut écrire 
$$u_i = \sum_{\bar{i}} \lambda_{i\bar{i}} u_{\bar{i}} \quad \forall i$$

avec 
$$\lambda_{i\bar{i}} \geq 0, \quad \sum_{\bar{i}} \lambda_{i\bar{i}} = +1,$$

d'où 
$$\begin{aligned} F_I &= \sum_i F_{.i} u_i = \sum_{i\bar{i}} \lambda_{i\bar{i}} F_{.i} u_{\bar{i}}, \\ &= \sum_{\bar{i}} F_{\bar{i}} u_{\bar{i}}, \end{aligned}$$

en posant  $F_{\bar{i}} = \sum_i \lambda_{i\bar{i}} F_i$ ,  $\bar{i} \in \bar{I}$ , des paramètres positifs ou nuls de somme 1.

Soit  $F_{\bar{I}}$  le point de coordonnées  $F_{\bar{i}}$  dans le simplexe unité  $S^{\bar{I}}$ . Par construction l'application qui a  $F_I$  fait correspondre  $F_{\bar{I}}$  conserve  $D_J$ , la matrice  $D_J$  et la variance  $\sigma^2(X, F_I)$ .

ii) En revanche soit  $\sigma_e^2 = X' \left[ \sum_i F_i (u_i u_i') \right] X = \sum F_i (X' u_i)^2$

on a 
$$X' u_i = \sum_{\bar{i}} \sqrt{\lambda_{i\bar{i}}} \sqrt{\lambda_{i\bar{i}}} X' u_{\bar{i}}$$

d'où d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$(X' u_i)^2 \leq \sum_{\bar{i}} \lambda_{i\bar{i}} (X' u_{\bar{i}})^2$$

et

$$\sigma_e^2 \leq \sum_{i\bar{i}} F_i \lambda_{i\bar{i}} (X' u_{\bar{i}})^2$$

$$\sigma_e^2 \leq \sum_{\bar{i}} F_{\bar{i}} (X' u_{\bar{i}})^2 = X' \left[ \sum_{\bar{i}} F_{\bar{i}} (u_{\bar{i}} u_{\bar{i}}') \right] X$$

Par conséquent  $\sigma_e^2$  et  $\sigma_e^2/\sigma^2$  sont non décroissantes dans l'application qui fait passer de  $F_I$  à  $F_{\bar{I}}$ ; d'où la présence nécessaire de  $\tilde{F}_I$  sur le simplexe  $S^{\bar{I}}$ . ■

Remarque : Cette propriété limite le champ de recherche des  $F_I$ , elle peut cependant se révéler de peu d'intérêt pratique puisqu'elle nécessite en amont la recherche des  $u_{\bar{i}}$ . En outre elle peut compliquer l'étude de l'unicité de l'optimum.

Ci-dessous l'on commence par étudier les deux problèmes plus simples

- recherche de la solution optimale  $X$  à  $F_I$  fixé,
- recherche de la solution optimale  $F_I$  à  $X$  fixé.

#### 4.2. Le problème à $F_I$ fixé

4.2.1. C'est a priori un problème de codage optimal classique, compliqué cependant par le fait que la matrice classique  $D_J$  peut être singulière.

PROPRIETE 3. Les matrices carrés symétriques  $D_J$  et  $\{D_I\}$  appartiennent simultanément au cône des matrices carrées symétriques réduites à un bloc diagonal non nul  $J'J'$  (on note CMCS  $J'J'$ ), avec  $J'$  un sous-ensemble de  $J$ .

En effet  $F_J = \sum F_i u_i$  et  $\{D_I\} = \sum F_i (u_i u_i')$ .

Si  $F_J \in R^{J'}$  on a nécessairement  $u_i \in R^{J'} \forall i: F_i \neq 0$ , donc

$$\{D_I\} \in \text{CMCS } J'J'.$$

Réciproquement si  $\{D_I\} \in \text{CMCS } J'J'$  on a nécessairement  $u_i \in R^{J'}$

(par l'absurde) d'où la propriété. ■

On pose  $J_I = \{j: F_j > 0\}$  le sous-ensemble des indices  $j$  tels que  $F_j$  n'est pas nul ;

Corrolaires - Pour tout  $F_I, D_I$  et  $\{D_I\}$  appartiennent au cône CMCS  $J_I J_I$  ;

- Quand la condition de centrage est respectée  $\sigma^2, \sigma_e^2$  et  $\sigma_{i \cdot}^2$  sont invariants par toute translation de  $R^{J-J_I}$ .

D'après la PROPRIETE 1,  $X$  annule  $\sigma^2$  si et seulement si  $X$  appartient à  $R^{J-J_I}$ , ou est colinéaire à  $\omega_{J_I}$  (directions orthogonales au nuage  $e_j, F_j$ )\*. Le problème en  $X$  est donc indéterminé pour toute translation de  $R^{J-J_I}$  ; on pose  $F_{J_I}$  et  $X$  les projections de  $F_J$  et  $X$  sur  $R^{J_I}$ ,  $D_{J_I}$  la matrice carrée inversible,  $X' D_{J_I} X$  est une forme quadratique non dégénérée dans  $R^{J_I}$ .

En conclusion, la recherche en  $X$  à  $F_I$  fixé se déroule en deux temps :

- réduction de l'indétermination en se limitant à  $R^{J_I}$ , avec la condition de centrage  $F_{J_I}' X = 0$  et les variances

$$X' D_{J_I} X, X' \{D_I\} X ;$$

(\*) Il existe des  $X$  différents de  $\omega_J$  qui annulent  $\sigma^2$  ssi  $J \subset J'$  au sens strict, cf. également Annexe 1.

- résolution classique du problème ainsi réduit, où seul  $w_{\mathcal{Y}_I}$  annule  $\sigma^2$ .

On a donc à ce niveau la non unicité du problème classique (liée à l'ordre de multiplicité de  $\tilde{\lambda}$ ), à laquelle s'ajoute l'indétermination par  $R^{\mathcal{J}-\mathcal{Y}_I}$  pour la solution en X.

4.2.2. Le cas où  $F_I$  est combinaison linéaire de  $\bar{e}_{i_1}$  et  $\bar{e}_{i_2}$  est important dans la suite,  $F_I = \alpha \bar{e}_{i_1} + (1-\alpha) \bar{e}_{i_2}$ ,  $0 < \alpha < 1$ .

On note  $\bar{e}_1$  et  $\bar{e}_2$  pour simplifier,  $u_1$  et  $u_2$  les vecteurs  $u_i$  correspondants,  $f_2$  le tableau f réduit à ces deux lignes,  $D_{I_2}$  la matrice diagonale correspondante,  $\mathcal{Y}_I = \mathcal{J}^{-1} \cup \mathcal{J}^2$ . Après réduction par  $R^{\mathcal{J}-\mathcal{Y}_I}$  la solution prend une forme simple:

PROPRIETE 4. La solution du codage optimal est donnée par :

$$\tilde{\chi} = D_{\mathcal{Y}_I}^{-1} (u_2 - u_1) \quad , \quad \tilde{\lambda}(\alpha) = \alpha(1-\alpha) \sum_{\mathcal{Y}_I} \frac{(u_{1j} - u_{2j})^2}{\alpha u_{1j} + (1-\alpha) u_{2j}} \quad ,$$

$0 < \alpha < 1$ .

En effet :

$$i) \quad F_I = \alpha \bar{e}_1 + (1-\alpha) \bar{e}_2 \quad , \quad 0 < \alpha < 1 \quad ,$$

$$F_{\mathcal{Y}_I} = \alpha u_1 + (1-\alpha) u_2 \quad ,$$

$$f' D_{I_2} f = \alpha u_1 u_1' + (1-\alpha) u_2 u_2' \quad ,$$

$$\begin{aligned} \sigma_c^2 &= \chi' \left[ \alpha u_1 u_1' + (1-\alpha) u_2 u_2' \right. \\ &\quad \left. - (\alpha u_1 + (1-\alpha) u_2) (\alpha u_1 + (1-\alpha) u_2)' \right] \chi \quad , \end{aligned}$$

$$= \alpha(1-\alpha) \chi' (u_1 - u_2) (u_1 - u_2)' \chi \quad ,$$

$$= \alpha(1-\alpha) \left[ \chi' (u_2 - u_1) \right]^2 \quad .$$

La maximisation de  $\sigma_e^2 / \sigma^2$  revient ici à optimiser la forme linéaire  $\chi'(u_2 - u_1)$  sous la liaison non dégénérée  $\sigma^2 = \sigma_0^2$  ; on a la direction optimale évidente  $\tilde{\chi} = D_{\mathcal{I}_2}^{-1} (u_2 - u_1)$ , unique par construction, centrée par rapport à  $F_{\mathcal{I}_2}$ .

ii) D'autre part dans le simplexe  $S^{\mathcal{I}}$  l'inertie des 2 points  $u_1$  et  $u_2$  pour toute métrique euclidienne (donc la métrique du  $\mathcal{X}^2$  centrée sur  $F_{\mathcal{I}_2}$ ) est entièrement prise en compte par la direction  $\vec{u}_1 u_2$ , ce qui signifie que l'on n'a qu'une seule valeur propre non nulle, hormis celle qui est identique à 1. On en déduit :

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_{12}(\alpha) &= \text{trace} \left( D_{\mathcal{I}}^{-1} f_2' D_{\mathcal{I}_2} f \right) - 1 \\ &= \sum \frac{\alpha u_{1j}^2 + (1-\alpha) u_{2j}^2}{\alpha u_{1j} + (1-\alpha) u_{2j}} - \sum \frac{(\alpha u_{1j} + (1-\alpha) u_{2j})^2}{\alpha u_{1j} + (1-\alpha) u_{2j}} \\ &= \alpha(1-\alpha) \sum_{\mathcal{I}_2} \frac{(u_{1j} - u_{2j})^2}{\alpha u_{1j} + (1-\alpha) u_{2j}} \end{aligned}$$

sachant que  $u_{1j}$  et  $u_{2j}$  ne sont pas simultanément nuls. ■

Remarque : Le cas du tableau à 2 lignes est résolu par Saporta, avec également une technique simplifiée (réf.14).

4.2.3. De façon plus précise on pose  $\bar{j}$  et  $\bar{j}$  les indices qui annulent respectivement  $u_{1j}$  et  $u_{2j}$  (indices qui appartiennent à des sous-ensembles disjoints par construction), d'où l'expression détaillée de  $\tilde{\lambda}_{12}(\alpha)$  :

$$\tilde{\lambda}_{12}(\alpha) = \alpha \sum_{\bar{j}} u_{2j} + (1-\alpha) \sum_{\bar{j}} u_{1j} + \alpha(1-\alpha) \sum_{j \in \bar{j} \cap \bar{j}} \frac{(u_{1j} - u_{2j})^2}{\alpha u_{1j} + (1-\alpha) u_{2j}}$$

C'est une fonction définie continue positive sur  $]0, 1[$ , à dérivée seconde négative ou nulle :

$$\tilde{\lambda}_{12}''(\alpha) = -2 \sum_{j \in \bar{J}} \frac{u_{1j} u_{2j} (u_{1j} - u_{2j})^2}{[\alpha u_{1j} + (1-\alpha) u_{2j}]^3} .$$

On a aux bornes

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \tilde{\lambda}_{12} = \sum u_{1j} \bar{J} \quad , \quad \lim_{\alpha \rightarrow 1} \tilde{\lambda}_{12} = \sum u_{2j} \bar{J} .$$

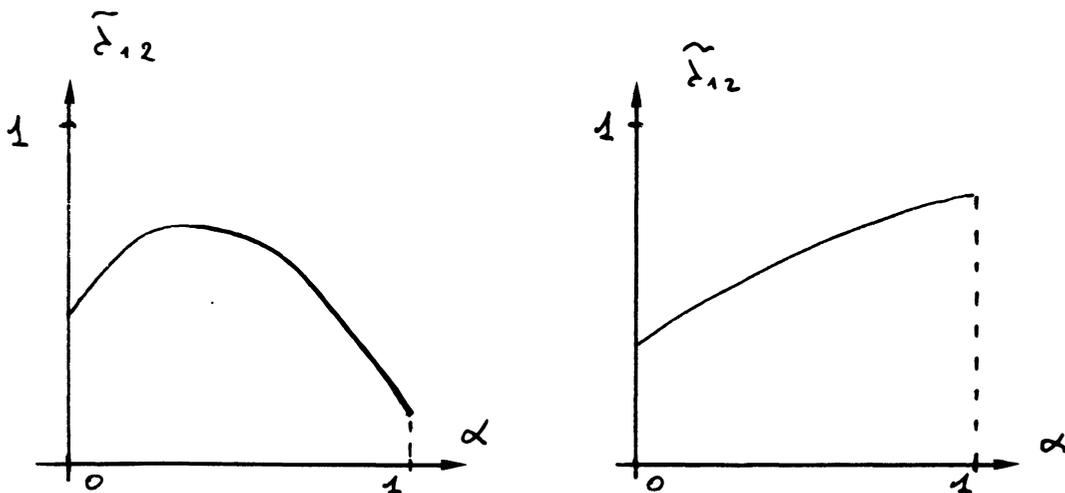
Ces limites sont nulles si et seulement si ni  $u_1$  ni  $u_2$  n'ont de coordonnées nulles.

Conséquence :

La variation de  $\tilde{\lambda}_{12}(\alpha)$  sur  $]0, 1[$  permet l'étude du maximum de  $\rho$  lorsque  $F_{\bar{I}}$  varie sur toute arête ouverte  $\bar{e}_1 \bar{e}_2$  .

PROPRIÉTÉ 5. Quand  $F_{\bar{I}}$  varie sur toute arête ouverte  $\bar{e}_1 \bar{e}_2$  le rapport  $\rho = \sigma_e / \sigma(F_{\bar{I}})$  atteint un maximum unique à l'intérieur de l'arête, ou tend vers un maximum à l'une des bornes, sans l'atteindre.

Ceci résulte immédiatement des variations de  $\tilde{\lambda}_{12}(\alpha)$ , concave ou linéaire qui a l'une des 2 types de variations suivantes : (figure 2)



a) maximum atteint dans  $]0, 1[$

b) maximum en 0 ou en 1.

Figure 2: les deux variations possibles de  $\tilde{\lambda}_{12}(\alpha)$ . ■

4.3. Le problème à  $X$  fixé.

4.3.1. On définit  $H_X$  l'intersection du simplexe unité  $S^I$  avec l'hyperplan d'équation  $F'_I \int X = 0$  ;

$N_X$  l'intersection de  $S^I$  avec l'hyperplan  $F'_I \int X^2 = 0$  ;

$H_X^0$  l'intersection de  $N_X$  avec l'hyperplan  $F'_I \int X = 0$ , c'est aussi l'intersection de  $H_X$  avec l'hyperplan  $F'_I \int X^2 = 0$ .

On désigne par "arête" de  $S^I$  les segments de droite

$$\alpha \bar{e}_{i_1} + (1-\alpha) \bar{e}_{i_2} \quad \text{pour tout} \quad 0 \leq \alpha \leq 1 .$$

PROPRIETE 6.

Dans  $R^K$ , l'intersection du simplexe unité  $S^K$  et de tout hyperplan  $\gamma' A = 0$  est un ensemble convexe polyédrique borné dont les points extrémaux (si l'intersection est non vide) sont situés sur les arêtes de  $S^K$ .

En effet l'intersection de 2 convexes est un convexe, borné puisque  $S^K$  est borné, polyédrique puisque  $S^K$  et  $\gamma' A = 0$  sont délimités par des hyperplans.

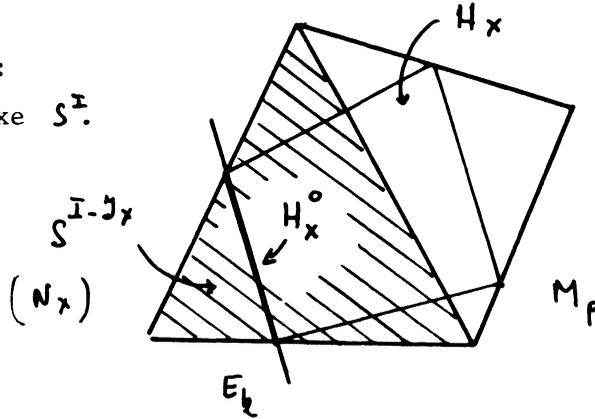
En dernier, les points extrémaux possèdent au moins  $K-2$  contraintes du type  $\bar{e}_k = 0$  saturées (réf.12 chap.12 et 14-1). ■

On en déduit que  $H_X$  est un sous-ensemble convexe de  $S^I$  dont les points extrémaux sont sur les arêtes de  $S^I$ ,  $H_X$  peut éventuellement être vide.

4.3.2. On définit  $J_X = \{ i : (f X^2)_i > 0 \}$  le sous-ensemble de  $I$  tel que les coordonnées de  $f X^2$  sont non nulles ;  $J_X$  est non vide pour tout  $X \neq 0$ . Comme toutes les coordonnées de  $f X^2$  sont positives ou nulles, l'hyperplan d'équation  $F'_I \int X^2 = 0$  n'est autre que  $R^{I-J_X}$ , et l'intersection  $N_X$  n'est autre que le sous-simplexe  $S^{I-J_X}$ , facette de  $S^I$  (éventuellement un ensemble vide si  $J_X = I$ ).

Il en résulte ainsi que l'intersection  $H_X^0$  quand elle est non vide est un sous-ensemble convexe de  $S^{I-J_X}$  dont les points extrémaux sont sur les arêtes de  $S^{I-J_X}$  ; on désigne par  $E_1, \dots, E_k$  ces points extrémaux. Comme  $H_X^0 \subset H_X$ , les autres points extrémaux  $M_p$  de  $H_X$  (quand ils existent) sont sur les autres arêtes de  $S^I$  que celles de  $S^{I-J_X}$ , et  $H_X \setminus H_X^0$  est entièrement situé du "même côté" que  $H_X^0$ .

Figure 3 :  
Le simplexe  $S^I$ .



4.3.3. On se situe sur  $H_X$  pour étudier le rapport des variances centrées ; le rapport de deux fonctions linéaires  $\rho^2(F_I) = \sigma_c^2 / \sigma^2(F_I)$  est partout défini hors  $H_X^0$ . Soient  $F_1$  et  $F_2$  deux points de  $H_X$ , on étudie les variations de  $\rho^2$  en tout  $F_I = \mu F_1 + (1-\mu) F_2$  de la droite portée par  $F_1 F_2$  situé dans  $H_X$ . D'après l'interprétation des formes linéaires en termes de variance, un point  $F_I$  de  $H_X^0$  annule  $\sigma^2$  et aussi  $\sigma_c^2$ .

- i)  $F_1$  et  $F_2 \in H_X^0$ , donc  $\rho^2$  n'est défini en aucun point de  $F_1 F_2$  ;
- ii)  $F_1 \notin H_X^0$  :

- Si  $F_2 \in H_X^0$ , alors on a  $\rho^2(F_I) = \frac{\mu \sigma_c^2(F_1) + (1-\mu) \sigma_c^2(F_2)}{\mu \sigma^2(F_1) + (1-\mu) \sigma^2(F_2)}$   
la fonction  $\rho^2$  est constante sur  $F_1 F_2 \cap H_X$ , le point  $F_2$  exclu, on peut compléter par continuité si on le désire ;

- Si  $F_2 \notin H_X^0$ , alors  $\rho^2(F_I)$  est une fonction homographique en  $\mu$ , définie en tout point de  $F_1 F_2 \cap H_X$ , hormis le point éventuel où cette droite coupe  $H_X^0$  (dans  $S^I$ ). Si ce cas se présente on a vu que le segment de "points valides" sont tous situés du même côté de  $H_X^0$ , donc  $\rho^2(F_I)$  est monotone en  $\mu$ .

- cas particulier; si on a  $\rho^2(F_1) = \rho^2(F_2)$  alors  $\sigma_e^2/\sigma^2$  est constant partout où  $F_I = \mu F_1 + (1-\mu) F_2$  est défini. On en déduit en particulier que si  $\sigma_e^2/\sigma^2$  atteint la même valeur en plusieurs points de  $H_X \setminus H_X^0$ , elle possède cette même valeur sur l'enveloppe convexe de ces points.

PROPRIETE 7. Pour tout  $X$  on a une et une seule des 3 éventualités :

- $H_X$  vide, il n'y a pas de solution en  $F_I$  ;
- $H_X$  non vide, confondu avec  $H_X^0$ , le problème est non défini ;
- $H_X$  non vide,  $H_X^0 \subset H_X$  au sens strict ;  $\rho^2$  atteint son maximum en l'un des points extrémaux  $M_p$ .

En effet les 3 possibilités sont mutuellement exclusives, les deux premiers points sont évidents.

Soit  $F_I$  un point quelconque de  $H_X \setminus H_X^0$ , alors par définition des points extrémaux, il existe  $E$  de  $H_X^0$  et  $M$  de l'enveloppe convexe des  $M_p$  tels que  $F_I = \alpha E + (1-\alpha) M$ , donc  $\rho^2(M) = \rho^2(F_I)$ .

La fonction  $\sigma_e^2/\sigma^2(M)$  est continue bornée sur l'enveloppe convexe fermée bornée des  $M_p$ , elle atteint donc son maximum en  $\tilde{M}$ . Si l'on suppose que  $\tilde{M}$  n'est pas un point  $M_p$ ,  $\rho^2$  est monotone sur tout  $\tilde{M} \cap H_X$ , et donc  $\tilde{M}$  n'est pas optimal. Le 3° point en résulte. ■

Conséquence : Quand il existe, le maximum de  $\rho^2(F_I)$  est atteint au moins sur une arête (fermée) de  $S^I$ .

#### 4.4. Le problème général

4.4.1. On a vu des cas où le problème partiel à  $X$  fixé ne possède pas de solutions ; on ne peut donc démontrer l'existence d'un optimum pour  $\rho$  en  $X$   $F_I$ , un exemple en est donné au chapitre 5. Par contre d'après ce qui précède on peut affirmer que lorsque une telle solution existe, elle (ou l'une d'entre elles) est nécessairement telle que  $\tilde{F}_I$  est sur une arête du simplexe  $S^I$ , (puisque ce  $\tilde{F}_I$  est l'optimum pour le  $\tilde{X}$  fixé).

Ce résultat donne un moyen commode de répondre aux deux questions relatives à l'existence et la recherche d'un maximum.

Il suffit comme on l'a vu de calculer la valeur propre  $\tilde{\lambda}_{12}(\alpha)$  en tout point  $\alpha \bar{e}_{i_1} + (1-\alpha) \bar{e}_{i_2}$  de toutes les arêtes de  $S^I$  (cf 4.2). Il y a  $I(I-1)/2$  telles fonctions  $\tilde{\lambda}_{12}$  et autant de maxima atteints à l'intérieur de l'arête ou non atteints en l'une des deux extrémités. Si la borne supérieure de ces extréma est effectivement atteinte on peut donc affirmer que l'on a une solution pour  $\tilde{F}_I$ . Le maximum correspondant  $\tilde{\lambda}_{12}(\tilde{\alpha})$  est celui qu'atteint  $\rho^2(\tilde{X}, \tilde{F}_I)$ , la solution centrée  $\tilde{X}$  est donnée par  $D_{\tilde{Y}_I}^{-1}(u_{i_2} - u_{i_1})$  à laquelle on ajoute l'espace  $R^{J-\tilde{Y}_I}$  où  $\tilde{Y}_I = J^{i_1} \cup J^{i_2}$ .

Remarque. Pour l'existence on peut se limiter au seul balayage des arêtes du simplexe  $S^I$  des indices  $\bar{i}$  tels que les  $u_{\bar{i}}$  sont les points extrémaux des  $u_i$ . Cependant la recherche des  $u_{\bar{i}}$  peut se révéler en pratique une question ardue alors que le balayage exhaustif des  $I(I-1)/2$  arêtes de  $S^I$  est guère moins rapide que le balayage des arêtes de  $S^{\bar{I}}$ .

#### 4.4.2. Etude de l'unicité

- On suppose que le maximum des  $\tilde{\lambda}_{12}(\alpha)$  est atteint sur une seule arête  $\bar{e}_{i_1} \bar{e}_{i_2}$ . On en déduit  $u_{i_1}$  et  $u_{i_2}$  et  $\tilde{Y}_I = J^{i_1} \cup J^{i_2}$ . Dans  $R^{\tilde{Y}_I}$  le vecteur  $\tilde{X}$  est unique et l'on a  $\tilde{X} = \tilde{X} + R^{J-\tilde{Y}_I}$  avec une indétermination sur  $J-\tilde{Y}_I$  coordonnées de  $X$ .

- Si le maximum des  $\tilde{\lambda}_{12}(\alpha)$  est atteint sur plusieurs arêtes, on en déduit autant de  $\tilde{X} + R^{J-\tilde{Y}_I}$ ; dans ce cas on a une deuxième raison de non unicité en  $\tilde{X}$ .

#### 4.5. Résolutions particulières

On a des résultats plus complets dans les cas suivants :

4.5.1. On suppose qu'il existe un sous-tableau  $(J, \tilde{Y})$  de  $f$ ,  $\tilde{Y}$  ayant deux indices ou plus, et 2 partitions  $I_1, \dots, I_H$  de  $J$  et  $J_1, \dots, J_H$  de  $\tilde{Y}$  tels que ce sous-tableau est sous la forme d'une diagonale de blocs  $d_k$ . Alors le maximum de  $\sigma^2/\sigma^2$  est 1, atteint pour tout vecteur  $F_I$  de  $S^H$  et tout vecteur  $X$  comme suit :  $X = \sum_R \alpha_R \omega_{J_k}$ .

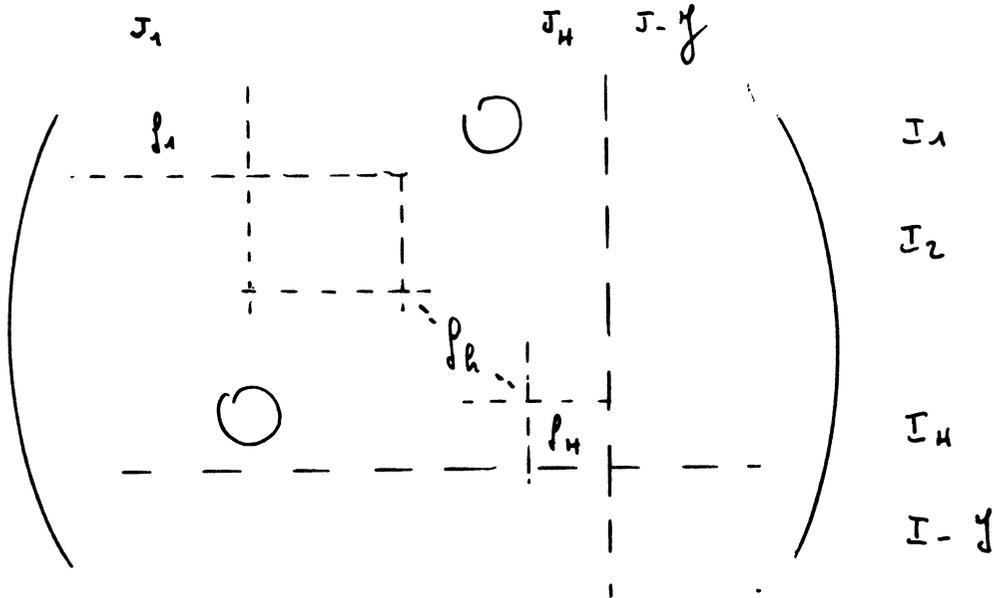


Figure 4 : Décomposition de  $D_2 f$ .

4.5.2.  $f$  ne contient aucun élément nul,  $J_I = J$ . Dans ces conditions toutes les fonctions  $\tilde{\Sigma}_{1,2}$  tendent vers des limites nulles pour  $\alpha = 0$  et  $1$ , donc tous les maxima sont atteints à l'intérieur des arêtes. On a donc l'existence d'une solution, pour le plus grand des maxima. Le vecteur  $\tilde{x}$  correspondant est unique et ne souffre d'aucune indétermination ; par contre ce maxima peut être atteint plusieurs fois sur plusieurs arêtes différentes.

4.5.3. On a une condition suffisante d'existence plus générale lorsque toutes les fonctions  $\tilde{\Sigma}_{1,2}$  sur les arêtes  $u_{i1} u_{i2}$  ont aux extrémités ( $\alpha = 0,1$ ) des valeurs limites de  $\tilde{\Sigma}'$  non nulles de signe contraire.

Sur l'ensemble  $J^{i1} \cup J^{i2}$  et avec les notations de 4.2. cela fait

$$\tilde{\Sigma}'(0) = \sum_{\bar{j}} u_{2\bar{j}} - \sum_{\bar{j}} u_{1\bar{j}} + \sum_{j-\bar{j}-\bar{j}} \frac{(u_{1j} - u_{2j})^2}{u_{2j}} > 0$$

$$\tilde{\Sigma}'(1) = \sum_{\bar{j}} u_{2\bar{j}} - \sum_{\bar{j}} u_{1\bar{j}} - \sum_{j-\bar{j}-\bar{j}} \frac{(u_{1j} - u_{2j})^2}{u_{1j}} < 0$$

$$\text{c'est à dire : } - \sum_{j-\bar{j}-\bar{j}} \frac{(u_{1j} - u_{2j})^2}{u_{2j}} < \sum_{\bar{j}} u_{2\bar{j}} - \sum_{\bar{j}} u_{1\bar{j}} < \sum_{j-\bar{j}-\bar{j}} \frac{(u_{1j} - u_{2j})^2}{u_{1j}}$$

pour tout couple  $i_1, i_2$  ; il n'y a pas unicité .

## 5 - Discussion et exemples

5.1. Si l'on désire un codage invariant de l'application particulière sur chaque lot de données il est indispensable de supprimer l'influence de la distribution marginale en fonction de l'exposition aux stimuli, le codage optimal classique ne vérifie pas cette condition.

5.1.1. On peut y parvenir si l'on cherche un optimum non seulement en fonction de  $\chi$  (le vecteur des codages), mais aussi en fonction du vecteur marginal  $F_{\mathbf{I}}$  . Posé dans ces termes le problème appelle quelques remarques :

- a) l'optimum n'existe pas toujours
- b) quand il existe il n'est pas forcément unique.

Cette absence d'unicité n'est pas nouvelle, on a vu qu'elle se présente aussi dans le cas du codage optimal habituel. Par contre la non existence n'est pas une réponse encourageante pour la méthode de codage sur-optimal. (\*) Devant ce phénomène on peut classer les tableaux invariants  $f$  en 2 catégories :

- a) ceux qui conduisent à un sur-optimum,
- b) ceux qui n'y conduisent pas, (non existence).

L'amélioration du codage sur-optimal qui est ici proposée ne peut donc s'appliquer que sur les tableaux invariants de la première catégorie.

Parmi ceux-ci les tableaux qui offrent en outre l'unicité sont ceux qui se prêtent le mieux à l'amélioration proposée. C'est pour ces derniers que l'on peut véritablement concevoir la méthode précédente, laquelle donne la plus grande des corrélations possibles entre le codage des réponses  $\tilde{\chi}$

---

(\*) On sait que pour la recherche générale de la corrélation maximale, la non-existence se manifeste également (réf.13).

et le codage correspondant des stimuli  $\{ \tilde{X} \}$  ; on remarque cependant qu'en cas de non unicité, plusieurs solutions  $\tilde{X}$  sont possibles, alors que la corrélation maximale est unique.

Dans la plupart des cas  $\tilde{F}_t$  est sur une arête, cela signifie donc que seules deux lignes de  $f$  interviennent pour calculer  $\tilde{X}$  ; peut-être est-ce là une conséquence analytique qui surprend.

5.1.2. Pour tous les tableaux on peut concevoir d'autres solutions qui ne dépendent pas davantage du local. Il s'agit des solutions pour lesquelles le local est fixé à l'avance de manière explicite ; par exemple le local équipondéré utilisé d'emblée dans les intervalles successifs. L'algorithme suivi est le même que le codage optimal classique, et l'on rejoint les algorithmes fort répandus aujourd'hui de l'analyse factorielle des correspondances. On doit toutefois signaler une conséquence qui elle aussi peut surprendre, à savoir que la corrélation maximale avec un local conventionnel peut être inférieure à celle que l'on aurait avec le vrai local. Cet avatar cependant ne remet nullement en cause la recherche de la suppression de l'influence intempestive du local variable.

Dans un cas comme dans l'autre, la nécessité que l'on a rencontrée d'isoler les informations invariantes d'un processus de stimulus-réponses des informations strictement locales de chaque expérimentation vient confirmer l'intérêt qu'il y a de considérer en soi les distributions de réponses pour chaque stimulus. En dernier lieu l'on ne doit pas perdre de vue que ces calculs classiques et les améliorations que l'on propose pour obtenir un codage invariant restent dans le cadre des conditions nécessaires quand à l'existence d'une échelle d'intervalle pour coder les niveaux d'une échelle ordinaire (\*). Tout ceci repose de facto sur le jugement ou la connaissance du spécialiste des données traitées qui juge du bien fondé d'un tel codage, de l'hypothèse analytique qui y conduit et de la nécessité de procéder ainsi. Nous ne nous sommes ici limités qu'à souligner un inconvénient du codage optimal classique et à proposer des moyens pour le résoudre. On peut rapporter pour conclure le courant d'esprit des psychométriciens qui développent des techniques analytiques, (réf.18) et notamment la volonté de Guttman et de son école d'interpréter les conclusions mathématiques en termes de mesures d'attitude, au prix quelquefois d'une certaine imagination (réf.8).

---

(\*) Par rapport à la théorie du mesurage (réf.15), le codage considère comme résolu a priori la question de la représentation (réf.4).

## 5.2. Exemples

On indique ci-dessous 5 exemples de traitements, qui illustrent tous les cas rencontrés dans la discussion.

5.2.1. A. Lassiere a étudié la gêne due au bruit de la circulation automobile (réf. 6,9). La gêne est un concept difficile à définir et à saisir, actuellement la pratique la plus courante consiste à demander aux enquêtés de se situer sur une échelle contenant 7 (ou 4,11,..) positions censées représenter leur niveau de gêne, depuis l'absence de gêne ( $R_1$ ) jusqu'à la gêne très forte (dernier échelon). C'est une échelle ordinale.

En regard le stimulus est un niveau de bruit, sa valeur est ici le résultat d'une formule acoustique légale en Grande-Bretagne basée sur des mesures faites à l'aide d'appareils étalonnés (sonomètres). Les résultats de A. Lassière sont directement donnés sous la forme du tableau invariant  $f$  du texte avec  $I = 19$  stimuli et  $J = 7$  réponses. On constate que les lignes de  $f$  vérifient les relations d'ordre latéral, et qu'il s'en faut de peu que les colonnes de  $f$  en fassent autant (il suffit de retouches mineures) ; tous les  $f_{ij}$  sont différents de zéro.

Par construction le local du tableau  $f$  est  $\omega_I/I$ . Le codage optimal avec ce local d'origine donne une corrélation maximale au carré

$$\rho^2 = \lambda = 0,330.$$

Comme aucun des  $f_{ij}$  n'est nul on sait qu'il existe au moins une solution du codage sur-optimal. On la recherche en faisant varier  $F_I$  sur les arêtes du simplexe  $S^{19}$  et en étudiant les variations de  $\tilde{\lambda}_{12}$  sur toute arête  $\bar{e}_{i_1} \bar{e}_{i_2}$ . C'est l'arête  $\bar{e}_1 \bar{e}_{19}$  qui donne le  $\lambda$  maximal pour  $F_{1.} = 0,5058$  et  $F_{19.} = 1-F_{1.}$ , avec  $\tilde{\rho}^2 = \tilde{\lambda} = 0,6716$ . La recherche du codage sur-optimal donne ici une forte élévation de la corrélation maximale.

Si l'on ramène les codages  $\tilde{\chi}_j$  sur  $[1,7]$  on a la solution sur-optimal décentrée :

$R_j$	1	2	3	4	5	6	7
$X_j$	1,0	1,18	2,28	3,26	6,20	6,45	7,0

La valeur  $\tilde{X}_i$  de chaque stimuli indique la correspondance entre ce codage sur  $R$  et les valeurs  $S_i$  en décibels A, figure 5.

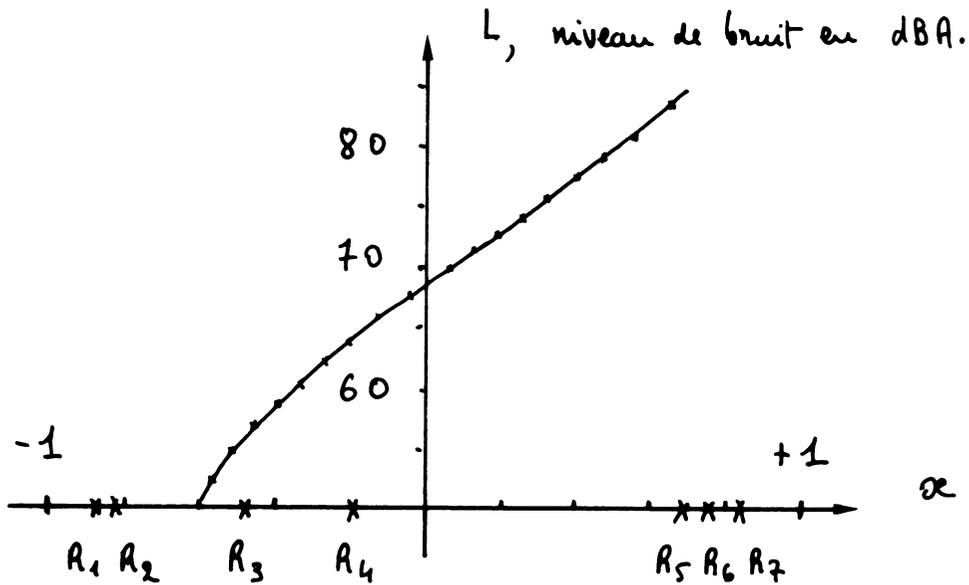


Figure 5 : Le codage sur-optimal sur le tableau de Lassière.

Tableau 2 - DISTRIBUTION OF SCALE SCORES, S, VERSUS 18 HOUR  $L_{10}$  LEVELS, DB(A) Réf. 6

Interval number	Noise band 18h $L_{10}$	Proportion of people with score						
		S=1	S=2	S=3	S=4	S=5	S=6	S=7
1	< 50	0.54	0.23	0.09	0.06	0.03	0.03	0.02
2	50 - 52	0.46	0.25	0.11	0.08	0.03	0.04	0.03
3	52 - 54	0.42	0.25	0.13	0.09	0.03	0.04	0.04
4	54 - 56	0.38	0.25	0.13	0.11	0.04	0.04	0.05
5	56 - 58	0.34	0.24	0.15	0.12	0.04	0.05	0.06
6	58 - 60	0.30	0.23	0.16	0.13	0.06	0.05	0.07
7	60 - 62	0.26	0.22	0.16	0.15	0.06	0.07	0.08
8	62 - 64	0.22	0.21	0.16	0.16	0.08	0.07	0.10
9	64 - 66	0.19	0.18	0.16	0.17	0.09	0.09	0.12
10	66 - 68	0.16	0.17	0.14	0.18	0.11	0.10	0.14
11	68 - 70	0.14	0.14	0.13	0.18	0.13	0.12	0.16
12	70 - 72	0.12	0.12	0.11	0.17	0.15	0.14	0.19
13	72 - 74	0.10	0.10	0.10	0.16	0.16	0.16	0.22
14	74 - 76	0.08	0.08	0.09	0.14	0.18	0.17	0.26
15	76 - 78	0.07	0.07	0.07	0.11	0.19	0.19	0.30
16	78 - 80	0.06	0.05	0.06	0.10	0.19	0.20	0.34
17	80 - 82	0.04	0.05	0.05	0.08	0.18	0.22	0.38
18	82 - 84	0.04	0.03	0.04	0.06	0.18	0.22	0.43
19	> 84	0.03	0.02	0.03	0.04	0.16	0.22	0.50

## 5.2.2. Enquête VRU-1974 (réf.19)

i) En 1974, 973 personnes résidant dans 10 agglomérations françaises au voisinage de voies rapides urbaines (V.R.U.) bruyantes ont répondu à une échelle de gêne en 4 points  $R_1 R_2 R_3 R_4$ . En même temps on a mesuré le niveau de bruit  $Leq$  (8h-20h) en façade de logement (unité décibel A).

Le tableau des effectifs recueillis est le suivant : Tableau 3

Tableau 3a : Tableau des effectifs

	$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$	exposition locale %
$Leq = 59$	14	22	11	6	5,45
62	16	24	31	15	8,84
65	43	73	57	42	22,10
68	28	61	92	73	26,10
71	19	31	62	84	20,10
74	8	30	44	87	17,40

ii) On établit le codage optimal des  $R_j$  sur ce tableau lui-même avec le local d'origine. Ce codage, décentré sur  $[1-4]$  par commodité, est le suivant :

$$R_1 : 1. ; R_2 : 1.56 ; R_3 : 2,67 ; R_4 : 4.$$

avec une corrélation maximale carrée  $\rho^2 = 0,102$ .

Si l'on recommence avec le local équipondéré  $\omega_i / \mathcal{I}$  on obtient une solution avec  $\rho^2 = 0,132$

	$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$
$Leq = 59$	26.4	41.5	20.8	11.3
62	18.6	27.9	36.0	17.4
65	20.0	34.0	26.5	19.5
68	11.0	24.0	36.2	28.7
71	9.7	15.8	31.6	42.9
74	4.7	17.8	26.0	51.5

Tableau 3b :

Tableau f  
invariant

Aucun des  $\beta_{ij}$  n'étant nul, on est ici encore assuré de l'existence d'un codage sur-optimal que l'on recherche à l'aide du balayage des arêtes du simplexe  $\mathcal{S}^6$ . On trouve ce sur-optimum unique sur l'arête  $\bar{e}_1 \bar{e}_6$  pour  $F_1 = 0,517$  et  $F_6 = 1 - F_1$  avec  $\tilde{\rho}^2 = 0,254$ .

La solution décentrée sur [1-4] est :

$R_j$	1	2	3	4
$\tilde{\chi}_j$	1,00	1,64	2,78	4,00

Les stimuli  $S_i$  sont également situés sur le même continuum, dans le cas sur-optimal on a

$S_i \approx 59\text{dB} :$	1,97	68dB :	2,66
62dB :	2,34	71dB :	2,95
65dB :	2,27	74dB :	3,12

On observe une "inversion" entre 62 et 65 dB ; cela provient du fait que les distributions conditionnelles du tableau  $F_{I/J}$  ne vérifient pas toutes la relation d'ordre latéral.

5.2.3. Le tableau  $\mathcal{N}$  de stimulus-réponse suivant est étudié par Nishisato, et repris par Tenenhaus (réf.16, tableau 4).

	5	4	1	0
Tableau 4 :	5	2	3	0
Tableau des effectifs	0	3	4	3
	0	1	2	7

Il possède 4 stimuli et 4 niveaux de réponse.

On le prend tel quel pour faire un codage optimal et sur-optimal.

Le local d'origine est le local équipondéré. On trouve dans ce cas la solution optimale avec  $\rho^2 = 0,566$ .

Le tableau des  $f_{ij}$  contient des éléments nuls, on n'est donc pas assuré de l'existence d'une solution sur-optimale. Cependant quand on balaye en  $F_I$  les arêtes du simplexe  $S^4$  on trouve un sur-optimum unique sur l'arête  $\bar{e}_1 \bar{e}_4$  pour  $F_{1.} = 0,715$  et  $F_{4.} = 0,285$  ;  $\tilde{\rho}^2 = 0,717$ . La solution sur-optimale décentrée sur [1-4] donne :

$R_j$	1	2	3	4
$\tilde{\chi}_j$	1,00	1,27	2,33	4,00

5.2.4. On trouve le tableau  $\mathcal{W}$  suivant dans Torgerson (réf.18, page 72) avec 9 stimuli, 5 niveaux de réponse et le local d'origine équipondéré.

Tableau 5 - HYPOTHETICAL DATA: FREQUENCIES WITH WHICH EACH WEIGHT WAS RATED IN EACH CATEGORY, réf.18

Stimuli in grams	Categories				
	1	2	3	4	5
50	40	47	13		
55	16	51	30	3	
60	4	35	48	13	
65	1	19	51	27	2
70		9	44	40	7
75		3	30	51	16
80		1	18	53	28
85			10	43	47
90			4	35	61

On a une solution optimale  $\rho^2 = 0,642$ . Quand on balaye en  $F_I$  sur les arêtes de  $S^3$  pour le sur-optimum, on constate que le sup des  $\tilde{\lambda}_{1,2}$  est sur l'arête  $\bar{e}_1 \bar{e}_2$  lorsque le point  $F_I$  tend vers  $\bar{e}_1$ ; la valeur limite inaccessible est ici  $\tilde{\rho}^2 = 0,96$ .

C'est un exemple de tableau invariant  $f$  qui n'a pas de corrélation sur-maximale quand on fait varier  $F_I$ .

5.2.5. On se donne le tableau-exemple suivant : (tableau 6)

Tableau 6 :	4	1	1
Exemple particulier	1	4	1
	1	1	4

avec 3 stimuli et 3 niveaux de réponse et le local d'origine équipondéré. La recherche du codage optimal classique conduit à une solution non unique. En effet la plus grande valeur propre  $\lambda: \rho^2 = 0,25$  est une racine double, on a donc un plan de solutions optimales.

On se livre au balayage des arêtes de  $S^3$  pour le codage sur-optimal. Compte tenu de son caractère particulier à dessein (mais nullement interdit), on trouve 3 maxima indépendants pour  $\tilde{\lambda}_{1,2}$ , un sur chaque arête. Ce tableau est un exemple qui admet 3 sur-optimum avec 3 solutions  $\tilde{X}$  indépendantes. On a cependant l'unicité pour  $\tilde{\rho}^2 = 0,3$ .

Annexe 1 - Etude de variances

1) Etude de  $\sigma_i^2(X) = 0$ .

Avec les notations du texte principal, la variance de la ligne  $i$  est

$$\sigma_i^2(X) = u_i' X^2 - (u_i' X)^2.$$

Le vecteur  $X = \omega_J$  annule identiquement tout  $\sigma_i^2$  ; on cherche les autres solutions.

On pose  $J_1, \bar{J}_1, J_1', \bar{J}_1'$  des partitions de  $J = \{1, \dots, J\}$

PROPRIETE  $X = \gamma \omega_{J_1'} + R^{\bar{J}_1'}$  annule  $\sigma_i^2$  ssi  $u_i \in R^{J_1'}$ ,

$$\forall J_1' : J_1 \subset J_1' \subset J.$$

En effet si  $u_i \in R^{J_1'}$ , on vérifie immédiatement que  $\gamma \omega_{J_1'} + R^{\bar{J}_1'}$  annule  $\sigma_i^2$ .

Réciproquement si  $\gamma \omega_{J_1'} + R^{\bar{J}_1'}$  annule  $\sigma_i^2$ ,  $u_i$  n'a aucune coordonnée sur  $\bar{J}_1$  non nulle (par l'absurde). ■

Conséquences a)  $\exists X$  solution  $\neq \omega_J$  ssi  $J_1 \subset J$  au sens strict,

b) Soient  $u_1$  et  $u_2 \in R^{J_1} \cap R^{J_2}$

-  $J_1 \cap J_2$  non vide, seul  $X = \gamma \omega_{J_1'} + R^{\bar{J}_1'}$  annule simultanément  $\sigma_1^2$  et  $\sigma_2^2$ , avec  $J_1 \cup J_2 \subset J' \subset J$  ;

$\exists X$  différent de  $\omega_J$  ssi  $J_1 \cup J_2 \subset J$  au sens strict.

-  $J_1 \cap J_2$  vide : on a les solutions supplémentaires

$$X = \gamma_1 \omega_{J_1'} + \gamma_2 \omega_{J_2'} + R^{J - J_1' - J_2'}$$

pour  $J_1 \subset J_1', J_2 \subset J_2', J_1' \cap J_2' = \emptyset \subset J$  ;

ces nouvelles solutions sont évidemment différentes de  $\omega_J$ .

2) Etude de  $\sigma_{i_n}^2 = \sum F_i \sigma_i^2$ .

$\sigma_{i_n}^2$  est nulle ssi chaque  $F_i \sigma_i^2$  est nul.

On pose  $J_{F_i} = \{i : F_i > 0\}$  ; donc  $\sigma_{i_n}^2 = 0$  ssi  $\sigma_i^2 = 0 \forall i \in J_{F_i}$ .

a) Premières solutions

$u_i \in R^{J^i}$  sans aucune coordonnée nulle dans  $R^{J^i}$ ,  $J = \bigcup_{i \in J_{F_I}} J^i$   
 alors tout  $X = \gamma \omega_J + R^{J-\gamma}$  annule simultanément les  $\sigma_i^2$   
 $i \in J_{F_I}$ ,  $\exists X \neq \omega_J$  ssi  $J \subset J$  au sens strict. Ces solutions annulent  
 également  $\sigma^2$ .

b) Autres solutions

PROPRIÉTÉ  $\exists$  des vecteurs  $X$  différents de  $\gamma \omega_J + R^{J-\gamma}$   
 qui annulent simultanément les  $\sigma_i^2$   $i \in J_{F_I}$  ssi il existe une par-  
 tition  $J_1, \dots, J_h$  de  $J$  telle que tout  $u_i \in R^{J_h}$  et un seul.

En effet si cette partition existe tout  $X = \sum \alpha_h \omega_{J_h} + R^{J-\gamma}$   
 annule tous les  $\sigma_i^2$  de manière évidente.

Réciproquement on démontre que cette partition  $J_h$  existe en rai-  
 sonnant par l'absurde:

Si elle n'existe pas on peut trouver  $u_1, \dots, u_k$  appartenant à  
 $R^{J^1}, \dots, R^{J^k}$  tels que  $\bigcup J^k = J$  et  $J^k \cap J^{k+1}$  non vide ;  
 par conséquent aucun vecteur différent de  $\gamma \omega_J + R^{J-\gamma}$  ne peut annuler  
 simultanément les  $\sigma_i^2$ . ■

Conséquences : i) la partition  $J_1, \dots, J_h$  induit une partition

$$I_1, \dots, I_h, \dots, I = J_{F_I}, \quad \text{sur } \{1, \dots, I\}$$

comme suit

$$I_h = \{i : u_i \in R^{J_h}\}, \quad J_{F_I} = \bigcup I_h.$$

- ii) si tous les  $F_i$  sont positifs, cas de l'optimal scaling classique,  $J_{F_I} \equiv I$ ,  $\sigma_i^2$  ne peut être annulé par  $X \neq \omega_J$  que si le tableau  $F$  est décomposable en une diagonale de blocs  $F_h$  non nuls ; les solutions sont de la forme  $X = \sum_h \alpha_h \omega_{J_h}$ , centrées ssi  $\sum_h \text{card } I_h \times \alpha_h = 0$ .
- iii) on a toutes les solutions de  $\sigma_i^2 = 0$  à l'aide des  $F_I$  tels que le tableau  $F$  réduit aux  $J_{F_I}$  lignes (en nombre  $\geq 2$ ) et  $J$  colonnes puisse se mettre sous la forme

de  $J - q$  colonnes remplies de zéros sur les indices  $\mathcal{I}_F$ , et le restant sous la forme d'une diagonale de blocs non nuls. Ces solutions n'annulent pas  $\sigma^2$  ssi on a une véritable diagonale, c'est à dire 2 partitions  $\mathcal{I}_R$  et  $\mathcal{J}_R$  avec  $H \geq 2$ .

### Annexe 2 - Corrélation maximale et codage optimal

Soit  $F_{ij}$  la loi conjointe de 2 variables aléatoires  $\xi$  et  $\eta$  qui prennent les valeurs  $\xi_j$  et  $\eta_i$ ; ces deux variables ont une moyenne, une variance et un coefficient de corrélation.

Le problème de la corrélation maximale de Hirschfeld et de Renyi (réf. 13) consiste à expliciter deux applications  $X(\xi)$  et  $Y(\eta)$  telles que l'on ait

$$\text{cor} (X(\xi), Y(\eta)) = \max_{f, g} \text{cor} (f(\xi), g(\eta)) .$$

On pose  $X$  le vecteur des  $X_j = X(\xi_j)$ , et  $Y$  le vecteur des  $Y_i = Y(\eta_i)$ .

Soit  $S$  cette corrélation maximale, en suivant Renyi,  $X$  et  $Y$  sont solutions des équations :

$$E(E(X/\eta) / \xi) = S^2 X$$

$$E(E(Y/\xi) / \eta) = S^2 Y$$

pour les applications  $X, Y$  centrées normées.

Avec les notations on a ici

$$E(X/\eta) = D_\eta^{-1} F X$$

$$E(Y/\xi) = D_\xi^{-1} F' Y$$

$$E(X) = \omega_\xi' F X = 0$$

$$E(Y) = \omega'_J F' Y = 0$$

$$E(X^2) = \omega'_I F X^2 = 1$$

$$E(Y^2) = \omega'_J F' Y^2 = 1$$

d'où les équations :

$$D_J^{-1} F' D_I^{-1} F X = S^2 X \quad ,$$

$$D_I^{-1} F D_J^{-1} F' Y = S^2 Y \quad .$$

$X$  et  $Y$  vérifient les mêmes équations que dans le codage optimal et l'AFC ; compte tenu de la solution de centrage, les solutions évidentes  $\omega_I$  et  $\omega_J$  sont exclues, et l'on obtient les mêmes solutions que pour le codage optimal.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] ADAMS E., MESSICK S., "An axiomatic formulation and generalisation of successive intervals scaling", *Psychometrika*, 23 n°4 (1958), 355-368.
- [2] BALLIF J.F., LERESCHE G., "Paramétrisation et analyse des correspondances", *Mathématique et Sciences Humaines*, 65 (1979), 23-50.
- [3] BENZECRI J.P., *L'analyse des données*, Paris, Dunod, 1973.

- [4] COOMBS C.H., DAWES R.M., TVERSKY A., *Mathematical psychology*, Englewood cliffs New-Jersey, Prentice-Hall Inc, 1970.  
Traduction française : *Psychologie mathématique*, Paris, Presses Universitaires de France, 1975.
- [5] GREEN B.F., "Attitude measurement", in LINDZEY : *Handbook of social psychology*, tome 1, 335-369, Addison-Wesley, 1953.
- [6] LASSIERE A., *The environmental evaluation of transport plans*, London, Department of the Environment, 1976.
- [7] LEBART L., MORINEAU A., TABARD N., *Techniques de la description statistique*, Paris, Dunod, 1977.
- [8] MATALON B., *L'analyse hiérarchique*, Paris, Gauthier-Villars, Mouton, 1965.
- [9] MAURIN M., *Les relations entre la gêne et le bruit*, rapport IRT/CERNE, 1980.
- [10] MAURIN M., GENSAC B., *An another least-square solution for the successive intervals following ADAMS and MESSICK*, Third european meeting of the psychometric society, Jouy en Josas 1983, rapport IRT/CERNE, 1982.
- [11] NISHISATO S., ARRI P.S., "Non linear programming approach to optimal scaling of partially ordered categories", *Psychometrika*, vol 40 n°4 (1975), 525-548.
- [12] PALLU DE LA BARRIERE R., *Cours d'automatique théorique*, Paris, Dunod, 1966.

- [ 13 ] RENYI A., "On measures of dependance", *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, vol 10 (1959), 441-451.
- [ 14 ] SAPORTA G., *Liaisons entre plusieurs ensembles de variables et codage des données qualitatives*, thèse de 3<sup>o</sup> cycle, Paris VI, 1975.
- [ 15 ] SUPPES P., ZINNES J.L., "Basic Measurement theory" in BUSH, LUCE, GALANTER : *Handbook of Math. Psychology*, vol 1, 1-76, New York, John Wiley and Sons, 1963.
- [ 16 ] TENENHAUS M., "Analyse canonique de deux cônes polyédriques convexes : application à la régression qualitative", *cahier de recherche du Centre d'Etudes Supérieures des Affaires*, n°188, 1981.
- [ 17 ] TENENHAUS M., YOUNG F.W., "Multiple correspondance analysis and the principal components of qualitative data", soumis à publication.
- [ 18 ] TORGERSON W.S., *Theory and methods of scaling*, New York, John Wiley and Sons, 1958.
- [ 19 ] VALLET M., MAURIN M., PAGE M.A., FAVRE B., PACHIAUDI G., "Annoyance from and habituation to road traffic noise from urban expressways", *Journal of Sound and Vibration*, vol 60 (1978), 423-440.