

I. C. LERMAN

**Interprétation non-linéaire d'un coefficient d'association entre modalités d'une juxtaposition de tables de contingence**

*Mathématiques et sciences humaines*, tome 83 (1983), p. 5-30

[http://www.numdam.org/item?id=MSH\\_1983\\_\\_83\\_\\_5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSH_1983__83__5_0)

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

INTERPRETATION NON-LINEAIRE D'UN COEFFICIENT D'ASSOCIATION  
ENTRE MODALITES D'UNE JUXTAPOSITION DE TABLES DE CONTINGENCE

I.C. LERMAN \*

I. INTRODUCTION

La donnée à laquelle nous nous intéresserons plus particulièrement ici est définie par une juxtaposition "horizontale" de tables de contingence, indexée par un ensemble de la forme

$$I \times (J^{(1)} \cup J^{(2)} \cup \dots \cup J^{(\ell)} \cup \dots \cup J^{(L)}), \quad (1)$$

où  $I$  (resp.  $J^{(\ell)}, 1 \leq \ell \leq L$ ) se trouve défini par l'ensemble des modalités d'une variable-partition ; en d'autres termes,  $I$  et chaque  $J^{(\ell)}$  est un système exhaustif de modalités exclusives.

On considère le problème de la comparaison, relativement à  $I$ , des éléments deux à deux de l'ensemble suivant  $J$  des modalités :

$$J = J^{(1)} \cup J^{(2)} \cup \dots \cup J^{(\ell)} \cup \dots \cup J^{(L)} \quad (2)$$

Alors que deux modalités  $j$  et  $j'$  d'un même  $J^{(\ell)}$  sont exclusives, il n'en est généralement pas de même de deux modalités  $j_{\ell}$  et  $j_{\ell'}$ , appartenant respectivement à deux ensembles distincts  $J^{(\ell)}$  et  $J^{(\ell')}$  ( $\ell \neq \ell'$ ). Un aspect de notre préoccupation qui a conduit à cet article consiste précisément à justifier l'usage d'un même coefficient d'association aussi bien pour comparer  $j_{\ell}$  et  $j_{\ell'}$  que pour comparer  $j_{\ell}$  et  $j_{\ell}$ , et ce, à travers  $I$ .

Il est inutile d'insister sur l'importance pratique de la structure des données qui nous concerne ici et qu'on rencontre fréquemment ; donnons quelques exemples :

---

\* IRISA (L.A. 227) - Université de Rennes I - Campus de Beaulieu - 35042 Rennes Cédex.

- En Géographie Sociale où relativement au problème de l'appréhension de la politique de construction de logements pendant une certaine période dans un département donné, il y a lieu de construire une typologie avec ou sans contrainte de contiguïté spatiale [A. PROD'HOMME(1980)] de l'ensemble des communes du département à travers différentes variables qualitatives et dont certaines peuvent dès le départ être croisées. Signalons quelques-unes de ces variables :

"caractère individuel ou collectif du logement", "HLM, logement aidé ou non-aidé par les pouvoirs communaux", "résidence principale ou secondaire", "catégorie socio-professionnelle de l'habitant", "nature du sol (bâti, bois et landes, autre)" etc..

On remarquera que l'unité de base permettant de charger une même case n'est pas nécessairement la même d'une table de contingence à une autre ; en effet, il peut s'agir d'un nombre de logements ayant une certaine caractéristique dans l'un des cas, d'un nombre d'individus appartenant à une certaine catégorie socio-professionnelle dans un deuxième cas, d'une surface de sol réservée à une certaine fonction dans un troisième cas, etc..

- En Economie Rurale où on doit déterminer l'évolution globale de la structure de la production agricole de l'ensemble des départements Français ces dix dernières années. On distingue 14 types de productions qui sont mesurées par rapport à une unité de monnaie "normalisée" par rapport au temps. Chaque année définira un tableau assimilable à une table de contingence répartissant la masse monétaire produite entre d'une part les différents départements (en ligne) et les 14 types de production (en colonne).

- En Linguistique : l'ensemble des lignes est indexé par un ensemble V de verbes du Français et l'ensemble des colonnes par un ensemble T de transformations grammaticales, une même table de contingence correspond à un texte et le contenu d'une des cases (v,t) du tableau est le nombre de fois où -dans le texte- le verbe v admet la transformation grammaticale t.

D'autre part, lorsque la partition indexant les lignes se réduit à la partition discrète, I représente l'ensemble des individus ou objets et le tableau des données est dans ce cas communément appelé "tableau disjonctif complet" ; on le rencontre comme résultat d'un questionnaire.

En commençant par considérer une seule table de contingence  $I \times J$ , I.C. Lerman et B. Tallur [TALLUR(1978), LERMAN et TALLUR(1980)] ont défini un indice d'association entre éléments de  $J$  ayant une forme corrélatrice.

Cette définition prenait d'une part en compte la représentation euclidienne de  $I$  à travers  $J$  telle qu'elle est fournie dans l'analyse des correspondances et d'autre part, le fait que l'application de notre démarche de construction d'un indice d'association entre variables, conduit lorsque ces dernières sont quantitatives, à un facteur multiplicatif constant près, au coefficient de corrélation entre les deux variables.

Dans cette démarche que nous rappellerons de façon plus précise ci-dessous, on adopte une représentation ensembliste des variables et on introduit une hypothèse d'absence de lien par rapport à laquelle on se réfère. L'objet principal de ce travail est de montrer que cette seule démarche de construction permet, sans aucune référence à une représentation euclidienne, de retrouver le même type d'indice et de le généraliser très naturellement au cas où  $J$  est de la forme (2) ci-dessus. Cette généralisation nous permettra de "comprendre", pour ce qui concerne la comparaison entre deux modalités non-exclusives, la différence entre un coefficient d'association totale et d'association relative à l'ensemble  $I$  des modalités d'une variable qualitative nominale.

## II. LES DEUX REPRESENTATIONS DE LA CORRELATION

Pour la comparaison de deux variables d'un même type, nous allons considérer les deux cas les plus simples ; le premier est celui où les deux variables sont quantitatives numériques et le second est celui où il s'agit d'attributs de description.

### 1. Cas où les deux variables sont numériques

Désignons par  $(v,w)$  les deux variables et par  $\{x_i/1 \leq i \leq n\}$  (resp.  $\{y_i/1 \leq i \leq n\}$ ) la suite des valeurs de la variable  $v$  (resp.  $w$ ) sur la suite des individus. Le coefficient de corrélation entre les deux variables

$$\rho(v,w) = \frac{\text{moy} \left[ \frac{(v - \text{moy}(v))(w - \text{moy}(w))}{\sqrt{\text{var}(v)\text{var}(w)}} \right]}{\sqrt{\text{var}(v)\text{var}(w)}}, \quad (1)$$

où moy.(resp.var.) désigne la moyenne (resp. variance) sur l'ensemble que nous noterons  $I$  ces individus, est interprété selon le point de vue géométrique en

analyse des données, comme le cosinus de l'angle de deux vecteurs.

De façon précise si  $X$  (resp.  $Y$ ) désigne le vecteur de  $R^n$  dont la suite des composantes est  $(x_i/1 \leq i \leq n)$  (resp.  $(y_i/1 \leq i \leq n)$ ) et si  $1$  désigne le vecteur  $R^n$  dont toutes les composantes sont égales à 1,  $\rho(v,w)$  est le cosinus de l'angle des deux vecteurs suivants :

$$\begin{aligned} X' &= X - \frac{1}{n} \langle X, 1 \rangle 1 \\ Y' &= Y - \frac{1}{n} \langle Y, 1 \rangle 1 \end{aligned} \quad (2),$$

où  $\langle X, 1 \rangle$  désigne le produit scalaire ordinaire, résultant des projections orthogonales des vecteurs  $X$  et  $Y$  sur l'hyperplan perpendiculaire au vecteur dont toutes les composantes sont égales à 1.

Une des origines de notre démarche dans l'évaluation des proximités entre variables discrètes et, plus généralement, entre structures statistiques de même type, est que l'indice de corrélation  $\rho(v,w)$  peut, au coefficient  $1/\sqrt{n-1}$  près, être obtenu de la manière suivante.

On commence par introduire un indice "brut" d'association entre les deux variables  $v$  et  $w$  :

$$s(v,w) = \sum_{1 \leq i \leq n} v(i)w(i) \quad (3)$$

On considère ensuite une "hypothèse d'absence de liaison, (h.a.l.) où on introduit une permutation aléatoire  $\sigma$  dans l'ensemble  $G_n$ , muni d'une probabilité uniformément répartie, des  $n!$  permutations sur  $(1,2,\dots,i,\dots,n)$ .

L'h.a.l. peut dans ce cas avoir une forme unilatérale en fixant  $v$  (resp.  $w$ ) et en associant à  $w$  (resp.  $v$ ) une variable aléatoire (v.a.)  $w'$  (resp.  $v'$ ) pour laquelle

$$\begin{aligned} w'(i) &= w[\sigma(i)] \quad \text{pour tout } i=1,2,\dots,n \\ (\text{resp. } v'(i) &= v[\sigma(i)] \quad \text{pour tout } i=1,2,\dots,n). \end{aligned}$$

A  $s(v,w)$  se trouvent associées les deux v.a. duales et de même loi asymptotiquement normale [WALD & WOLFOWITZ(1944), NOETHER(1949), HAJEK(1961)], suivantes :

$$S(v, w') = \sum_{1 \leq i \leq n} v(i)w[\sigma(i)]$$

et

$$S(v', w) = \sum_{1 \leq i \leq n} v[\sigma(i)]w(i)$$
(4)

La moyenne et la variance communes sont respectivement égales à  $n \text{ moy}(v)\text{moy}(w)$  et  $\frac{n^2}{(n-1)} \text{var}(v)\text{var}(w)$  ; (5)

de sorte que

$$\frac{s(v, w) - \rho(S)}{\text{var}(S)} = \sqrt{n-1} \rho(v, w).$$
(6)

où  $S$  est l'une des deux v.a. (4).

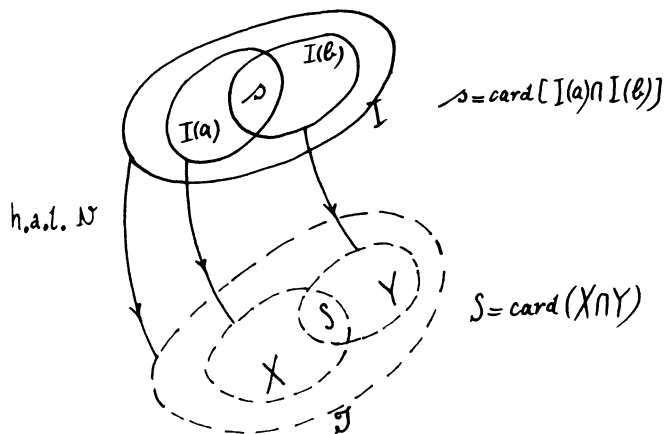
## 2. Cas où les deux variables sont des attributs

Désignons par  $(a, b)$  le couple d'attributs descriptifs à comparer, par  $(I(a), I(b))$  le couple de parties de  $I$ , où  $I(a)$  (resp.  $I(b)$ ) est l'ensemble des individus qui possèdent l'attribut  $a$  (resp.  $b$ ) et par  $(\varepsilon(a), \varepsilon(b))$  le couple de vecteurs logiques indiquant respectivement  $I(a)$  et  $I(b)$  :

$\varepsilon(a) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n)$  et  $\varepsilon(b) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_i, \dots, \beta_n)$ , où  $\alpha_i$  (resp.  $\beta_i$ ) est égal à 0 ou 1 selon que l'attribut  $a$  (resp.  $b$ ) est absent ou présent chez l'individu  $i$ ,  $i \in I$ .

Le point de vue géométrique conduit à représenter l'attribut  $a$  (resp.  $b$ ) par le point de  $\mathbb{R}^n$  dont la suite des composantes est définie par  $\alpha_i$  (resp.  $\beta_i$ ),  $1 \leq i \leq n$  ; et à opérer comme dans le cas où les variables sont numériques.

Relativement à notre point de vue de représentation ensembliste des variables, les attributs  $a$  et  $b$  sont figurés par deux points de l'ensemble  $\mathcal{P}(I)$  des parties de  $I$ . La situation peut être naïvement schématisée comme suit



Après avoir introduit l'indice brut  $s = \text{card}[I(a) \cap I(b)]$ , on considère une h.a.l.  $N$  qui associe au triplet  $\{I ; I(a), I(b) / I(a) \subset I, I(b) \subset I\}$ , un triplet d'ensembles aléatoires  $\{\mathcal{J} ; X, Y / X \subset \mathcal{J}, Y \subset \mathcal{J}\}$ .

L'h.a.l. doit d'une "certaine façon" respecter les caractéristiques cardinales de  $I(a), I(b)$  et  $I$  et à cet égard, nous avons pu dégager trois formes fondamentales de l'h.a.l.  $N : N_1, N_2$  et  $N_3$  [LERMAN(1981a) Chap.2].

Pour  $N_1$ ,  $\mathcal{J} = I$  et  $X$  (resp.  $Y$ ) est un élément aléatoire dans l'ensemble  $\mathcal{P}_{n(a)}(I)$  (resp.  $\mathcal{P}_{n(b)}(I)$ ), muni d'une probabilité uniformément répartie, des parties de  $I$  de même cardinal  $n(a) = \text{card}I(a)$  (resp.  $n(b) = \text{card}(I(b))$ ). D'autre part,  $X$  et  $Y$  sont indépendants. Dans ces conditions, la v.a.  $S = \text{card}(X \cap Y)$  est hypergéométrique de moyenne  $n(a)n(b)/n$  et de variance  $n(a)n(\bar{a})n(b)n(\bar{b})/n^2(n-1)$ . L'indice centré réduit est, au coefficient  $\sqrt{n-1}$  près, l'indice d'association de K. Pearson.

Pour  $N_2$ ,  $\mathcal{J} = I$ . Le choix de  $X$  (resp.  $Y$ ) se fait selon un modèle aléatoire à deux pas :

- le premier consiste dans le choix d'un niveau  $k$  (resp.  $h$ ) de  $\mathcal{P}(I)$  avec une probabilité binomiale

$$\binom{n}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k}, \text{ où } \alpha = n(a)/n \text{ et } 0 \leq k \leq n,$$

$$\text{(resp. } \binom{n}{h} \beta^h (1-\beta)^{n-h}, \text{ où } \beta = n(b)/n \text{ et } 0 \leq h \leq n).$$

- le deuxième pas consiste dans le choix uniformément au hasard d'un élément qui est un  $k$ -sous ensemble (resp.  $h$ -sous ensemble) de  $I$ , à ce niveau.

De plus  $X$  et  $Y$  sont indépendants. Dans ces conditions, on démontre que  $S = \text{card}(X \cap Y)$  est une v.a. binomiale de paramètre  $\pi = \alpha\beta$ . La moyenne est donc la même que dans le cas de l'h.a.l.  $N_1$ , mais sa variance est égale à  $n\pi(1-\pi)$ .

Pour  $N_3$ , le choix de  $X$  (resp.  $Y$ ) se fait selon un modèle aléatoire à trois pas :

- le premier consiste à associer à  $I$  un ensemble aléatoire  $\mathcal{J}$ , mais où l'aléa ne concerne que la cardinalité de  $\mathcal{J}$ . On suppose que  $v = \text{card}(\mathcal{J})$  est une v.a. de Poisson de paramètre  $n = \text{card}(I)$  :

$$\text{Pr}\{v=\ell\} = \frac{n^\ell}{\ell!} e^{-n}$$

- pour  $\mathcal{J} = \mathbb{I}_0$  fixé, les deux autres cas sont analogues à ceux de  $N_2$ . Les parties aléatoires  $X$  et  $Y$  étant indépendantes, on démontre que la v.a.  $S = \text{card}(X \cap Y)$  suit une loi de Poisson de paramètre  $n(a)n(b)/n$ . On voit que la moyenne de  $S$  est la même que dans les deux cas précédents ; mais la variance devient ici égale à  $n(a)n(b)/n$ .

Le deuxième point de vue de représentation ensembliste des variables de description se généralise de façon naturelle pour la comparaison de deux variables qualitatives de toutes sortes [LERMAN(1981a) Chap.2]. Nous allons montrer qu'il suffit pour la comparaison de lignes ou colonnes d'une juxtaposition "horizontale" de tableaux de contingence (cf.(1) §I).

### III. CAS D'UNE JUXTAPOSITION DE TABLES DE CONTINGENCE

#### III.1. Cas d'un seul tableau de contingence

##### 1. Représentation géométrique

Soit le tableau de contingence indexé par  $I \times J$  :

$$\{k_{ij} / (i,j) \in I \times J\} \quad (1)$$

où  $k_{ij}$  désigne le nombre d'individus possédant les modalités  $i$  de  $I$  et  $j$  de  $J$ . On rappelle les notations :

$$\begin{aligned} k_{i.} &= \sum \{k_{ij} / j \in J\}, \quad k_{.j} = \sum \{k_{ij} / i \in I\} \\ k_{..} &= \sum \{k_{i.} / i \in I\} = \sum \{k_{.j} / j \in J\} \end{aligned} \quad (2)$$

Nous allons commencer par rappeler le principe de la comparaison de deux modalités  $j$  et  $j'$  de  $J$ , qui repose sur la représentation euclidienne de  $I$  à travers  $J$ . Cette représentation est fournie dans le cadre de l'analyse des correspondances où on associe à chaque  $i$  de  $I$ , le point de  $R^{|J|}$  dont la suite des coordonnées est  $\{k_{ij}/k_{i.} / j \in J\}$  ; il s'agit du "profil" de  $i$  à travers  $J$ .

Dès lors, chaque  $j$  de  $J$  se trouve assimilé à une variable quantitative -puisque'elle est représentée par une forme linéaire coordonnée- dont la valeur sur le  $i$ -ème élément est égale à  $(k_{ij}/k_{i.})$ . D'autre part, l'élément  $i$ , pour tout  $i$  de  $I$ , est affecté du poids  $k_{i.}/k_{..}$ .

Dans ces conditions, le coefficient de corrélation entre  $j$  et  $j'$  de  $J$ , se met sous la forme



$$\rho(j, j') = \frac{\sum_{i \in I} \left\{ \frac{k_{i.}}{k_{..}} \left( \frac{k_{ij}}{k_{i.}} - \frac{k_{.j}}{k_{..}} \right) \left( \frac{k_{ij'}}{k_{i.}} - \frac{k_{.j'}}{k_{..}} \right) \right\}}{\sqrt{\sum_i \frac{k_{i.}}{k_{..}} \left( \frac{k_{ij}}{k_{i.}} - \frac{k_{.j}}{k_{..}} \right)^2 \sum_i \frac{k_{i.}}{k_{..}} \left( \frac{k_{ij'}}{k_{i.}} - \frac{k_{.j'}}{k_{..}} \right)^2}}, \quad (3)$$

ou encore, en introduisant les proportions

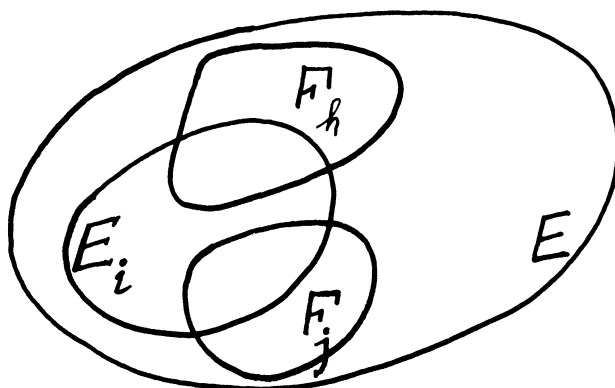
$(\forall (i, j) \in I \times J), p_{i.} = k_{i.}/k_{..}, p_{.j} = k_{.j}/k_{..}$  et  $f_j^i = k_{ij}/k_{i.},$

$$\rho(i, j') = \frac{\sum_{i \in I} \{ p_{i.} (f_j^i - p_{.j}) (f_{j'}^i - p_{.j'}) / i \in I \}}{\sqrt{\sum_i p_{i.} (f_j^i - p_{.j})^2 \sum_i p_{i.} (f_{j'}^i - p_{.j'})^2}} \quad (3')$$

## 2. Représentation ensembliste

Désignons par  $E$  l'ensemble des individus ou objets et par  $\{E_i / i \in I\}$  (resp.  $\{F_j / j \in J\}$ ) la partition sur  $E$  définie par la variable qualitative nominale dont les modalités indexent les lignes (resp. colonnes) du tableau de contingence.

Si  $j$  et  $h$  sont les deux modalités exclusives de  $J$  à comparer, relativement à  $I$ , la situation peut être, relativement à un même  $i$ , schématisée comme suit :



### 2.1. Indice brut d'association

Relativement à la classe  $E_i$ , le lien brut entre les deux parties disjointes  $F_j$  et  $F_h$  sera mesuré par

$$\begin{aligned} \varepsilon(j, h / i) &= \frac{n(i \wedge j) n(i \wedge h)}{n(i)} \\ &= n(i) \frac{n(i \wedge j)}{n(i)} \times \frac{n(i \wedge h)}{n(i)} \end{aligned} \quad (4)$$

Dans ces conditions, le lien brut entre  $F_j$  et  $F_h$  relativement à la partition  $\{E_i / i \in I\}$ , se trouve défini par

$$\sum \left\{ \frac{n(i \wedge j) n(i \wedge h)}{n(i)} / i \in I \right\} = \sum \left\{ n(i) \frac{n(i \wedge j)}{n(i)} \times \frac{n(i \wedge h)}{n(i)} / i \in I \right\}, \quad (5)$$

où nous notons ici  $n(i) = \text{card}(E_i)$ ,  $n(i \wedge j) = k_{ij} = \text{card}(E_i \cap F_j)$  (resp.  $n(i \wedge h) = k_{ih} = \text{card}(E_i \cap F_h)$ ).

## 2.2. L'hypothèse d'absence de liaison (h.a.l.)

Pour un même  $i$  l'h.a.l. entre  $j$  et  $h$  sera relative à la classe  $E_i$ ; son rôle est de détruire le lien entre  $F_j$  ou (non exclusif)  $F_h$  et  $E_i$ ,  $1 \leq i \leq |I|$ .

Une façon naturelle de procéder, conformément à une h.a.l. de même nature que  $N_1$  (cf. § II.2.), consiste à fixer  $F_j$  et  $F_h$  et à associer à la partition  $\{E_i / 1 \leq i \leq |I|\}$ , une partition aléatoire  $\{X_i / 1 \leq i \leq |I|\}$  dans l'ensemble  $\mathcal{P}(n; t)$ , muni d'une probabilité uniforme, des partitions en classes étiquetées de même type  $t = [n(1), n(2), \dots, n(i), \dots, n(I)]$ .

Nous désignerons par  $\varepsilon_i, \xi_i, \phi_j$  et  $\phi_h$  les fonctions indicatrices respectives de  $E_i, X_i, F_j$  et  $F_h$ ,  $1 \leq i \leq |I|$ .

La v.a. associée à l'indice brut (5) peut dans ces conditions se mettre sous la forme

$$\sum \left\{ \frac{1}{n(i)} \left[ \sum_{x \in E} \varepsilon_i(x) \phi_j(x) \right] \left[ \sum_{y \in E} \varepsilon_i(y) \phi_h(y) \right] / 1 \leq i \leq |I| \right\}$$

$$= \sum \left\{ \frac{1}{n(i)} \left( \sum \{ \varepsilon_i(x) \varepsilon_i(y) \phi_j(x) \phi_h(y) / (x, y) \in E \times E \} \right) / 1 \leq i \leq |I| \right\} \quad (6)$$

L'indice brut (5) et la v.a. (6) peuvent respectivement être notés  $s(j, h/P)$  et  $S(j, h/P)$ , où  $P$  désigne la partition  $\{E_i / i \in I\}$ .

Nous allons calculer l'espérance mathématique et la variance de la v.a.  $S(j, h/P)$ .

## 2.3. Moyenne de la v.a. $S(j, h/P)$

On peut remarquer que la somme la plus interne de (6) se réduit à l'expression suivante

$$\mathbb{E}\{\xi_i(x)\xi_i(y)\phi_j(x)\phi_h(y)/(x,y)\in F_j \times F_h\} \quad (7)$$

De plus, pour  $x \neq y$ , on a

$$\mathcal{C}(\xi_i(x)\xi_i(y)) = \frac{n(i)[n(i)-1]}{n(n-1)}; \quad (8)$$

il s'agit en effet de la proportion  $\binom{n-2}{n(i)-2} / \binom{n}{n(i)}$  de parties  $X_i$  qui contiennent la paire d'objets  $\{x,y\}$ .

Dans ces conditions, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{C}[S(j,h/P)] &= \sum_{1 \leq i \leq |I|} \left\{ \frac{1}{n(i)} \times \frac{n(i)[n(i)-1]}{n(n-1)} \times n(j)n(h) \right\} \\ &= \frac{(n-|I|)}{(n-1)} \times \frac{n(j)n(h)}{n} \quad (9) \end{aligned}$$

Il ne faut pas s'étonner de constater que cette moyenne est nulle si la partition  $P$  est "discrète" ; en effet, dans ce cas, l'indice brut qui se réduit à  $n(j \wedge h)$  est lui-même nul puisque  $j$  et  $h$  sont deux modalités exclusives. Généralement, pour un tableau de contingence courant,  $|I|$  est très petit devant  $n$  ; de sorte que l'expression (9) peut être approchée par  $n(j)n(h)/n$ . En admettant cette approximation, on peut se rendre compte que le numérateur du coefficient (3) ci-dessus est, au facteur  $1/n$  près, l'indice centré

$$\sum_{1 \leq i \leq |I|} \frac{n(i \wedge j)n(i \wedge h)}{n(i)} - \frac{n(j)n(h)}{n} \quad (10)$$

Nous allons à présent procéder au calcul de la variance de la v.a.  $S(j,h/P)$ .

#### 2.4. Variance de la v.a. $S(j,h/P)$

Nous allons commencer par calculer le moment absolu d'ordre 2 de la v.a. (6) dont le carré se met sous la forme

$$\begin{aligned} &\sum_{1 \leq i \leq |I|} \left\{ \frac{1}{n(i)^2} (\sum_{\xi_i(x)\xi_i(y)/(x,y)\in F_j \times F_h})^2 \right\} \\ &+ 2 \sum_{1 \leq i < i' \leq |I|} \left\{ \frac{1}{n(i)n(i')} (\sum_{\xi_i(x)\xi_i(y)/(x,y)\in F_j \times F_h}) \right. \\ &\quad \left. \times (\sum_{\xi_{i'}(x')\xi_{i'}(y')/(x',y')\in F_j \times F_h}) \right\}. \quad (11) \end{aligned}$$

La structure d'un couple de couples d'objets  $((x,y),(x',y'))$  se trouve définie relativement à la répétition de composantes du premier couple dans le second couple, dans la même position ou non. Des lettres différentes indiquant des objets distincts, cette structure revêt, dans le cas où les deux composantes d'un même couple sont distincts, les sept formes suivantes :

$$\begin{aligned}
 &((x,y),(x,y)), ((x,y),(y,x)), \\
 &((x,y),(x,t)), ((x,y),(z,x)), \\
 &((x,y),(z,y)), ((x,y),(y,t)), \qquad (12) \\
 &((x,y),(z,t)).
 \end{aligned}$$

Comme d'usage [LERMAN(1981a chap.2) et (1981b)], nous désignerons par

$\Delta$	l'ensemble des couples de couples de la forme $((x,y),(x,y))$ ,	
$\bar{\Delta}$	$((x,y),(y,x))$ ,	
$G_1$	$((x,y),(x,t))$ ,	
$G'_1$	$((x,y),(z,x))$ ,	
$G_2$	$((x,y),(z,y))$ ,	
$G'_2$	$((x,y),(y,t))$ et	
$H$	$((x,y),(z,t))$ .	

Le calcul (11) va devoir se décomposer conformément à la partition  $\{\Delta, \bar{\Delta}, G_1, G'_1, G_2, G'_2, H\}$  de  $E^{[2]} \times E^{[2]}$  où  $E^{[2]}$  est l'ensemble des couples d'objets distincts. Nous désignerons par

$$\begin{aligned}
 D &= \Delta \cap [(F_j \times F_h) \times (F_j \times F_h)] \text{ de cardinal } n(j)n(h), \\
 B_1 &= G_1 \cap [(F_j \times F_h) \times (F_j \times F_h)] \text{ de cardinal } n(j)n(h) [n(h)-1], \\
 B_2 &= G_2 \cap [(F_j \times F_h) \times (F_j \times F_h)] \text{ " " } n(j) [n(j)-1]n(h) \text{ et} \\
 C &= H \cap [(F_j \times F_h) \times (F_j \times F_h)] \text{ " " } n(j) [n(j)-1]n(h) [n(h)-1].
 \end{aligned}$$

Chacune des intersections de  $(F_j \times F_h) \times (F_j \times F_h)$  avec  $\bar{\Delta}$ ,  $G'_1$  et  $G'_2$  est vide ; d'ailleurs, on peut vérifier que la somme des cardinaux des ensembles  $D$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  et  $C$ , est bien égale à  $[n(j)n(h)]^2$ .

2.4.1. Calcul de l'espérance mathématique de

$$\left| \sum \{ \xi_i(x) \xi_i(y) / (x,y) \in F_j \times F_h \} \right|^2$$

Nous allons commencer par décomposer, conformément à la partition qu'on vient de définir de  $(F_j \times F_h) \times (F_j \times F_h)$ , le calcul de l'expression en titre de ce sous paragraphe. Cette dernière prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \sum \{ \xi_i(x) \xi_i(y) / (x,y) \in F_j \times F_h \} \\ + & \sum \{ \xi_i(x) \xi_i(y) \xi_i(t) / ((x,y), (x,t)) \in B_1 \} \\ + & \sum \{ \xi_i(x) \xi_i(y) \xi_i(z) / ((x,y), (z,y)) \in B_2 \} \\ + & \sum \{ \xi_i(x) \xi_i(y) \xi_i(z) \xi_i(t) / ((x,y), (z,t)) \in C \}. \quad (13) \end{aligned}$$

Nous allons calculer l'espérance mathématique du terme courant de chacune des sommes précédentes.

$$\alpha \cdot \sum \{ \xi_i(x) \xi_i(y) / (x,y) \in F_j \times F_h \}$$

Il s'agit de la proportion de parties  $X_i$  de cardinal  $n(i)$ , qui contiennent les deux objets  $x$  et  $y$ . Cette proportion est égale à

$$\frac{n(i) [n(i)-1]}{n(n-1)} \quad (14)$$

$$\beta_1 \cdot \sum \{ \xi_i(x) \xi_i(y) \xi_i(t) / ((x,y), (x,t)) \in B_1 \}$$

Il s'agit de la proportion de parties  $X_i$  de cardinal  $n(i)$ , qui contiennent les trois objets  $x, y$  et  $t$ . Cette proportion est égale à

$$\frac{n(i) [n(i)-1] [n(i)-2]}{n(n-1)(n-2)} \quad (15)$$

$$\beta_2 \cdot \sum \{ \xi_i(x) \xi_i(y) \xi_i(z) / ((x,y), (z,y)) \in B_2 \}$$

Il s'agit de la même proportion que celle (15) ci-dessus.

$$\gamma \cdot \sum \{ \xi_i(x) \xi_i(y) \xi_i(z) \xi_i(t) / ((x,y), (z,t)) \in C \}$$

C'est la proportion de parties  $X_i$  de cardinal  $n(i)$  qui incluent les quatre objets  $x, y, z$  et  $t$  ; elle est égale à

$$\frac{n(i) [n(i)-1] [n(i)-2] [n(i)-3]}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \quad (16)$$

Ainsi l'espérance mathématique de l'expression en titre de ce sous-  
paragraphe 2.4.1. est égale à

$$\begin{aligned}
& n(i) [n(i)-1] n(j) n(h) / n(n-1) \\
+ & n(i) [n(i)-1] [n(i)-2] n(j) n(h) [n(h)-1] / n(n-1) (n-2) \\
+ & n(i) [n(i)-1] [n(i)-2] n(j) [n(j)-1] n(h) / n(n-1) (n-2) \\
+ & n(i) [n(i)-1] [n(i)-2] [n(i)-3] n(j) [n(j)-1] n(h) [n(h)-1] / n(n-1) (n-2) (n-3).
\end{aligned} \tag{17}$$

#### 2.4.2. Calcul de l'espérance mathématique de

$$\left( \sum \{ \xi_i(x) \xi_i(y) / (x,y) \in F_j \times F_h \} \right) \left( \sum \{ \xi_{i'}(x') \xi_{i'}(y') / (x',y') \in F_j \times F_h \} \right).$$

Nous allons effectuer des calculs parallèles à ceux du paragraphe  
2.4.1. ci-dessus. Dans ces conditions, l'expression ci-dessus se décompose  
comme suit :

$$\begin{aligned}
& \sum \{ \xi_i(x) \xi_i(y) \xi_{i'}(x) \xi_{i'}(y) / (x,y) \in F_j \times F_h \} \\
+ & \sum \{ \xi_i(x) \xi_i(y) \xi_{i'}(x) \xi_{i'}(t) / ((x,y), (x,t)) \in B_1 \} \\
+ & \sum \{ \xi_i(x) \xi_i(y) \xi_{i'}(z) \xi_{i'}(y) / ((x,y), (z,y)) \in B_2 \} \\
+ & \sum \{ \xi_i(x) \xi_i(y) \xi_{i'}(z) \xi_{i'}(t) / ((x,y), (z,t)) \in C \}. \tag{18}
\end{aligned}$$

Puisque  $i$  est distinct de  $i'$ , chacune des trois premières sommes est  
nulle. Il nous reste à évaluer l'espérance mathématique de l'élément courant  
de la dernière somme.

$\sum \{ \xi_i(x) \xi_i(y) \xi_{i'}(z) \xi_{i'}(t) / ((x,y), (z,t)) \in C \}$  représente la proportion  
de couples de parties  $(X_i, X_{i'})$  telles que  $X_i$  (resp.  $X_{i'}$ ) renferme les objets  $x$   
et  $y$  (resp.  $z$  et  $t$ ). Elle est égale à :

$$\frac{n(i) [n(i)-1] n(i') [n(i')-1]}{n(n-1) (n-2) (n-3)} \tag{19}$$

Ainsi, l'espérance mathématique de l'expression en titre du paragraphe  
2.4.2. est égale à

$$\frac{n(i) [n(i)-1] n(i') [n(i')-1] n(j) [n(j)-1] n(h) [n(h)-1]}{n(n-1) (n-2) (n-3)}. \tag{20}$$

### 2.4.3. Expression de la variance de la v.a. S(j,h/P)

Compte tenu des expressions (11), (17) et (20) ; ainsi que celle (9), on obtient l'écriture détaillée suivante de la variance :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{1 \leq i \leq |I|} \frac{[n(i)-1]}{n(i)} \times \frac{n(j)n(h)}{n(n-1)} \left\{ 1 + \frac{[n(i)-2][n(h)-1]}{(n-2)} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{[n(i)-2][n(j)-1]}{(n-2)} + \frac{[n(i)-2][n(i)-3][n(j)-1][n(h)-1]}{(n-2)(n-3)} \right\} \\
 & + 2 \sum_{1 \leq i < i' \leq |I|} \frac{[n(i)-1][n(i')-1]n(j)[n(j)-1]n(h)[n(h)-1]}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \\
 & - \left[ \frac{(n-|I|)}{(n-1)} \right]^2 \times \left[ \frac{n(j)n(h)}{n} \right]^2 \quad (21)
 \end{aligned}$$

Compte tenu des formules (9) et (21), il résulte l'expression de l'indice centré et réduit.

### 2.5. Forme duale de l'hypothèse d'absence de liaison

Nous allons ici fixer la partition  $\{E_i / 1 \leq i \leq |I|\}$  et associer à la partition  $\{F_j / 1 \leq j \leq |J|\}$ , une partition aléatoire  $\{Y_j / 1 \leq j \leq |J|\}$ , en classes étiquetées et de type  $s = [m(1), m(2), \dots, m(j), \dots, m(|J|)]^j$ , dans l'ensemble  $\mathfrak{P}(n; s)$ , muni d'une probabilité uniformément répartie, des partitions de E, en classes étiquetées de type s.

Reprenons l'expression de l'indice brut (5) (§ 2.1. ci-dessus) :

$$s(j, h/P) = \sum \{ \text{card}(E_i \cap F_j) \text{card}(E_i \cap F_h) / n(i) \} / 1 \leq i \leq |I|. \quad (21)$$

Si la v.a. considérée ci-dessus se met sous la forme

$$S(i, h/P) = \sum \{ \text{card}(X_i \cap F_j) \text{card}(X_i \cap F_h) / n(i) \} / 1 \leq i \leq |I| \quad (22)$$

celle que nous envisageons ici s'écrit

$$T(j, h/P) = \sum \{ \text{card}(E_i \cap Y_j) \text{card}(E_i \cap Y_h) / n(i) \} / 1 \leq i \leq |I|. \quad (23)$$

En désignant par  $\varepsilon_i$  (resp.  $\eta_j$ ) la fonction indicatrice de  $E_i$  (resp.  $Y_j$ ),  $1 \leq i \leq |I|$  (resp.  $1 \leq j \leq |J|$ ), la dernière v.a. se met sous la forme

$$T(j, h/P) = \sum \left\{ \frac{1}{n(i)} \left[ \sum_{x \in E} \varepsilon_i(x) \eta_j(x) \right] \left[ \sum_{y \in E} \varepsilon_i(y) \eta_h(y) \right] \right\} / 1 \leq i \leq |I|. \quad (24)$$

Nous allons nous rendre compte que cette dernière v.a. a la même distribution que S(j, h/P).

PROPRIETE. La distribution de la suite de v.a. entières  $\{\text{card } X_i \cap F_j / 1 \leq j \leq |J|\}$  est identique à celle de la suite  $\{\text{card}(E_i \cap Y_j) / 1 \leq j \leq |J|\}$ .

En effet,  $\text{Pr}\{\text{card}(X_i \cap F_j) = n(i \wedge j) / 1 \leq j \leq |J|\}$  est définie par la proportion de parties dans  $\mathcal{P}_{n(i)}(E)$  (ensemble des parties de  $E$  de même cardinal  $n(i)$ ) pour lesquels la suite des cardinaux des intersections avec la suite des classes  $F_j$  est  $\{n(i \wedge j) / 1 \leq j \leq |J|\}$ . Elle est par conséquent égale à

$$\frac{\binom{m(1)}{n(i \wedge 1)} \binom{m(2)}{n(i \wedge 2)} \dots \binom{m(j)}{n(i \wedge j)} \dots \binom{m(|J|)}{n(i \wedge |J|)}}{\binom{n}{n(i)}} \quad (26)$$

Après développement et réorganisation, on peut ramener l'expression précédente à la forme suivante :

$$\frac{\frac{n(i)!}{n(i \wedge 1)! n(i \wedge 2)! \dots n(i \wedge |J|)!}}{\frac{n!}{m(1)! m(2)! \dots m(j)! \dots m(|J|)!}} \times \frac{n(\bar{i})!}{n(\bar{i} \wedge 1)! n(\bar{i} \wedge 2)! \dots n(\bar{i} \wedge |J|)!},$$

où nous avons noté  $n(\bar{i}) = [n - n(i)] = n(E - E(i)) = n(E(\bar{i}))$ ,  $n(\bar{i} \wedge j) = n(E(\bar{i}) \cap F_j)$ ,  $1 \leq j \leq |J|$ .

Or le dernier rapport (26) représente la proportion de partitions dans  $\mathcal{P}(n; s)$  pour lesquelles la  $j$ -ème classe contient  $n(i \wedge j)$  éléments de  $E_i$ ,  $1 \leq j \leq |J|$ . Il s'agit donc de

$$\text{Pr}\{\text{card}(E_i \cap Y_j) = n(i \wedge j) / 1 \leq j \leq |J|\}.$$

D'autre part, le système des relations stochastiques entre les différentes v.a.  $\text{card}(X_i \cap F_j)$ ,  $1 \leq j \leq |J|$ , est le même que celui entre les différentes v.a.  $\text{card}(E_i \cap Y_j)$ ,  $1 \leq j \leq |J|$ . Dans ces conditions, nous avons la propriété suivante de dualité :

THEOREME. Les v.a.  $S(j, h/P)$  et  $T(j, h/P)$  (cf. formules (22) et (23)) ont la même distribution.

Il est d'ailleurs intéressant de calculer directement la moyenne et la variance de la v.a.  $T(j, h/P)$  (cf. formule (24)) et de retrouver les formules (9) et (21) ci-dessus.



Si les  $n(i), n(j)$  et  $n(h)$  sont, comme c'est le cas courant de tables de contingence, assez grands, on a la valeur très approchée suivante de la variance :

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq i \leq |I|} \frac{n(j)n(h)}{n} \left\{ \frac{1}{n} + \frac{n(i)n(h)}{n} + \frac{n(i)n(j)}{n} + \frac{[n(i)]^2 n(j)n(h)}{n^2} \right\} \\ & + 2 \sum_{1 \leq i < i' \leq |I|} \left[ \frac{n(j)n(h)}{n} \right]^2 \frac{n(i)n(i')}{n^2} \\ & - \left[ 1 - \frac{|I|}{n} \right]^2 \left[ \frac{n(j)n(h)}{n} \right]^2 \\ = & n p(j)p(h) \left\{ \frac{|I|}{n} + [p(j)+p(h)] + n p(j)p(h) \sum_i [p(i)]^2 \right\} \\ & + 2 \left[ n p(j)p(h) \right]^2 \sum_{i < i'} p(i)p(i') - \left[ 1 - \frac{|I|}{n} \right]^2 [n p(j)p(h)]^2 \\ = & e(j,h) \left\{ \frac{|I|}{n} + [p(j)+p(h)] \right\} + e^2(j,h) \times \frac{|I|}{n} \left( 2 - \frac{|I|}{n} \right), \quad (27) \end{aligned}$$

où nous avons noté  $e(j,h) = np(j)p(h)$ .

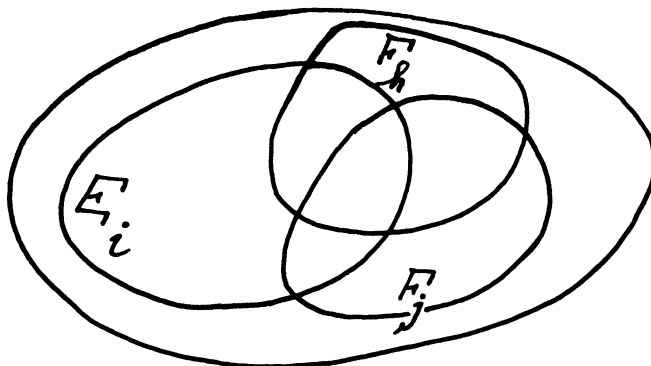
Il s'agit d'une expression de nature différente que celle définie par le dénominateur élevé au carré de la formule (3) du paragraphe 1 ci-dessus.

### III.2. Cas d'une juxtaposition horizontale de tables de contingence

La structure de la donnée est définie au paragraphe I ci-dessus (cf. expressions (1) et (2) § I) où il s'agit de comparer deux modalités  $j$  et  $h$  non nécessairement exclusives ; c'est-à-dire, telles que  $j \in J(\ell)$ ,  $h \in J(m)$ , où  $\ell$  peut ou non être distinct de  $m$ ,  $1 \leq \ell, m \leq L$ .

#### 1. L'indice brut et l'hypothèse d'absence de liaison

La situation peut être schématisée comme suit, relativement à une même classe



$E_i$ . L'indice brut de proximité est le même que dans le cas précédent où  $F_j$  et  $F_h$  étaient disjoints (cf. formule (5) du paragraphe 2.1. de III.1.). Rappelons ici sa forme :

$$\sum \left\{ \frac{n(i \wedge j)n(i \wedge h)}{n(i)} / i \in I \right\}. \quad (1)$$

L'hypothèse d'absence de lien va correspondre à la forme adoptée au paragraphe 2.5. ci-dessus, en ayant un caractère plus libre.

De façon précise, on fixe la partition  $\{E_i / 1 \leq i \leq I\}$  et on associe au couple de parties  $(F_j, F_h)$ , un couple de parties aléatoires indépendantes  $(Y_j, Y_h)$  où  $Y_j$  (resp.  $Y_h$ ) est un élément aléatoire dans l'ensemble, muni d'une probabilité uniformément répartie, des parties de  $E$  de même cardinal  $n(j) = \text{card}(F_j)$  (resp.  $n(h) = \text{card}(F_h)$ ).

La v.a. associée à l'indice brut (1) se met dans ces conditions sous la forme

$$U(j, h/P) = \sum_{1 \leq i \leq |I|} \left\{ \frac{\text{card}[E(i) \cap Y_j] \text{card}[E(i) \cap Y_h]}{n(i)} \right\}. \quad (2)$$

Nous désignerons par  $v(i \wedge j)$  (resp.  $v(i \wedge h)$ ) la v.a.  $\text{card}[E(i) \cap Y_j]$  (resp.  $\text{card}[E(i) \cap Y_h]$ ), laquelle est hypergéométrique de paramètres  $[n, n(i), n(j)]$  (resp.  $[n, n(i), n(h)]$ ). De plus, les deux v.a.  $v(i \wedge j)$  et  $v(i \wedge h)$  sont indépendantes, compte tenu de l'indépendance de  $Y_j$  et de  $Y_h$ .

## 2. Moyenne et variance de la v.a. $U(j, h/P)$

L'indépendance entre  $v(i \wedge j)$  et  $v(i \wedge h)$  permet d'écrire

$$E(U(j, h/P)) = \sum_{1 \leq i \leq |I|} \frac{1}{n(i)} \times \frac{n(i)n(j)}{n} \times \frac{n(i)n(h)}{n} = \frac{n(j)n(h)}{n} \quad (3)$$

On a d'autre part,

$$U^2(j, h/P) = \sum_{1 \leq i \leq |I|} \frac{v^2(i \wedge j)v^2(i \wedge h)}{n^2(i)} + 2 \sum_{1 \leq i < i' \leq |I|} \frac{v(i \wedge j)v(i \wedge h)}{n(i)} \times \frac{v(i' \wedge j)v(i' \wedge h)}{n(i')} \quad (4)$$

Compte tenu des relations suivantes

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E} [v^2(i \wedge j)] &= \frac{n(i) [n(i)-1] n(j) [n(j)-1]}{n(n-1)} + \frac{n(i)n(j)}{n} \\
 \mathcal{E} [v^2(i \wedge h)] &= \frac{n(i) [n(i)-1] n(h) [n(h)-1]}{n(n-1)} + \frac{n(i)n(h)}{n} \\
 \mathcal{E} [v(i \wedge j)v(i' \wedge j)] &= \frac{n(i)n(i')n(j) [n(j)-1]}{n(n-1)} \\
 \mathcal{E} [v(i \wedge h)v(i' \wedge h)] &= \frac{n(i)n(i')n(h) [n(h)-1]}{n(n-1)} \quad (5)
 \end{aligned}$$

que le lecteur cherchera à retrouver, on a

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E} [U^2(j, h/P)] &= \sum_{1 \leq i \leq |I|} \frac{1}{n(i)^2} \left[ \frac{n(i) [n(i)-1] n(j) [n(j)-1]}{n(n-1)} + \frac{n(i)n(j)}{n} \right] \\
 &\quad \times \left[ \frac{n(i) [n(i)-1] n(h) [n(h)-1]}{n(n-1)} + \frac{n(i)n(h)}{n} \right] \\
 +2 \sum_{1 \leq i < i' \leq |I|} \frac{1}{n(i)n(i')} &\left[ \frac{n(i)n(i')n(j) [n(j)-1]}{n(n-1)} \right] \\
 &\quad \times \left[ \frac{n(i)n(i')n(h) [n(h)-1]}{n(n-1)} \right] \quad (6)
 \end{aligned}$$

De sorte que l'expression de la variance de  $U(j, h, /P)$  peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \text{var} |U(j, h/P)| &= e(j, h) \left\{ \sum_{1 \leq i \leq |I|} \left\{ \frac{[n(i)-1]^2 [n(j)-1] [n(h)-1]}{n(n-1)^2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{[n(i)-1] [n(j)-1]}{n(n-1)} + \frac{[n(i)-1] [n(h)-1]}{n(n-1)} + \frac{1}{n} \right\} \right. \\
 +2 \sum_{1 \leq i < i' \leq |I|} &\frac{n(i)n(i') [n(j)-1] [n(h)-1]}{[n(n-1)]^2} - e(j, h) \left. \right\}, \quad (7)
 \end{aligned}$$

où rappelons-le, nous notons  $e(j, h)$  le paramètre  $n(j)n(h)/n$ .

Considérons à présent la valeur approximative de (7) dans le cas où  $n(j), n(h)$  et  $n(i)$  sont "assez" grands

$$\begin{aligned}
 \text{var} [U(j, h/P)] &\simeq e(j, h) \left\{ e(j, h) + [p(j) + p(h)] + \frac{|I|}{n} - e(j, h) \right\} \\
 &= e(j, h) \left\{ p(j) + p(h) + \frac{|I|}{n} \right\} \quad (8)
 \end{aligned}$$

On notera la différence avec le cas où  $j$  et  $h$  sont exclusifs ; pour la moyenne, il y a lieu de comparer l'expression (3) ci-dessus avec celle (9) du paragraphe III.1.2.2. et pour la variance, on comparera plus aisément la valeur (8) ci-dessus avec celle (27) du paragraphe précédent.

Comme on a pu déjà le constater, l'indice centré est exactement, au coefficient  $n$  près, le numérateur de l'indice de corrélation  $\rho(j,h)$  défini par la formule (3) du paragraphe III.1.1. ci-dessus.

Nous allons à présent examiner ce que devient l'indice centré réduit

$$\frac{s(j,h/P) - \mathcal{E}[U(j,h/P)]}{\sqrt{\text{var}[U(j,h)/P]}} , \quad (9)$$

dans le cas où la partition  $\{E(i)/i \in I\}$  est la plus fine où chaque classe contient exactement un objet.

Dans cette situation  $n(i)=1$  pour tout  $i=1,2,\dots,n$  et  $n(i \wedge j)n(i \wedge h)$  n'est égal à 1 que si et seulement si l'objet codé  $i$  possède les deux modalités-attributs  $j$  et  $h$  ; de sorte que

$$s(j,h/P) = n(j \wedge h) = \text{card}(F_j \cap F_h). \quad (10)$$

D'autre part, la variance de  $U(j,h/P)$  devient dans ce cas particulier

$$\begin{aligned} \text{var}[\hat{U}(j,h/P)] &= e(j,h) \left\{ 1 + \frac{[n(j)-1][n(h)-1]}{(n-1)} - e(j,h) \right\} \\ &= \frac{n(j)n(\bar{j})n(h)n(\bar{h})}{n^2(n-1)} \quad (11) \end{aligned}$$

où nous notons  $n(\bar{j}) = [n - n(j)]$  (resp.  $n(\bar{h}) = [n - n(h)]$ )

On retrouve ainsi, au coefficient  $\sqrt{n-1}$  près, l'indice d'association de K. Pearson entre les deux attributs-modalités  $j$  et  $h$ .

Pour cette même situation où la partition  $\{E(i)/i \in I\}$  est discrète, nous allons examiner ce que devient l'indice de corrélation  $\rho(j,h)$  défini par la formule (3) du paragraphe III.1.1.

Cet examen peut être conçu relativement à un tableau disjonctif complet croisant l'ensemble I des individus ou objets avec la suite des modalités de c variables qualitatives nominales. On a

$$\rho(j,h) = \frac{\sum_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{n} \left( \frac{\varepsilon(i \wedge j)}{c} - \frac{p(j)}{c} \right) \left( \frac{\varepsilon(i \wedge h)}{c} - \frac{p(h)}{c} \right)}{\left\{ \left[ \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{n} \left( \frac{\varepsilon(i \wedge j)}{c} - \frac{p(j)}{c} \right)^2 \right] \left[ \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{n} \left( \frac{\varepsilon(i \wedge h)}{c} - \frac{p(h)}{c} \right)^2 \right] \right\}^{1/2}},$$

où  $\varepsilon(i \wedge j)$  (resp.  $\varepsilon(i \wedge h)$ ) est égal 1 ou 0 selon que l'attribut j (resp. h) est présent ou absent chez le sujet i et où  $p(j)$  (resp.  $p(h)$ ) est égal à  $n(j)/n$  (resp.  $n(h)/n$ ).

L'indice (12) se réduit exactement à celui de K. Pearson.

**THEOREME.** Dans le cadre de l'h.a.l. définie ci-dessus (§ III.2.), l'indice  $s(j,h/P)$  centré (numérateur de (9)) est, au coefficient n près, égal au numérateur de l'indice de corrélation  $\rho(j,h)$ . Le dénominateur de l'indice centré réduit (9) reste de forme essentiellement différente du dénominateur de  $\rho(j,h)$ . Toutefois, les deux indices coïncident dans le cas d'un tableau disjonctif complet où la partition  $\{E(i)/i \in I\}$  est discrète.

Pour établir la table des indices d'association entre éléments de  $J = J^{(1)} \cup J^{(2)} \cup \dots \cup J^{(\ell)} \cup \dots \cup J^{(L)}$  dans le cas d'une juxtaposition horizontale de tableaux de contingence, conformément au point de vue développé, on peut se contenter d'adopter la dernière forme de l'h.a.l. que les modalités à comparer soient non-exclusives ou exclusives. Mais, rien n'empêche d'être plus précis et d'adopter la formule (9) ci-dessus de comparaison si les deux modalités j et h ne sont pas nécessairement exclusives et celle, résultant de l'h.a.l. du paragraphe III.1., si les modalités j et h sont exclusives (i.e. appartiennent à un même  $J^{(\ell)}$ ).

#### IV. SUR LA CONSTRUCTION ASCENDANTE D'UN ARBRE BINAIRE DES CLASSIFICATIONS SUR J

B. Tallur [TALLUR(1982)] utilise l'indice de corrélation  $\rho(j,h)$  pour former la totalité de l'arbre binaire des classifications sur J selon l'algorithme classique de classification ascendante hiérarchique. En effet, la fusion des deux modalités j et h les plus voisines conduit à la création d'une nouvelle modalité  $j \vee h$  (j ou h) et on se retrouve à chaque étape de l'algorithme à

rechercher dans l'ensemble des nouvelles modalités les deux les plus proches.

Certes, il peut se faire qu'à un même niveau de la construction, on trouve plusieurs paires de modalités également les plus voisines ; dans ce cas, on procède -dans un ordre quelconque- à la suite des agrégations des paires les plus proches et les classes résultantes sont placées à un même niveau de l'arbre.

Pour que l'arbre soit sans inversions ; c'est-à-dire, pour que la suite des valeurs de l'indice de proximité entre les deux classes les plus proches à un niveau donné de l'arbre, B. Tallur montre [TALLUR(1982)] qu'il importe d'apporter un coefficient correctif et d'adopter comme indice d'association entre la nouvelle agrégation  $j \vee h$  et  $\ell$  ( $\ell \neq j, \ell \neq h$ )  $\frac{1}{\sqrt{2}} \rho(j \vee h, \ell)$ . Un tel coefficient ( $1/\sqrt{2}$ ) qu'il importe de justifier de façon plus précise, peut très intuitivement se comprendre si on veut préserver le caractère entier des unités statistiques initiales que sont les modalités de J. De toute façon de la sorte, l'algorithme donne d'excellents résultats.

L'indice (9) auquel nous sommes parvenus ci-dessus, ne diffère de  $\rho(j, h)$  qu'au niveau du dénominateur ; son expression explicite est la suivante :

$$Q(j, h) = \frac{\sum_{1 \leq i \leq n} \frac{n(i \wedge j)n(i \wedge h)}{n(i)} - \frac{n(j)n(h)}{n}}{\sqrt{np(j)p(h) [p(j)+p(h)+\pi]}}, \quad (1)$$

où  $\pi = |I|/n$ .

L'objet de ce bref paragraphe est précisément de montrer que le même coefficient multiplicatif ( $1/\sqrt{2}$ ) s'impose dans une formation ascendante et sans inversions de l'arbre des classifications, basée sur le seul indice  $Q(j, h)$ .

Il s'agit de déterminer le coefficient positif  $\alpha$  tel que  $Q(j, \ell) < Q(j, h)$  et  $Q(h, \ell) < Q(j, h) \Rightarrow \alpha Q(j \vee h, \ell) < Q(j, h)$ . (2)

La première inégalité  $Q(j, \ell) < Q(j, h)$  se met sous la forme

$$\sum_i \frac{n(i \wedge j)n(i \wedge \ell)}{n(i)} - \frac{n(j)n(\ell)}{n} < \sqrt{np(j)p(\ell) [p(j)+p(\ell)+\pi]} Q(j, h), \quad (3)$$

la deuxième inégalité  $Q(h, \ell) < Q(j, h)$  se met également sous la forme

$$\sum_i \frac{n(i \wedge h) n(i \wedge \ell)}{n(i)} - \frac{n(h) n(\ell)}{n} < \sqrt{np(h)p(\ell) [p(h)+p(\ell)+\pi]} Q(j, h). \quad (4)$$

L'addition membre à membre des inégalités (3) et (4) conduit à l'inégalité qui est obtenue dans le cas où  $j$  et  $h$  sont exclusives

$$\text{num. } [Q(j \vee h, \ell)] < \sqrt{np(\ell)} \{ \sqrt{p(j) [p(j)+p(\ell)+\pi]} + \sqrt{p(h) [p(h)+p(\ell)+\pi]} \} Q(j, h), \quad (5)$$

où num. désigne le numérateur. Il en résulte que

$$Q(j \vee h, \ell) < \frac{\sqrt{p(j) [p(j)+p(\ell)+\pi]} + \sqrt{p(h) [p(h)+p(\ell)+\pi]}}{\sqrt{[p(j)+p(h)] [p(j)+p(h)+p(\ell)+\pi]}} Q(j, h). \quad (6)$$

En posant  $a = p(j) [p(j)+p(\ell)+\pi]$  et  $b = p(h) [p(h)+p(\ell)+\pi]$ , on a a fortiori

$$Q(j \vee h, \ell) < \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a+b}} Q(j, h). \quad (7)$$

Or, on peut facilement voir que,  $a$  et  $b$  étant deux nombres réels positifs

$$\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a+b}} < \sqrt{2}, \quad (8)$$

d'où, le résultat annoncé que nous venons d'établir dans le cas où  $J$  est formé de modalités exclusives et qui, en toute rigueur, concerne l'agrégation des deux premières modalités les plus proches.

De toute façon, que les modalités de  $J$  soient exclusives (une seule table de contingence) ou non (juxtaposition horizontale de tables de contingence), l'algorithme procède de la même façon par addition de colonnes ; de sorte que reste vraie la propriété qu'on vient de mentionner et qu'il convient d'exprimer comme suit :

$$\left. \begin{array}{l} Q(j,\ell) < Q(j,h) \\ Q(h,\ell) < Q(j,h) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} Q(j+h,\ell) < Q(j,h) \quad (9)$$

Nous allons maintenant pour achever notre démonstration donner l'expression explicite de l'indice d'association entre les deux classes de modalités de J et montrer que, pour cet indice, l'arbre total est sans inversions.

Si G et H sont deux classes disjointes de modalités de J regroupant respectivement  $\ell$  et  $m$  éléments de J, l'indice d'association entre G et H,  $Q_c(G,H)$  est défini par l'expression suivante

$$Q_c(G,H) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\ell+m-1} Q(G,H)$$

$$\text{où } Q(G,H) = Q(\{n(i \wedge g)/g \in G\}, \{n(i \wedge h)/h \in H\}) \quad (10)$$

Dans ces conditions, nous avons à prouver que

$$\left. \begin{array}{l} Q_c(G,F) < Q_c(G,H) \\ Q_c(H,F) < Q_c(G,H) \end{array} \right\} \Rightarrow Q_c(G+H,F) < Q_c(G,H), \quad (11)$$

où on suppose que F est une classe formée de  $k$  modalités de J, disjointe de celles G et H.

Compte tenu de (10), les relations du premier membre de (11) s'expriment par

$$\begin{aligned} Q(G,F) &< \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{m-k} Q(G,H) \\ Q(H,F) &< \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\ell-k} Q(G,H) \end{aligned} \quad (12)$$

Il en résulte, avec des notations que l'on comprend, les inégalités suivantes analogues à celles (3) et (4) ci-dessus :

$$\left. \begin{array}{l} \text{num. } Q(G,F) < \sqrt{np(G)p(F)} \left[ p(G) + p(F) + \pi \right] \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{m-k} Q(G,H) \\ \text{num. } Q(H,F) < \sqrt{np(H)p(F)} \left[ p(H) + p(F) + \pi \right] \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\ell-k} Q(G,H) \end{array} \right\} \quad (13)$$



Il en résulte qu'en notant

$A=p(G)[p(G)+p(F)+\pi]$ ,  $B=p(H)[p(H)+p(F)+\pi]$ , on ait a fortiori, de la même façon que pour la relation (7) ci-dessus,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k Q(G+H,F) < \frac{\sqrt{A} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m + \sqrt{B} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^\ell}{\sqrt{A+B}} Q(G,H). \quad (14)$$

Puisque  $\min(\ell, m) \geq 1$ , le coefficient de  $Q(G,H)$  dans le second membre de (14) est, compte tenu de la relation (8) ci-dessus, strictement inférieur à 1. Donc, en multipliant les deux membres de (14) par  $(1/\sqrt{2})^{\ell+m-1}$ , on obtient le résultat annoncé dans le second membre de (11).

**THEOREME.** L'indice d'association entre deux classes disjointes  $G$  et  $H$  de modalités de  $J(\ell=\text{card}(G), m=\text{card}(H))$  qui généralise l'indice  $Q(j,h)$  de la formule (1) ci-dessus, pour l'obtention par l'algorithme de classification hiérarchique ascendante d'un arbre binaire sans inversions est défini par

$$Q_c(G,H) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\ell+m-1} Q(G,H)$$

où  $Q(G,H)$  est, rappelons-le, l'indice (1) ci-dessus appliqué à deux colonnes sommes : la première (resp. la seconde) résultant de la somme des colonnes des modalités initiales de  $G$  (resp. de  $H$ ).

#### IV. CONCLUSION ; QUELQUES EXTENSIONS

Une extension naturelle de l'approche pour définir un indice d'association concerne également le cas d'un tableau de données Individus x Variables quantitatives où l'unité utilisée est commune aux différentes variables (franc, kilo, unité de surface ou de volume, ...). Un exemple typique est celui où on cherche à étudier la répartition des dépenses, sur un ensemble de postes, de l'ensemble des ménages -dont on dispose d'un échantillon représentatif- d'une région économique donnée, pendant une période fixée.

On peut en effet dans ce cas donner une interprétation très claire du lien "brut" entre deux ménages sur un poste de dépense fixé, respectivement, de deux postes de dépense relativement à un ménage donné. Finalement, tout se passe comme pour un tableau de contingence qui définit le croisement de deux partitions -la première par ménage et la seconde par poste- sur la

masse monétaire dépensée par l'échantillon observé sur l'ensemble considéré des postes de dépense.

La deuxième extension que nous voulons pour terminer évoquer, concerne le passage de la notion d'association totale à celle, partielle et le sens qu'il faut donner à cette dernière.

Si on considère le point de vue géométrique qui a prévalu à la définition du coefficient d'association  $\rho(j, j')$  (cf. formule (3') § III.1.1.), on peut poursuivre l'analogie formelle avec le cas linéaire pour obtenir le coefficient d'association partielle  $\rho(j, j'; h)$  qui doit neutraliser l'influence de la modalité  $h$  dans la comparaison de  $j$  à  $j'$ .

$u, v$  et  $w$  étant trois variables numériques de description d'un ensemble  $I$  d'individus, le coefficient de corrélation partielle  $\rho(v, w; u)$  qui est le coefficient de corrélation entre les résidus  $[v - \bar{v}(u)]$  et  $[w - \bar{w}(u)]$ , apparaît comme le coefficient de corrélation entre les deux variables :

$$\left[ \frac{(v - \bar{v})}{s(v)} - \text{cor.}(u, v) \times \frac{(u - \bar{u})}{s(u)} \right]$$

et

$$\left[ \frac{(w - \bar{w})}{s(w)} - \text{cor.}(u, w) \times \frac{(u - \bar{u})}{s(u)} \right] . \quad (1)$$

Partant de là, on obtiendra par identification formelle, moyennant la représentation géométrique du paragraphe III.1.1., le coefficient d'association partielle relativement à la modalité  $h$ , entre les deux modalités  $j$  et  $j'$ :

$$\rho(j, j'; h) = \frac{\rho(j, j') - \rho(j, h)\rho(j', h)}{\sqrt{1 - \rho^2(j, h)} \sqrt{1 - \rho^2(j', h)}} . \quad (2)$$

Nous avons bien défini dans [LERMAN(1981b)] des coefficients d'association partielle entre variables qualitatives où on ne se réfère nullement à une représentation géométrique ou linéaire de la représentation des variables. Dans ces conditions, la question se pose de savoir si nous pouvons faire de même dans la situation étudiée ici.

## BIBLIOGRAPHIE

- HAJEK J., "Some extensions of the Wald-Wolfowitz-Noether theorem", *Annals of Mathematical Statistics* 32, 506-523, (1961).
- LERMAN I.C., *Classification et analyse ordinale des données*, Dunod, 760 p., Paris (1981).
- LERMAN I.C., "Corrélation partielle dans le cas "qualitatif"", rapport interne IRISA n° 153, 125 p., Rennes (1981b). A paraître sous la forme de deux articles ; le premier dans les "Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris" et le second dans la R.A.I.R.O. série verte.
- LERMAN I.C. et TALLUR B., "Classification des éléments constitutifs d'une juxtaposition de tableaux de contingence", *Revue de Statistique Appliquée*, vol. XXVIII, n°3, 1980.
- NOETHER G.E., "On a theorem by Wald and Wolfowitz", *Annals of Mathematical Statistics*, vol.20, p.455, (1949).
- PROD'HOMME A., *Indice d'explication des classes obtenues par une méthode de classification hiérarchique respectant la contrainte de contiguité spatiale. Application à la viticulture Girondine et à la construction de logements dans les Bouches-du-Rhône*, Thèse de 3ème cycle, Université de Rennes I, Déc. 1980.
- TALLUR B., *Un nouvel algorithme de classification hiérarchique des éléments constitutifs d'une juxtaposition de tableaux de contingence, basé sur la corrélation*, rapport interne IRISA n° 177, Rennes (1982).
- TALLUR B., *Etude de l'agriculture régionale Française*, rapport interne IRISA n° 103, Rennes (1978).
- WALD A. and WOLFOWITZ J., "Statistical tests based on permutations of the observations", *Annals of Mathematical Statistics*, vol.15, p.358, (1944).