MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

E. CARTAN

Plongement d'un groupoïde médian dans le groupoïde multiplicatif d'un semi-anneau médian

Mathématiques et sciences humaines, tome 83 (1983), p. 55-68

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1983__83__55_0>

Math. Sci. hum. (*21*^{e} année, n°83, *1983*, p.55-68)

PLONGEMENT D'UN GROUPOIDE MEDIAN DANS LE GROUPOIDE MULTIPLICATIF D'UN SEMI-ANNEAU MEDIAN

E. CARTAN

Cet exposé contient sept parties s'enchaînant logiquement l'une l'autre et un exemple d'application.

1. Quelques généralités nécessaires sur les groupoïdes et groupoïdes médians notamment.

2. Semi-anneaux médians ; semi-anneaux médians réguliers (i.e. simplifiables) ; anneaux médians ; anneaux médians réguliers ; corps médians.

Soit GM(.) un groupoïde médian (c'est-à-dire vérifiant l'identité (XY)(ZT) = (XZ)(YT) possédant au moins un idempotent e dont les translations à gauche et à droite Le et Re sont injectives. Remarquons que si a.a = a alors La et Ra sont des endomorphismes.

3. On construit une suite emboîtée $GM(.) = GM_1(.) \subset GM_2(.) \ldots \subset GM_n(.) \ldots \subset GM(Le)(.)$ où, quel que soit n dans N^*, $GM_n(.)$ est isomorphe à GM(.), e étant laissé invariant par l'isomorphisme de construction.

$GM(Le) =_{df} \cup GM_n$ ($n \in N^*$). La translation à droite Re de e dans GM(Le)(.) est injective, et la translation à gauche Le de e dans GM(Le)(.) est bijective.

GM(Le)(.) est un groupoïde médian.

4. On pose $GM(Le) = GM(Le)_1$. On construit une suite emboîtée, $GM(Le)_1(.) \subset \ldots \subset GM(Le)_n(.) \subset \ldots \subset GM(LRe)(.)$. Mêmes remarques qu'en 3. GM(LRe)(.) est un groupoïdes médian pour lequel les translations à gauche et à droite de l'idempotent e sont des bijections, donc des automorphismes.

Si GM(.) est régulier, il en va de même de GM(Le)(.).

Si GM(Le)(.) est régulier, il en va de même de GM(LRe)(.).

5. On peut constituer GM(LRe)(.) en un semi-anneau médian GM(LRe)(+ ; .) tel que e soit l'élément neutre pour l'addition, et tel que les translations multiplicatives à gauche et à droite Le et Re de e dans GM(LRe)(+ ; .) soient des automorphismes de semi-anneau laissant e invariant.

6. Si, de plus, GM(LRe)(.) est régulier, alors le semi-anneau GM(LRe)(+ ; .) l'est aussi.

7. On peut plonger un semi-anneau médian régulier AMR(+ ; .) dont les translations multiplicatives à gauche et à droite Le et Re de l'élément neutre additif e sont des bijections (donc des automorphismes de semi-anneau) dans un corps médian $\mathcal{K}$M(+ ; - ; .)

$$AMR(+ \; ; \; .) \subset \mathcal{K}M(+ \; ; \; - \; ; \; .).$$

1. GENERALITES SUR LES GROUPOIDES MEDIANS.

1.1. Groupoïdes.

Un groupoïde G est un ensemble structuré par une loi de composition interne partout définie.

1.2. Eléments idempotents d'un groupoïde G.

Ce sont les éléments X de G vérifiant l'identité : X. X = X.

1.3. Translations à gauche et à droite La et Ra d'un éléments a d'un groupoïde G.

Soit G un groupoïde et soit a un élément de G. La translation à gauche La de a ainsi que la translation à droite Ra de a sont deux applications de G dans G définies comme suit :

$$La : X \mapsto aX \qquad \text{et} \qquad Ra : X \mapsto Xa.$$

1.4. Groupoïdes réguliers.

Ce sont les groupoïdes dont les translations à gauche et à droite de chaque élément sont injectives. En d'autres termes, quels que soient les éléments X,Y,Z du groupoïde, on a :

si (XY = XZ ou YX = ZX), alors, (Y = Z).

1.5. Quasi-groupes.

Ce sont les groupoïdes dont les translations à gauche et à droite de chaque élément, sont bijectives. En d'autres termes, quels que soient les éléments X et Y du groupoïde, il existe un unique Z élément du groupoïde et un unique T élément du groupoïde tels que :

$$XZ = Y \qquad \text{et} \qquad TX = Y.$$

1.6. Groupoïdes médians.

Ce sont les groupoïdes GM vérifiant l'identité :

$$(XY)(ZT) = (XZ)(YT).$$

1.7. Les translations à gauche et à droite La et Ra d'un élément idempotent d'un groupoïde médian sont des endomorphismes de groupoïde qui commutent :

$La \circ Ra = Ra \circ La$.

$La(XY) = a(XY) = (aa)(XY) = (aX)(aY) = La(X).La(Y)$.

Et symétriquement pour Ra.

$La \circ Ra(X) = a(Xa) = (aa)(Xa) = (aX)(aa) = (aX)a = Ra \circ La(X) = aXa$.

1.8. Conséquence immédiate.

Soit a un idempotent d'un groupoïde médian GM. Quels que soient X,Y éléments de GM, on a :

$$a(XY)a = (aXa)(aYa).$$

1.9. Soit GM un groupoïde médian possédant un idempotent a dont les translations à gauche et à droite La et Ra sont injectives. Alors $La \circ Ra$ est injective.

$$\text{si } (aXa = aYa), \qquad \text{alors, } (X = Y)$$

quels que soient X,Y éléments de GM.

2. SEMI-ANNEAUX MEDIANS ; ANNEAUX MEDIANS ; CORPS MEDIANS.

2.1. Semi-anneaux médians.

Un semi-anneau médian AM(+ ; .) est un ensemble structuré par deux lois de composition interne (+) et (.) articulées comme suit :

a) AM(+) est un monoïde commutatif. Soit e son élément neutre.

b) Quels que soient X,Y éléments de AM, on a : $e(XY) = (eX)(eY)$ et $(XY)e = (Xe)(Ye)$.

c) Quels que soient X,Y,Z,T éléments de AM, on a : $(X + Y)(Z + T) = XZ + YT$.

Propriétés majeures immédiates.

2.1.1. $e(X + Y) = (e + e)(X + Y) = eX + eY$; $(X + Y)e = Xe + Ye$.

2.1.2. $XY = (X + e)(e + Y) = Xe + eY$.

2.1.3. AM(.) est un groupoïde médian. En effet,

$(XT)(ZT) = (Xe + eY)(Ze + eT) = (Xe)(Ze) + (eY)(eT) = (XZ)e + e(YT) = (XZ)(YT)$.

Le groupoïde multiplicatif d'un semi-anneau médian est un groupoïde médian.

2.2. Semi-anneaux médians réguliers.

Un semi-anneau médian régulier AMR(+ ; .) est un semi-anneau médian tel que,

a) AMR(+) est un monoïde commutatif régulier : si (X + Y = X + Z), alors, (Y = Z).

b) AMR(.) est un groupoïde médian régulier : si (XY = XZ ou YX = ZX), alors, (Y = Z).

2.3. Anneaux médians ; anneaux médians réguliers.

Un anneau médian *A*M(+ ; - ; .) est un semi-anneau médian tel que le monoïde commutatif additif *A*M(+) est un groupe abélien. On montre alors que e.e = e. Un anneau médian *A*MR(+ ; - ; .) est régulier si, de plus, le groupoïde médian multiplicatif *A*MR(.) est régulier.

2.4. Corps médians.

Un corps médian *K*M(+ ; - ; .) est un anneau médian dont le groupoïde multiplicatif (médian) est un quasi-groupe (médian).

THEOREME. Un anneau médian est un corps médian si et seulement si les translations à gauche et à droite de l'élément neutre e sont des automorphismes d'anneau.

Preuve. (simple lecture de 2.1.b) et de 2.1.1). On conclut que Le et Re sont des endomorphismes de semi-anneau médian, donc d'anneau médian (Le(e) = Re(e) = e.e = e) (2.3.).
Il suffit donc de considérer le cas où Le et Re sont des bijections : elles seront alors ipso-facto des automorphismes d'anneau.

a) Si *K*M est un corps médian, alors, *K*M(.) est un quasi-groupe, et donc, Le et Re sont des bijections.
b) Soit *A*M(+ ; - ; .) un anneau médian où Le et Re sont des bijections. X.? = Y. Donc, X.? = Xe + e.? = Y. Donc, e.? = Y - Xe. Il existe donc un unique Z tel que XZ = Y, et de même à gauche. *A*M(+ ; - ; .) est donc bien un corps médian.

3. GROUPOIDES MEDIANS POSSEDANT AU MOINS UN IDEMPOTENT e DONT LES TRANSLATIONS A GAUCHE ET A DROITE Le ET Re SONT INJECTIVES.

Construction d'un plongement de GM dans un groupoïde médian GM(Le) tel que la translation à droite Re de e soit injective et la translation à gauche Le de e soit un automorphisme:
Soit GM(.) un groupoïde médian noté multiplicativement et possédant un idempotent e dont les translations à gauche et à droite Le et Re sont injectives.

La chaine inclusive de groupoïdes GM_n et les morphismes α_n.

On pose $GM = GM_1$.

3.1. <u>Le groupoïde médian GM_2 et le morphisme α_2</u>.

3.1.1. On définit $(GM \setminus e.GM) = E_1$.

3.1.2. On définit $GM_2 = (GM_1) \cup (E_1 \times \{GM_1\})$.

3.1.3. On définit la bijection $\alpha_2 : GM_1 \dashrightarrow GM_2$ par recollement,

$$\alpha_2 : \quad \begin{array}{ccc} e.GM_1 & \dashrightarrow & GM_1 \\ e.X & & X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} E_1 & \dashrightarrow & E_1 \times \{GM_1\} \\ X & & (X, GM_1) \end{array}$$

Ceci est possible si et seulement si Le est injective.

3.1.4. α_2 étant une bijection qui prend sa source dans GM_1, α_2 est donc un isomorphisme par transfert de la loi (.) sur GM_1 à une loi (x) sur GM_2.

Soient X,Y appartenant à GM_1. Alors, X et Y appartiennent à GM_2. On a :
$X \times Y = \alpha_2(eX) \times \alpha_2(eY) = \alpha_2((eX)(eY)) = \alpha_2(e(XY)) = XY$.
Et donc, la loi (x) coïncide avec la loi (.) sur GM_1.
On peut donc étendre la loi (.) à GM_2 sans avoir à adopter un nouveau symbole.
De plus, $\alpha_2(e) = \alpha_2(e.e) = e$, et quel que soit X appartenant à GM_1, on a :
$e.\alpha_2(X) = \alpha_2(e).\alpha_2(X) = \alpha_2(eX) = X$.

Enfin, par transport isomorphique de structure, comme GM_1 est un groupoïde médian, comme e est un idempotent dans GM_1, comme Le et Re, les translations à gauche et à droite de e dans GM_1 commutent et sont injectives, et comme enfin $\alpha_2(e) = e$, toutes ces propriétés restent conservées dans GM_2.

Pour finir, rappelons que $GM_1 \subset GM_2$.

Si, de plus, $GM_1(.)$ est régulier, il en va de même de $GM_2(.)$.

3.2. <u>Le groupoïde médian GM_3 et le morphisme α_3</u>.
$GM_3(.)$ est à $GM_2(.)$ ce que $GM_2(.)$ est à $GM_1(.)$.
Il y a isomorphisme entre la transition α_2 et la transition α_3 de source GM_2 et de but GM_3 , avec $GM_1 \subset GM_2 \subset GM_3$. Soit, de plus, X élément de GM_1. On a alors : $\alpha_3(X) = \alpha_3(e.\alpha_2(X)) =_{df} \alpha_2(X)$.

Et donc α_3 prolonge α_2.

Il est donc inutile de pousser plus loin l'étude de GM_3 et du morphisme α_3 ; et plus généralement de GM_n et du morphisme α_n. On a donc,
$GM(.) = GM_1(.) \subset GM_2(.) \subset \ldots \subset GM_n(.) \subset \ldots$, et de plus, les translations à gauche et à droite Le et Re de l'idempotent e sont injectives dans GM_n, pour tout n.

3.3. Posons $GM(Le) = \cup GM_n$ $(n \in N^*)$.

GM(Le)(.).

Soient u,v appartenant à GM(Le). Alors, il existe n tel que u,v appartiennent à GM_n. Soit $\underline{n}$ le plus petit, tel n. On a : $GM_{\underline{n}}(.) \subset GM_{\underline{n}+p}(.)$, et donc, on est légitimé à munir GM(Le) d'une multiplication naturelle, $u.v(GM(Le)) =_{df} u.v(GM_{\underline{n}})$.

3.4. On vérifie sans peine que GM(Le) est un groupoïde médian dont la loi (.) prolonge celle de chacun des GM_n.

3.4.1. La translation à gauche Le de e est injective dans GM(Le).
En effet, soient e,u,v appartenant à GM(Le) et tels que e.u = e.v. Alors, il existe n tel que u,v appartiennent à GM_n. Or, quel que soit n, Le est injective dans GM_n, et donc, u = v.

3.4.2. La translation à droite Re de e est injective dans GM(Le).

3.4.3. La translation à gauche Le de e est surjective dans GM(Le).
En effet, soit u appartenant à GM(Le). Alors il existe n tel que u appartienne à GM_n. On a alors : $u = e.\alpha_{n+1}(u)$.

3.5. Conclusion.
Comme toute translation attachée à un idempotent aussi bien à gauche qu'à droite est, dans un groupoïde médian un endomorphisme de groupoïde, il s'ensuit que,
a) GM(.) $\subset$ GM(Le)(.) et GM(Le)(.) est un groupoïde médian.
b) La translation à gauche Le de e dans GM(Le)(.) est un automorphisme.
c) La translation à droite Re de e dans GM(Le)(.) est un endomorphisme injectif.
d) Si GM(.) est régulier à droite et à gauche, il en va de même de GM_n par isomorphisme de structure. On conclut sans peine qu'alors GM(Le)(.) est régulier.

4. GROUPOIDES MEDIANS POSSEDANT AU MOINS UN IDEMPOTENT e DONT LA TRANSLATION A GAUCHE Le EST UN AUTOMORPHISME ET LA TRANSLATION A DROITE Re EST INJECTIVE.

Construction d'un plongement dans un groupoïde médian tel que les translations à gauche et à droite Le et Re de l'idempotent e soient toutes deux des automorphismes de groupoïde :

Soit GM(Le) un groupoïde médian possédant un idempotent e dont la translation à gauche Le est un automorphisme et la translation à droite Re est injective,
la chaîne inclusive de groupoïde $GM(Le)_n$ et les morphismes β_n :
On pose $GM(Le) = GM(Le)_1$.

4.1. Le groupoïde médian $GM(Le)_2$ et le morphisme β_2.

4.1.1. On définit dualement à (3.1.1.) $(GM(Le)_1 \setminus GM(Le)_1.e) = F_1$.

4.1.2. On définit comme en (3.1.2.) $GM(Le)_2 = (GM(Le)_1) \cup (F_1 \times \{GM(Le)_1\}$.

4.1.3. On définit comme en (3.1.3.) la bijection $\beta_2 : GM(Le)_1 \dashrightarrow GM(Le)_2$ par recollement.

Ceci est possible si et seulement si Re est injective.

4.1.4. De même que les morphismes α, β_2 peut être constitué en un isomorphisme de $GM(Le)_1$ vers $GM(Le)_2$, la loi (.) de groupoïde de $GM(Le)_2$ prolongeant celle de $GM(Le)_1$.

Quel que soit X appartenant à $GM(Le)_1$, on a :

$$\beta_2(e) = e \ ; \ \beta_2(X).e = \beta_2(X).\beta_2(e) = \beta_2(Xe) = X \ .$$

Enfin, par transport isomorphique de structure, comme $GM(Le)_1$ est un groupoïde médian, comme e est idempotent dans $GM(Le)_1$, comme Le est bijective dans $GM(Le)_1$, comme Re est injective dans $GM(Le)_1$, et comme enfin $\beta_2(e) = e$, toutes ces propriétés restent conservées dans $GM(Le)_2$. En outre, $GM(Le)_1 \subset GM(Le)_2$.

Si de plus, $GM(Le)_1(.)$ est régulier, il en va de même de $GM(Le)_2(.)$.

4.2.-4.3. $GM(Le)(.) = GM(Le)_1(.) \subset \ldots \subset GM(Le)_n(.) \subset \ldots \subset GM(LRe)(.)$ où $GM(LRe) = \cup \ GM(Le)_n \ (n \in N^*)$.

4.4. Par (4.1.4.), Le est bijective sur chacun des groupoïdes $GM(Le)_n$.

Par (3.5. Dual), Re est bijective sur GM(LRe) et Le est injective sur GM(LRe). GM(LRe) est un groupoïde médian dont la loi (.) prolonge celle de chacun des $GM(Le)_n$. Le est surjective sur GM(LRe). En effet,

soit $u \in GM(LRe)$. Alors, il existe n tel que $u \in GM(Le)_n$. Or, Le est bijective sur $GM(Le)_n$. Donc il existe $v \in GM(Le)_n \subset GM(LRe)$ tel que $u = e.v$.

4.5. Conclusion.

a) $GM(.) \subset GM(Le)(.) \subset GM(LRe)(.)$ et $GM(LRe)(.)$ est un groupoïde médian.

b),c) Les translations à droite et à gauche Re et Le de e sont des automorphismes de GM(LRe)(.).

d) Si GM(Le)(.) est régulier, il en va de même de GM(LRe)(.).

e) Si GM(.) est régulier, il en va de même de GM(Le)(.).

5. GROUPOIDES MEDIANS POSSEDANT AU MOINS UN IDEMPOTENT e DONT LES TRANSLATIONS A GAUCHE ET A DROITE Le ET Re SONT DES AUTOMORPHISMES DE GROUPOIDE.

On peut munir de tels groupoïdes d'une structure de semi-anneaux médians, la loi initiale de groupoïde devenant la loi multiplicative du semi-anneau, Le et Re devenant alors des automorphismes de semi-anneau médian.

Soit donc GM(LRe)(.) un groupoïde médian possédant un idempotent e dont les translations à gauche et à droite Le et Re sont des automorphismes de groupoïde.

5.1. $Le \circ Re = Re \circ Le$ est un automorphisme de groupoïde. Donc, quel que soit u appartenant à GM(LRe), il existe un unique v appartenant à GM(LRe) tel que $e.v.e = u$.

5.2. <u>Constitution d'une addition (+) dans GM(LRe).</u>

On pose : $\varphi = Le^{-1} \circ Re^{-1}$. φ est donc un automorphisme de GM(LRe)(.) tel que $\varphi(eXe) = X$, et ceci, quel que soit X appartenant à GM(LRe).

On pose : $X + Y =_{df} \varphi((eX)(Ye))$.

5.3. <u>Propriétés articulées de l'addition.</u>

5.3.1. $X + Y = Y + X$; $X + e = X$; $\varphi(e) = e + e = e$.

5.3.2. $(X + Y).(Z + T) = XZ + YT$.

Preuve.

$$(X+Y).(Z+T) = \varphi((eX)(Ye)).\varphi((eZ)(Te)) = \varphi(((eX)(Ye)).((eZ)(Te)))$$
$$= \varphi(((eX)(eZ)).((Ye)(Te))) = \varphi((e(XZ)) . ((YT)e)) = XZ + YT .$$

5.3.3. $XY = (X+e).(e+Y) = Xe + eY$; $e.(X+Y) = (e+e)(X+Y) = eX + eY$; $(X+Y).e = Xe+Ye$.

5.3.4. L'addition est associative : $(X+Y) + Z = X + (Y+Z)$.

Preuve. On pose :

$X = X'e.e$; $Y = eY'e$; $Z = e.eZ'$.

$(X+Y) + Z = (X'e + eY')e + e.eZ' = (X'.Y') . (e . Z')$.

$X + (Y+Z) = X'e.e + e(Y'e + eZ') = (X'.e) . (Y'. Z')$.

Le groupoïde multiplicatif étant médian, la loi additive est donc associative.

5.4. <u>Conclusion.</u>

a) La loi additive (+) est partout définie, elle est commutative, associative, et possède un élément neutre e. GM(LRe)(+) est donc un monoïde commutatif.

b) $e(XY) = (e.e)(X.Y) = (eX)(eY)$; $(XY)e = (Xe)(Ye)$, où e est l'élément neutre du monoïde additif.

c) $(X+Y).(Z+T) = XZ + YT$.

GM(LRe)(+ ; .) est donc un semi-anneau médian pour lequel Le, Re et φ sont des automorphismes de semi-anneau (médian) laissant e invariant.

6. SEMI-ANNEAUX MEDIANS TELS QUE LES TRANSLATIONS MULTIPLICATIVES A GAUCHE ET A DROITE Le ET Re DE L'ELEMENT NEUTRE ADDITIF e SOIENT DES AUTOMORPHISMES DE SEMI-ANNEAU, ET DONT LE GROUPOIDE MULTIPLICATIF (MEDIAN) EST REGULIER.

De tels semi-anneaux sont des semi-anneaux médians réguliers, et comme tels, ont un élément neutre additif e idempotent pour la loi multiplicative.

Et donc, les automorphismes de semi-anneau Le et Re laissent e invariant.

Soit AM(+ ; .) un semi-anneau médian tel que les translations multiplicatives à gauche et à droite Le et Re de l'élément neutre additif e soient des automorphismes, et tel que AM(.) soit régulier.

Il suffit de montrer que AM(+) est un monoïde commutatif (ce que l'on sait) qui est régulier. On aura alors, $e.e = (e+e).(e+e) = e.e + e.e$, et donc, $e.e = e$.

Soient X,Y,Z appartenant à AM, et tels que : $X + Y = X + Z$.

Posons : $X = X'.e$; $Y = e.Y'$; $Z = e.Z'$.
Alors : $X + Y = X'.e + e.Y' = X'.Y' = X'.Z' = X'.e + e.Z' = X + Z$.
$X'.Y' = X'.Z'$, et donc $Y' = Z'$, et donc, $Y = Z$.

7. SEMI-ANNEAUX MEDIANS REGULIERS DONT LES TRANSLATIONS MULTIPLICATIVES A GAUCHE ET A DROITE Le ET Re DE L'ELEMENT NEUTRE ADDITIF e SONT DES AUTOMORPHISMES DE SEMI-ANNEAU (MEDIAN).

On peut plonger un tel semi-anneau médian régulier AMR(+ ; .) dans un corps médian $\mathcal{K}$M(+ ; - ; .).

7.1. Rappels.

Soient a,b,c,d appartenant à AMR. AMR(+) peut être plongé dans un groupe abélien $\mathcal{K}$M(+ ; -) en posant :

$$[(a - b) = (c - d)] \equiv_{df} [(a + d) = (b + c)] \quad \text{avec,}$$

(1) Quel que soit f appartenant à $\mathcal{K}$M, il existe a,b appartenant à AMR tels que $f = (a - b)$.

(2) Quels que soient a,b appartenant à AMR, il existe un unique f appartenant à $\mathcal{K}$M, tel que $f = (a - b)$.

(3) $a \longmapsto (a - e)$ est un plongement AMR(+) $\longrightarrow$ $\mathcal{K}$M(+ ; -). On identifiera a et $(a - e)$.

7.2. Définition de la loi multiplicative dans $\mathbb{K}M$.

7.2.1. Soient a,b,c,a',b',c' appartenant à AMR et tels que $c = a+b$ et $c' = a' + b'$.

Alors : $(c - a).(c'-a') = (b - e).(b'-e) = b . b' - e = c . c' - a . a'$.

(en vertu du fait que $c . c' + e = c . c' = (a+b).(a' + b') = a . a' + b . b'$ et du fait que $(b-e)$ est identifiable à b et $(b'-e)$ est identifiable à b').

7.2.2. On peut donc étendre la définition de la multiplication à $\mathbb{K}M$, et l'on vérifiera que la définition est compatible avec le calcul des classes.

Soient $f = a-b$ et $g = c-d$. Alors, $f . g = (a-b).(c-d) =_{df} a.c - b.d.$

7.3. Propriétés articulées de la multiplication.

7.3.1. $e . (a-b) = (e-e) . (a-b) = e . a - e . b$; $(a-b) . e = a . e - b . e$.

7.3.2. $\forall f,g \in \mathbb{K}M$ / $e(fg) = (ef)(eg)$ et $(fg)e = (fe)(ge)$.

Preuve.

Soient $f = a-b$ et $g = c-d$. Alors,

$$e(fg) = e((a-b)(c-d)) = e(ac-bd) = e(ac) - e(bd) = (ea)(ec) - (eb)(ed)$$

$$= (ea-eb) . (ec-ed) = (e(a-b)) . (e(c-d)) = (ef)(eg) .$$

7.3.3. $\forall f,f',g,g' \in \mathbb{K}M$ / $(f+g) . (f'+g') = f . f' + g.g'$.

Preuve.

Soient $f = a-b$; $f' = a'-b'$; $g = c-d$; $g' = c'-d'$. Alors,

$$(f+g) . (f' + g') = ((a-b) + (c-d)) . ((a'-b') + (c'-d'))$$

$$= ((a+c) - (b+d)) . ((a'+c') - (b'+d'))$$

$$= (a+c)(a'+c') - (b+d)(b'+d')$$

$$= a . a' + c . c' - b . b' - d . d'$$

$$= (a . a' - b . b') + (c . c' - d . d')$$

$$= (a-b) . (a'-b') + (c-d) . (c'-d')$$

$$= f . f' + g . g' .$$

7.4. Les translations multiplicatives à gauche et à droite Le et Re de e sont injectives.

Preuve.

Soit $e . f = e . g$, et posons $f = a-b$ et $g = c-d$.

$e . f = e(a-b) = e . a - e . b = e . c - e . d = e(c-d) = e . g$. Et donc,

$e . a + e . d = e(a+d) = e(b+c) = e . b + e . c$.

Or, le semi-anneau AMR(+ ; .) est régulier, et donc, $a+d = b+c$; et donc, $f = g$.

7.4.1. Les translations multiplicatives gauche et droite Le et Re de e sont surjectives.

Preuve.

Soit $f = a - b$. Le est surjective dans AMR, et donc, on peut trouver a' et b' tels que $a = e \cdot a'$ et $b = e \cdot b'$. Soit $f' = a' - b'$, Alors, $f = e \cdot f'$.

7.5. Conclusion.

(a) KM(+ ; −) est un groupe abélien dans lequel AMR(+) est plongé.

(b) $e(fg) = (ef)(eg)$ et $(fg)e = (fe)(ge)$.

(c) $(f+g)(f'+g') = f \cdot f' + g \cdot g'$.

KM(+ ; − ; .) est donc un anneau médian.

(d) Les translations multiplicatives à gauche et à droite Le et Re de l'élément neutre additif e sont des automorphismes d'anneau relativement à KM(+ ; − ; .). Donc, KM(+ ; − ; .) est un corps médian. De plus,

(e) AMR(+) $\subset$ KM(+ ; −) et AMR(.) $\subset$ KM(.). Donc, AMR(+ ; .) $\subset$ KM(+ ; − , .).

On peut plonger tout semi-anneau médian régulier dont les translations multiplicatives à gauche et à droite Le et Re de l'élément neutre additif e sont des automorphismes de semi-anneau dans un corps médian. (Signalons qu'on montre que $e = e \cdot e$).

8. EXEMPLE DE PLONGEMENT D'UN GROUPOIDE MEDIAN REGULIER ET CONSTRUCTION DU CORPS MEDIAN D'ACCUEIL.

8.1. N(.).

N(.) est l'ensemble des nombres entiers naturels avec zéro structuré par la loi multiplicative suivante :

Quels que soient a et b dans $\underline{N}$, on a : $a \cdot b =_{\text{df}} 6a + 10b$.

8.1.1. N(.) est un groupoïde médian.

$(ab)(cd) = 6\text{x}(6a + 10b) + 10\text{x}(6c + 10d) = (ac)(bd)$.

8.1.2. N(.) est un groupoïde régulier (à gauche et à droite).

$ab = ac = 6a + 10b = 6a + 10c \Rightarrow b = c$.

$ba = ca = 6b + 10a = 6c + 10a \Rightarrow b = c$.

8.1.3. Zéro (e) est idempotent dans N.

8.1.4. Les translations à gauche et à droite Le et Re de zéro (e) sont injectives. En effet, le groupoïde étant régulier, elles le sont ipso-facto.

8.1.5. Les translations à gauche et à droite Le et Re de zéro (e) ne sont pas surjectives. En effet, $\mathbb{N} . \mathbb{N} \subset 2\mathbb{N}$.

8.2. Construction de $\mathbb{N}$(Le)(.).

8.2.1. On pose $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1$; $\mathbb{N}_{p+1} = \mathbb{N}_p/10$. (Remarquer que $\mathbb{N}_p \subset \mathbb{N}_{p+1}$) ;

$\mathbb{N}(\mathrm{Le}) = \cup \, \mathbb{N}_{p(p \in \mathbb{N}^*)}$.

8.2.2. Extension de la multiplication à $\mathbb{N}$(Le). Toujours $a . b = 6a + 10b$.

8.2.3. $\mathbb{N}$(Le) est l'ensemble des nombres décimaux positifs ou nuls.

8.2.4. La translation Le : $X \mapsto e . X = 10X$ est une bijection.

8.3. Construction de $\mathbb{N}$(LRe)(.).

8.3.1. On pose $\mathbb{N}(\mathrm{Le}) = \mathbb{N}(\mathrm{Le})_1$; $\mathbb{N}(\mathrm{Le})_{p+1} = \mathbb{N}(\mathrm{Le})_p/6$;

$\mathbb{N}(\mathrm{LRe}) = \cup \, \mathbb{N}(\mathrm{Le})_{p(p \in \mathbb{N}^*)}$.

8.3.2. Toujours $a . b = 6a + 10b$.

8.3.3. $\mathbb{N}$(LRe) est l'ensemble des nombres "sexagésimaux" positifs ou nuls.

8.3.4. Les translations Le et Re de l'idempotent zéro sont bijectives.
Re : $X \mapsto X . e = 6X$.

8.4. Construction d'un monoïde "additif" régulier $\mathbb{N}$(LRe)(&), "&" étant l'addition.

8.4.1. $e . X . e = 60X$. Donc, $\varphi(X) = X/60$.

8.4.2. $X \,\&\, Y = \varphi((e . X) . (Y . e)) = \dfrac{6\text{x}(10X) + 10\text{x}(6Y)}{60} = X + Y$.

Nous n'avons fait que retrouver l'addition usuelle. Pourquoi ?
Nous abandonnerons donc le symbole "&" et écrirons l'addition comme il est d'usage.

8.5. Construction du corps médian de plongement $\mathbb{K}$M(+ ; - ; .).

8.5.1. (1) $\mathbb{K}$M(+ ; -).
$\mathbb{K}$M(+ ; -) est le groupe additif des nombres "sexagésimaux" relatifs.

8.5.2. $\mathbb{K}$M(.).
On munit l'ensemble des nombres "sexagésimaux" relatifs d'une multiplication.
Quels que soient les nombres sexagésimaux relatifs f et g on pose,
$f . g =_{\mathrm{df}} 6f + 10g$.

8.6. <u>Mise en valeur des propriétés axiomatiques et dérivées du corps médian $KM(+ ; - ; .)$</u>.

8.6.1. (2) $e(f . g) = 10x(6f + 10g) = (e . f) . (e . g) = 6x(10f) + 10x(10g)$.

$(f+g)e = 6x(6f + 10g) = (f . e) . (g . e) = 6x(6f) + 10x(6g)$.

$e . f = 10f \quad ; \quad f . e = 6f$.

8.6.2. (3) $(f+g) . (h+k) = 6x(f+g) + 10x(h+k)$.

$= (f . h) + (g . k) = (6f + 10h) + (6g + 10k)$.

8.6.3. $e(f+g) = 10x(f+g) = 10f + 10g = e . f + e . g$.

$(f+g)e = 6x(f+g) = 6f + 6g = f . e + g . e$.

8.6.4. $f . g = 6f + 10g = f . e + e . g$.

8.7. <u>Résolution des équations</u> $f . ? = g$ et $? . f = g$.

8.7.1. $f . ? = g = f . e + e . ? = 6f + 10x ?$.

Il existe une et une seule solution : $? = \dfrac{g - 6f}{10}$.

8.7.2. $? . f = g = ? . e + e . f = 6x ? + 10f$.

Il existe une et une seule solution : $? = \dfrac{g - 10f}{6}$.

8.7.3. $KM(.)$ est donc un quasi-groupe (médian).

BIBLIOGRAPHIE.

ACZEL, J., "On mean values", *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol.54, 1948, 392-400.

d'ADHEMAR, C., "Quelques classes de groupoïdes non-associatifs", *Math. Sci. hum.*, 31, 1970, 17-31.

BARBUT, M., "Une classe de quasi-groupes qui peuvent servir à représenter des "moyennes"", *Math. Sci. hum.*, 31, 1970, 33-37.

BRUCK, R.H., "*A survey of binary systems*, New York, Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1966.

CSAKANY, B., MEGYESI, L., "Varieties of idempotent medial quasigroups", *Acta Sci. Math.*, 37, 1975, 17,23.

ETHERINGTON, I.M.H., "Non-associative arithmetics", *Proc. R. Soc. of Edimburgh*, 62, 1949, 441-453.

FRINK, O., "Symmetric and self-distributive systems", *Amer. Math. Monthly*, 62, 1955, 697-707.

HOWROYD, T., "Cancellative Medial groupoïds and arithmetic means", *Bull. Austral. Math. Soc.*, 8, 1973, 17-21.

JEZEK, J., KEPKA, T., NEMEC, P., *Distributive Groupoïds*, manuscrit, 1978, 200 p., adresse de JEZEK J. : Charles Univ. Sokobvska 83, 18600 PRAGUE, Tchécoslovaquie.

PETRICH, M., "Structure des demi-groupes et anneaux distributifs", *C.R. Acad. Sci. Paris*, 268, 1969, A849-A852.

RUEDIN, J., "Sur une décomposition des groupoïdes distributifs", *C.R. Acad. Sci. Paris*, 262, 1966, A985-A988.

SMITH, J.D.H., "Finite distributive quasigroups", *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 80, 1976, 37-41.

SOUBLIN, J.P., "Etude algébrique de la notion de moyenne", *J. Math. pures et Appl.*, 50, 1971, 53-264.

FUCHS, L., "On mean systems", *Acta. Math. Acad. Hungar.*, 1950, 303-320.