MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

J. P. OLIVIER

# Liaisons entre les S-relations et les relations de ferrers. Représentations

*Mathématiques et sciences humaines*, tome 80 (1982), p. 67-82
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1982__80__67_0>

*Math. Sci. hum.* (20$^e$ **année, n°80,** *1982*, **p.67-82)**

# LIAISONS ENTRE LES S-RELATIONS ET LES RELATIONS DE FERRERS. REPRESENTATIONS.

J.P. OLIVIER*

## 1. INTRODUCTION

Cette note fait suite à une intervention de l'auteur au séminaire "ordre et classification" (J.P. Barthélémy et B. Monjardet) au printemps 81. Dans cette intervention il s'agissait d'expliquer le fonctionnement des morphismes des catégories de Schröder ([6], [7]), cadre formel efficace pour parler de nombreux aspects des correspondances, dans le cadre booléen.

A titre d'exemple de fonctionnement on choisit de reprendre quelques éléments du travail de B. Monjardet, "Axiomatiques et propriétés des quasi-ordres" ([4]). Et de les traiter en utilisant les principes :

1. Faire un usage systématique des propriétés de l'"algèbre des relations" (ou plus exactement des catégories de Schröder) ;

2. Passer des définitions portant sur une correspondance à des définitions portant sur un couple de correspondances ;

---

*U.E.R. M.A.S.H., Université Paul Valéry, B.P. 5043, 34032 MONTPELLIER Cedex.

3. Préciser, pour chaque notion, son champ de stabilité pour les opérations permises ;

4. Utiliser les propriétés catégoriques qui s'imposent.

Le premier principe apparait aussi dans le travail de B. Monjardet déjà cité. Pour quelqu'un ne voulant pas s'initier aux catégories de Schröder, il revient à bannir les éléments et à ne vouloir travailler qu'en utilisant, 1. Les opérations booléennes (on note $Q^-$ le complémentaire de Q) ; 2. La composition (si $R : X \rightarrow Y$ et $S : Y \rightarrow Z$ on note RS la correspondance composée et non SoR) et l'opération "réciproque" (on note $Q^*$ la correspondance réciproque de Q : $(x, y) \in Q^*$ si et seulement si $(y, x) \in Q$) ; on note $\Delta_X$ l'identité de X ; 3. Les propriétés habituelles des opérations précédentes et l'équation liant ces ingrédients $P\,(P^*\,Q)^- \subseteq Q^-$. Remarquons que $(P^*\,Q)^-$ est la correspondance ainsi définie : $(x, y) \in (P^*\,Q)^-$ si et seulement si l'image de x par $P^*$ est contenue dans l'image réciproque de y par $Q^-$ (ce qui peut s'écrire $x\,P^* \subseteq y\,Q^{-*}$ ).

Le second principe fait partie de l'outillage actuel. Ici il se concrétise comme suit. Prenons deux correspondances $P : X \longrightarrow Y$ et $Q : X \longrightarrow Z$ dans cet ordre. Construisons les quatre correspondances de Y vers Z obtenues en composant $P^*$ , $P^{*-}$, Q, $Q^-$. Regardons ce que veulent dire les propriétés du genre : l'intersection de deux de ces correspondances est vide. Nous sommes sûrs d'obtenir comme cela ce que l'on cherche (pour d'autres choses on peut faire d'autres comparaisons avec ces quatre correspondances : inclusion, faire intervenir les complémentaires...). On s'aperçoit vite qu'en fait on obtient ainsi deux grands types de propriétés ; le premier qui est "le couple (P, Q) vérifie $P^*\,Q \cap P^*\,Q^- = \emptyset$, "le second qui est "le couple (P, Q) vérifie $P^{*-}Q \cap P^*\,Q^- = \emptyset$". Les autres propriétés s'en déduisant en demandant que le couple $(Q,P)$ ou $(P^-,Q)$ etc... vérifie l'une ou l'autre des propriétés énoncées.

Le troisième principe provient d'une exigence dégagée de la théorie du mesurage : l'universalité des axiomes. On établit alors des propositions dont l'application répétée est à la base des généralités classiques sur les notions envisagées.

Le quatrième principe trouvera surtout son application dans le problème des représentations. Il permet la systématisation d'idées que l'on trouve à l'état naissant dans "composite measurement" de A. Ducamp et J.C. Falmagne ([2]).

2. LA PROPRIETE $P^* Q \cap P^* Q^- = \emptyset$.

Quelques mots sur cette propriété hors de notre propos.

DEFINITION

Nous dirons (provisoirement et faute de mieux) que $P^*$ entretient avec $Q$ un rapport de fonctionnelle si et seulement si $P^* Q \cap P^* Q^- = \emptyset$.

PROPOSITION

Soient $P : X \longrightarrow Y$ et $Q : X \longrightarrow Z$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1. $P^* Q \cap P^* Q^- = \emptyset$,
2. $P P^* \subset \Delta g\ (Q)$,
3. $P P^* Q \subset Q$,
4. pour toute correspondance $R$ : $P^*(Q \cap R) = P^* Q \cap P^* R$,
5. $P^*$ entretient avec $Q^-$ un rapport de fonctionnelle.

On note $\Delta g\ (Q)$ la plus grande correspondance vérifiant l'inégalité, en $C$, $C\, Q \subset Q$ et $C\, Q^- \subset Q^-$, c'est une congruence égale à $(Q\, Q^{*-})^- \cap (Q^-\, Q^*)^-$.

EXEMPLES

1. Pour tout Q, $P^*$ entretient avec Q un rapport de fonctionnelle si et seulement si $P^*$ est une correspondance fonctionnelle i.e. $P\,P^* \subset \Delta$.

2. $M^*$ entretient avec M un rapport de fonctionnelle si et seulement si M est une correspondance di-fonctionnelle comme les appelle J. Riguet.

3. LA PROPRIETE $P^{*-}Q \cap P^*Q^- = \emptyset$.

DEFINITION

Soient $P : X \longrightarrow Y$ et $Q : X \longrightarrow Z$. Nous dirons que le couple (P, Q) est un couple de Guttman-Ferrers si et seulement si $P^{*-}Q \cap P^*Q^- = \emptyset$.

On remarque l'extraordinaire stabilité de la propriété.

PROPOSITION

Si (P,Q) est un couple de Guttman-Ferrers alors il en est de même de (Q,P) $(P^-, Q^-)$ et de (MPS, MQR).

Nous devons évaluer $(S^* P^* M^*)^- MQR \cap S^*P^*M^*(MQR)^-$ qui est contenu dans $(S^*P^*)^-Q\,R \cap S^*P^*(QR)^-$, laquelle est vide si : $S\,(S^*P^*)^-\,Q \cap P\,(QR)^-R^*$ l'est, et cette dernière est contenue dans $P^{*-}Q \cap P^*Q^-$, qui est vide par hypothèse.

EXEMPLES

1. Le couple (M,M) est un couple de Guttman-Ferrers si et seulement si M est une relation de Ferrers.

2. Si V et $V^-$ sont transitifs alors V est une relation de Ferrers.

3. Si $V$ est une relation de Ferrers reflexive et transitive alors $V \cup V^* = 1$.

4. LA PROPRIETE $P^* Q \cap P^{*-} Q^- = \emptyset$.

DEFINITION

Soient $P : X \longrightarrow Y$ et $Q : X \longrightarrow Z$. Nous dirons que le couple $(P,Q)$ est un S-couple si et seulement si $(P^-,Q)$ est un couple de Guttman-Ferrers, c'est-à-dire si et seulement si $P^* Q \cap P^{*-} Q^- = \emptyset$.

La stabilité de cette notion est plus faible que celle de couple de Guttman-Ferrers.

PROPOSITION

Si $(P,Q)$ est un S-couple il en est de même de $(Q,P)$ , de $(Q^-,P^-)$ et de $(PS, QR)$.

La correspondance $S^*P^*QR \cap (S^*P^*)^- (QR)^-$ est vide si et seulement si $P^*Q \cap S\,(S^*P^*)^- (QR)^- R^*$ l'est. Et cette dernière est contenue dans $P^*Q \cap P^{*-} Q^-$ qui est vide par hypothèse.

EXEMPLES

1. Le couple $(M, M^*)$ est un S-couple si et seulement si $M$ est une S-relation.
2. Si $V$ et $V^-$ sont transitifs alors $V$ est une S-relation.
3. En appliquant la proposition de stabilité plusieurs fois (si $(P,Q)$ est un S-couple, il en est de même de $(P P^{*-}, Q Q^{*-})$, donc de $( (P P^{*-})^-, (QQ^{*-})^-)$ donc de $( (PP^{*-})^- P^{*-}, (QQ^{*-})^- Q^{*-}) = (P,Q)$ ) on se ramène à considérer les S-couples formés de deux préordres. Et un couple de préordres $(V_1, V_2)$ est un S-couple si et seulement si $V_1 \cup V_2 = 1$.

# 5. REPRESENTATIONS

5.1. On veut mettre toute correspondance sous la forme $f\ T\ g^*$ où f et g sont des applications (i.e. des correspondances h vérifiant $hh^* \supset \Delta$ et $h^*h \subset \Delta$) et où T un préordre (i.e. vérifiant $T^2 \subset T$ et $\Delta \subset T$). Pour cela il est très agréable d'avoir des sommes : si R va de X vers Y alors f et g se factorisent par $X \amalg Y \xrightarrow{h}$, où h est une application. La correspondance $h\ T\ h^*$ est un préordre sur $X \amalg Y$. On voit aussi qu'on se ramène au cas où f et g sont les monomorphismes canoniques dans la somme. Appliquons ce programme en commençant par construire la catégorie des sommes d'une catégorie de Schröder.

Si C est une catégorie de Schröder, la catégorie des sommes de C se définit comme suit :

- les objets sont les suites finies $(X_1, \ldots, X_m)$ d'objets, (la suite peut être vide),

- les morphismes de $(X_1, \ldots, X_n)$ vers $(Y_1, \ldots, Y_n)$ sont les matrices à n lignes et m colones $(R_{ij})$, où $R_{ij}$ est une correspondance de $X_i$ vers $Y_j$,

- l'ordre sur les matrices est l'ordre produit,

- le foncteur * fait correspondre à $(R_{ij})$ la matrice dont la j-ème ligne, i-ème colonne est $R_{ij}$,

- la composition $(R_{ij})\ (S_{kl}) = (\bigvee_k R_{ik}\ S_{kl})$.

On obtient bien ainsi une catégorie de Schröder. Cette catégorie a des sommes qui sont aussi les produits.

On vérifie que les sommes restent des sommes dans la catégorie des applications. L'injection de X vers $X \amalg Y$ s'écrit $(\Delta_X, \emptyset)$.

5.2. Nous pouvons reprendre le programme esquissé précédemment.

Soit : R : $X_1 \to X_2$, R s'écrit $(\Delta_{X_1}, \emptyset) \begin{pmatrix} R_{11} & R \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} (\emptyset, \Delta_{X_2})^*$ quels que soient les $R_{ij}$ avec $(i, j) \neq (1,2)$. Ecrivons que $\begin{pmatrix} R_{11} & R \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}$ est transitif, nous obtenons les conditions.

$$R_{11} R \vee R R_{22} \subseteq R$$

$$R_{11}^2 \vee R R_{21} \subseteq R_{11}$$

$$R_{22}^2 \vee R_{21} R \subseteq R_{22}$$

$$R_{21} R_{11} \vee R_{22} R_{21} \subseteq R_{21}$$

Ces conditions entraînent que

$$R_{11} \subseteq (R^- R^*)^-, \ R_{22} \subseteq (R^* R^-)^- \text{ et}$$

$$R_{21} \subseteq (R^* R^- R^*)^-.$$

Il se trouve que le morphisme

$$\begin{pmatrix} (R^- R^*)^- & R \\ (R^* R^- R^*)^- & (R^* R^-)^- \end{pmatrix}$$

est réflexif et transitif.

L'ensemble des matrices M telles que R = $(\Delta_{X_1}, \emptyset)$ M $(\emptyset, \Delta_{X_2})^*$ et qui sont des préordres

1. a un plus grand élément que nous venons de calculer,

2. est stable par intersection et réunion.

Exercice. La matrice $\begin{pmatrix} (R^{-}\ R^{*})^{-} & R \\ (R^{*}\ R^{-}\ R^{*})^{-} \wedge R^{*-} & (R^{*}R^{-})^{-} \end{pmatrix}$ est transitive.

Lorsqu'on l'on voudra écrire $R = f\ T\ g^{*}$ avec telle ou telle propriété pour le préordre T on fera un tri parmi les matrices M ci-dessus.

5.3. On déduit aussi du précédent que les matrices M ayant des éléments diagonaux égaux ont elles aussi un plus grand élément.

$$\begin{pmatrix} (R^{-}\ R^{*})^{-} \cap (R^{*}\ R^{-})^{-} & R \\ (R^{*2}\ R^{-})^{-} \cap (R^{-}\ R^{*2})^{-} \cap (R^{*}\ R^{-}\ R^{*})^{-} & (R^{-}R^{*})^{-} \cap (R^{*}\ R^{-})^{-} \end{pmatrix}.$$

Ceci n'a de sens qu'au cas où X = Y, évidemment.

6. REPRESENTATIONS (SUITE)

6.1. Pour reprendre et compléter une terminologie introduite par A. Ducamp et J.C. Falmagne dans [2], nous dirons que :

- étant donnée une classe S de correspondances transitives et réflexives,

on appelle bi-S la classe des correspondances de la forme $f\ R\ g^{*}$ où f et g sont des applications et R une correspondance de la classe S ;

on appelle semi-S la classe des correspondances bi-S, c'est-à-dire de la forme $f\ R\ g^{*}$ etc... et avec en plus la condition $f\ R\ f^{*} \leqq g\ R\ g^{*}$,

... sans commentaire...

- plusieurs types de problèmes sont alors posés, le plus courant est : étant donné un système d'équations définissant S, trouver des équations définissant bi-S et semi-S.

6.2. Solutionnons les problèmes précédents dans le cas désormais bien classique où S est la classe des ordres totaux i.e. des correspondances vérifiant $T^2 \subset T$, $T \cup T^* = 1$, $T \cap T^* = \Delta$.

Les correspondances R qui sont des bi-ordres totaux sont celles pour lesquelles la matrice obtenue en 5.2. est totale (si $T \subset M$ et si $T \cup T^* = 1$ alors $M \cup M^* = 1$) i.e. celles pour lesquelles $R \cup (R\, R^{*-}\, R)^- = 1$, $(R^-\, R^*)^- \cup (R\, R^{-*})^- = 1$ et $(R^* R^-)^- \cup (R^{*-}\, R)^- = 1$ ; ce qui se résume en "R est une correspondance de Guttman-Ferrers".
On voit apparaître deux préordres totaux $T_g$ et $T_d$ tels que $T_g\, R = R = RT_d$ ("la forme en escalier de R"), $T_g = (R^- R^*)^-$ et $T_d = (R^*\, R^-)^*$ .

6.3. Les correspondances R qui sont des semi"ordres totaux" sont celles pour lesquelles la matrice obtenue en 5.3. est totale ce qui se résume en "R est une S-correspondance de Guttman-Ferrers".

On voit apparaître une solution totale de l'équation en X, $XR = RX = R$; solution qui marche ainsi pour la même équation en $R^{*-}$, $R \cup R^{*-}$ et $R \cap R^{*-}$.
On voit aussi immédiatement que R est transitif si et seulement si R est contenu dans une solution de l'équation $X\, R = R\, X = R$ donc dans la plus grande $(R^-\, R^*)^- \cap (R^*\, R^-)^-$.

Etc...

6.4. On voit que les techniques utilisées font sortir beaucoup de résultats de l'art divinatoire en offrant des stratégies de recherche.

## 7. REPRESENTATIONS SIMULTANEES

7.1. Etant donnée une famille $P_i : X \longrightarrow Y_i$ de correspondances, pour écrire les $P_i$ sous la forme $f\, Tg_i^*$ où les $f$ et $g_i$ sont des applications et $T$ un préordre, on se ramène à l'étude des représentations dans $X \amalg (\amalg Y_i)$ pour la correspondance $(P_i) : X \longrightarrow \amalg Y_i$.
Nous savons qu'il existe un plus grand préordre représentant

$$X \longrightarrow X : \bigcap_i (P_i^- \; P_i^*)^-$$

$$X \longrightarrow Y_i : P_i$$

$$Y_i \longrightarrow X : \bigcap_j (P_i^* \; P_j^- \, P_j^*)^-$$

$$Y_i \longrightarrow Y_j : (P_i^* \; P_j^-)^-$$

7.2. Demander qu'il existe un ordre total $T$ tel que $P_i = f\, Tg_i^*$ revient à demander que la matrice précédente soit totale ce qui se résume en "pour tout $(i,j)$ le couple $(P_i, P_j)$ est de Guttman-Ferrers".

7.3. A vouloir de plus que les $g_i\, Tg_i^*$ soient tous égaux ça se complique un peu. Parce qu'il n'existe pas toujours de matrice M maximum transitive et vérifiant $Y_i \longrightarrow Y_i = Y_j \longrightarrow Y_j$.

EXEMPLE : $X = \{0\}$, $Y_1 = \{1,2\}$, $Y_2 = \{3,4\}$, $P_1 = \emptyset$, $P_2 = \{(0,4)\}$.
Mais on va s'en tirer grâce à la construction suivante.

PROPOSITION

Soient $P_i : X \longrightarrow Y_i$, $T_o : X \longrightarrow X$, $T_i : Y_i \longrightarrow T_j$

des correspondances, les $T_j$ étant transitives et $T_o P_i \subsetneq P_i$, $P_i T_i \subseteq P_i$.
Choisissons un des indices, soit s, et considérons la nouvelle famille
$X' = X \amalg Y_s$, $Y_i' = Y_i$ si $i \neq s$,

$$X' \longrightarrow X' : \begin{pmatrix} T_o & P_s \\ C_s & T_s \end{pmatrix} \quad \text{où } C_s = (P_s^* \; T_o^-)^- \cap (T_s^- \; P_s^*)^-$$

$$X' \longrightarrow Y_i' : \begin{pmatrix} P_i \\ C_s P_i \end{pmatrix}$$

$$Y_i' \longrightarrow Y_i' : T_i.$$

Et bien cette nouvelle famille vérifie les mêmes propriétés que la famille primitive. De plus, si les $T_o$ et $T_s$ sont des préordres totaux, il en est de même de $\begin{pmatrix} T_o & P_s \\ C_s & T_s \end{pmatrix}$.

La démonstration de cette proposition n'offre pas de difficulté particulière hors de l'habitude du maniement abstrait des correspondances.

Avec la construction ainsi décrite, si les $T_i$ sont des ordres totaux, on construit ainsi, pas à pas, n ! préordres totaux sur $X \amalg (\amalg Y_i)$ (où n est le cardinal de la famille). En particulier, pour revenir au problème qui nous occupe : à vouloir que les $g_i T g_i^*$ soient tous égaux (T étant un ordre total) on a que $\bigcap_i (P_i^* \; P_i^-)^-$ est total ainsi que $\bigcap_i (P_i^- \; P_i^*)^-$, ce qui se traduit par "pour tout (i,j), les couples $(P_i, P_j)$ et $(P_i^*, P_j^*)$ sont de Guttman-Ferrers". La proposition précédente assure la réciproque.

EXEMPLE

Appliquons la construction à l'exemple précédent, pour les différents choix possibles. On obtient les deux matrices

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Ce qui donne le préordre total

$3 < 1 < 2 < 0 = 4$

(0 = 4 voulant dire que 0 et 4 sont congrus modulo l'équivalence associée)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |

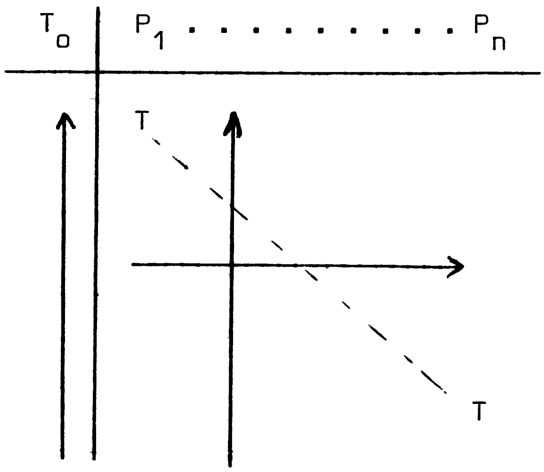
$1 < 2 < 3 < 0 = 4$

COMMENTAIRE

Dans les n ! constructions précédentes on obtient toujours les mêmes $X \longrightarrow Y_i$, à savoir $(P_i^* \; T_o^-)^- \cap (T_i^- \; P_i^*)^-$.

Si la famille des $P_i$ est totalement ordonnée par inclusion, si on l'ordonne $P_n \subseteq P_{n-1} \subseteq \dots \subseteq P_2 \subseteq P_1$ et si on prend $T_i = \bigcap_j (P_j^- \; P_j^*)^-$, pour tout $i \neq o$ ; en faisant les choix dans l'ordre 1, 2, ..., n on obtient une matrice ayant la structure suivante.

Il faut remarquer la forme tableau de la famille $P_i$ donnée par les conditions de la proposition.




(sur les lignes les éléments décroissent de gauche à droite, sur les colonnes les éléments décroissent de bas en haut).

8. MONOLOGUE

Se forcer à n'utiliser, dans les constructions, que les opérations formelles sur les relations ne relève pas d'un souci d'esthétique ou de formalisme ou de généralisation déshydratée.

En fait on est sûr ainsi de s'interdire l'introduction de mesures fantomes, tout en contrôlant la famille des opérateurs utilisés.

# BIBLIOGRAPHIE

(1) COGIS O., A propos des quasi-ordres, Note, Math. Sci. Hum., 72, (1980), 107-111.

(2) DUCAMP A. et FALMAGNE J.C., Composite Measurement, Journal of Mathematical Psychology, vol. 6, octobre 1969, 359-390.

(3) MIRKIN B.G., Description of some relations on the set of real-line intervals, J. of Math. Psychology, 9, (1972), 243-252.

(4) MONJARDET Bernard, Axiomatiques et propriétés des quasi-ordres, Mathématiques et Sciences Humaines, 63, (1978), 51-82.

(5) MONJARDET B. et BRESSON D., quasi-ordres, intervalles, etc... une bibliographie, Math. Sci. Hum., 63, (1978), 83-92.

(6) OLIVIER J.P. et SERRATO D., catégories de Dedekind et correspondances dans les catégories classiques et ailleurs, multigraphié, Mathématiques des Sciences Humaines, Université Paul Valéry, Montpellier, France.

(7) OLIVIER J.P. et SERRATO D., Catégories de Dedekind. Morphismes transitifs dans les catégories de Schröder, C.R. Acad. Sc. Paris, 290, (1980) série A, 939-941.

# E C R I T   A P R E S

Cet article, sous des formes antérieures, a eu plusieurs lecteurs, dont Bernard MONJARDET, à qui je dois d'utiles suggestions après une discussion enrichissante.

Après lecture, la plupart des questions hors texte portaient sur la représentabilité des relations de Guttman-Ferrers (ensemblistes) comme ensemble d'intervalles d'un ensemble totalement ordonné.

Un examen un peu attentif de la matrice obtenue au paragraphe 5.2. va permettre de répondre : en effet R est transitif si et seulement si $\Delta \subseteq (R^* R^- R^*)^-$, donc on obtient une représentation $R = f \leqslant g^*$ avec $\Delta \subseteq g \leqslant f^*$. En traduisant cela en terme ensembliste : soit L l'ensemble obtenu en prenant le quotient de $X \amalg Y$ par la congruence

$$\begin{pmatrix} (R^- R^*)^- \cap (R R^{-*})^- & R \cap (R R^{*-} R)^- \\ R^* \cap (R^* R^- R^*)^- & (R^* R^-)^- \cap (R^{*-} R)^- \end{pmatrix} ;$$

remarquons en passant que $R \cap (R R^{*-} R)^-$ est une correspondance di-fonctionnelle (paragraphe 2) ; notons $\leqslant$ l'ordre partiel quotient du préordre défini par la matrice du paragraphe 5.2. ; soit I le graphe de la correspondance $\leqslant$ ; le fait que R soit transitive permet, d'après les remarques antérieures, de définir une application h de X = Y vers I ($\Delta \subseteq g \leqslant f^*$ : à x on fait correspondre (xg, xf) ; maintenant équipons I de la correspondance $H = pr_2 \leqslant pr_1{}^*$; on voit que $R : h\, H\, h^*$. On pourrait écrire tout cela pour les correspondances dans un prétopos booléen.

Résumons : en terme ensembliste, on vient d'écrire toute relation de Guttman-Ferrers transitive sous la forme $h\,H\,h^*$ où $h$ est une application à valeur dans l'ensemble des intervalles d'un ensemble totalement ordonné (un intervalle est une partie $M$ vérifiant : $x \in M$, $y \in M$ et $x \leqslant z \leqslant y \Rightarrow z \in M$), $H$ étant la correspondance définie par $(M, N) \in H$ si et seulement si $M \mathbin{\overline{\pi}} N \subseteq \leqslant$. Pour montrer la réciproque, et pour ne pas se battre avec les éléments, on plonge l'ensemble totalement ordonné $L$, duquel on a sorti les intervalles, dans un ensemble totalement ordonné $L'$ de telle façon qu'un intervalle de $L$ soit la trace d'un intervalle fermé de $L'$ : on prend pour $L'$ les couples $(A,B)$ où $A$ est une partie commençante de $L$, $B$ une partie finissante, le complémentaire de $A \cup B$ ayant au plus un élément, $A$ et $B$ étant disjoints ; on ordonne $L'$ par $(A,B) \leqslant (A',B')$ si et seulement si $A \subseteq A'$ et $B' \subseteq B$. Tout intervalle $M$ de $L$ est la trace sur $L$ de l'intervalle $[Mi, Ms]$ de $L'$ défini par :

$$Mi = \left(\left\{\forall a \in M,\ x < a\right\}, \left\{\exists\, a \in M,\ a < x\right\}\right)$$

$$Ms = \left(\left\{\exists\, a \in M,\ x < a\right\}, \left\{\forall\, a \in M,\ a < x\right\}\right) \quad ;$$

le plongement faisant correspondre à $a$ le couple

$(]\leftarrow, a[\ ,\ ]a, \rightarrow[)$, etc...

En clôture de ce long post-scriptum, signalons que Henry Crapo a lui aussi mis à jour et utilisé le plus grand morphisme transitif sur la somme dans son article "Unities and Negations : on the representation of finite lattices, Journal of Pure and Applied Algebra, 23 (1982), 109-135".