MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

JOSEPH ABDOU

Stabilité de la fonction veto, cas du veto maximal

Mathématiques et sciences humaines, tome 80 (1982), p. 39-65

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1982__80__39_0>

Math. Sci. hum. (*20*[e] année, n°80, *1982*, p.39-65)

STABILITE DE LA FONCTION VETO
CAS DU VETO MAXIMAL

Joseph ABDOU *

INTRODUCTION

Soit N un comité et A un ensemble d'issues ; tous deux, ensembles finis. On suppose que chaque individu $i \in N$ a un ordre de préférence strict sur A. Une correspondance de choix social est une application qui à tout profil associe une sélection d'issues dans A.

Un moyen simple de définir une sélection est de procéder à des duels systématiques entre les candidats. Si une majorité préfère a à b, on élimine b. On sélectionne alors le candidat qui bat tous les autres. C'est le *gagnant de Condorcet*. Malheureusement un tel gagnant n'existe pas dans un très grand nombre de cas.

Deux traits semblent être à l'origine de cet échec :

- Une coalition possède tout le pouvoir ou rien.
- Seules les coalitions majoritaires possèdent un pouvoir.

Une idée développée depuis Von Neumann et Morgenstern [10] est de libérer la seconde condition. On appelle *coalition gagnante*, une coalition qui possède le pouvoir de bloquer les candidats. C'est la théorie du *jeu simple*.

---

* Laboratoire d'Econométrie, Université Pierre et Marie Curie (PARIS VI)
CEREMADE, ERA 2 49., Université Paris-Dauphine (PARIS IX)

Là aussi, on peut caractériser exactement les jeux simples qui sélectionnent toujours des candidats approuvés par toutes les coalitions, cf [1] [2].

Dans un jeu simple, une coalition gagnante a tout le pouvoir, elle peut bloquer n'importe quel sous-ensemble propre de candidats.

Une coalition non gagnante n'a aucun pouvoir. Il est naturel alors d'un point de vue éthique, d'accorder un pouvoir intermédiaire à chaque coalition. Le principe du *veto proportionnel* étudié par H. Moulin [4] satisfait à cette nouvelle exigence. Si le pouvoir de veto est grosso-modo proportionnel au nombre de candidats unis dans une coalition, il est toujours possible de sélectionner un bon candidat (stabilité). Mais la réciproque est plus intéressante, un veto qui ne dépend que du cardinal de la coalition n'est stable que s'il est majoré par le veto proportionnel.

Dans cette étude, nous levons toute contrainte sur la répartition du pouvoir. Nous faisons la théorie générale de la fonction veto. A toute coalition $T \subset N$ sera associée la famille $V(T)$ des parties de A que T peut bloquer.

Soit alors un profil $(R_i)i \in N$ et un candidat $a \in A$. Nous dirons que la coalition T *bloque* le candidat a si T peut forcer le choix dans B, composé de candidats qui lui sont tous préférés au candidat proposé a, et cela en bloquant la partie complémentaire $A-B$. Le *coeur* est l'ensemble des candidats non-bloqués. La fonction veto est *stable* quand son coeur est non vide pour tout profil.

Donnons un exemple :

$N = \{1,2,3\}$ $\qquad\qquad$ $A = \{a, b, c, d, e\}$

Pour $T \subset N$ on associe $V(T)$ tel que $B \in V(T) \Leftrightarrow |B| \leqslant \ell(T)$

où $|B|$ = card B. et où ℓ est défini de la manière suivante :

$\ell(\phi) = 0$

$\ell(1) = 0 \qquad \ell(2) = 1 \qquad \ell(3) = 2$

$\ell(1,2) = 2 \qquad \ell(1,3) = 3 \qquad \ell(2,3) = 4$

$\ell(1,2,3) = 4$

Supposons qu'on a le profil suivant :

R_1 : $a < b < c < d < e$

R_2 : $b < c < d < e < a$

R_3 : $c < d < e < a < b$

Il n'y a pas de gagnant de Condorcet : cependant, utilisant son pouvoir de veto, $\ell(2) = 1$, l'agent 2 peut s'opposer au choix du singleton {b} et s'assurer ainsi un choix parmi {c,d,e,a} on dit que l'agent 2 bloque {b} et que {b} est dominé. L'agent {3}, usant de son pouvoir, $\ell(3) = 2$, peut bloquer la paire {c,d}. c et d sont dominés.

La coalition {2,3} joignant ses forces a un pouvoir $\ell(2,3) = 4$; elle peut donc s'opposer à {b,c,d,e} , et donc forcer le choix de {a} qu' elle préfère a {e}. e est dominé.

Seul a n'est pas dominé, le coeur de la fonction veto est {a}.

Notre exemple a été choisi dans une classe importante de fonctions veto : celle des *fonctions veto additives*. Soient en effet les 3 nombres :

$\alpha_1 = \frac{1}{6} \quad \alpha_2 = \frac{1}{3} \quad \alpha_3 = \frac{1}{2}$.

On a : $V(T) = \{B / \ |B| < \sum_{i \in T} \alpha_i \}$

H. Moulin et B. Peleg ont démontré que pour qu'un veto soit stable, il suffit qu'il soit additif.

Dans cette étude nous cherchons des conditions nécessaires pour qu' une fonction veto soit stable.

Nous nous intéressons plus particulièrement à des fonctions veto qui répartissent le pouvoir d'une manière *maximale*. Le point de mire de notre recherche est *l'additivité*. Nous démontrerons que les fonctions veto maximales et stables vérifient deux propriétés qui s'approchent de l'additivité : *la sous-additivité et la sur-additivité.*

N.B. Cette étude est auto-suffisante. Toutes les notions utilisées sont définies dans le texte. On n'abordera pas le problème de l'implémentation. cf [5] [6] [7].

I - FONCTION VETO - DEFINITIONS - EXEMPLES.

0. NOTATIONS :

A désigne l'ensemble des issues. N l'ensemble des agents. Tous les deux sont des ensembles finis. $\mathcal{P}(N)$ désigne l'ensemble des parties de N. $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ sera noté $\mathcal{P}^2(A)$.

1. DEFINITION :

Une fonction veto est une application :

$$V : \mathcal{P}(N) \to \mathcal{P}^2(A)$$

vérifiant les 3 axiomes suivants :

(1) $V(\phi) = \{\phi\}$

(2) $\forall\, T \in \mathcal{P}(N)$, $\phi \in V(T)$ et $A \notin V(T)$

(3) $\forall\, T \in \mathcal{P}(N)$, $\forall\, B \in \mathcal{P}(A)$, $\forall\, C \in \mathcal{P}(A)$

$$B \in V(T) \text{ et } C \subset B \Rightarrow C \in V(T)$$

Ces axiomes formalisent le concept intuitif de veto. Cependant la plupart des fonctions veto que nous aurons à considérer vérifieront en outre la propriété suivante dite "souveraineté". Elle exprime que le comité N a pleins pouvoirs en ce qui concerne le choix de l'issue.

2. DEFINITION :

Soit V une fonction veto, elle sera dite souveraine si :

(4) $V(N) = \mathcal{P}(A) - \{A\}$.

L'interprétation des axiomes (1),(2),(3) est naturelle : $B \in V(T)$ où B est une partie d'issues, T une coalition, signifie que la coalition T peut bloquer B, c.a.d. qu'elle a le pouvoir d'interdire le choix d'une issue de B.

Les deux propriétés qui suivent décrivent la répartition possible du pouvoir de veto entre les diverses coalitions. Une fonction veto est sur-additive si le pouvoir de deux coalitions auparavant disjointes, est au moins équivalent à la réunion de leurs pouvoirs respectifs : l'union fait la force. Elle est sous-additive quand la force de l'union ne dépasse pas l'union de la force. Formellement on a les deux définitions :

3. DEFINITION : *Une fonction veto* V *est sur-additive si :*

(5) $$\forall T_1 \in \mathcal{P}(N) \quad \forall T_2 \in \mathcal{P}(N) \quad \forall B_1 \in \mathcal{P}(A) \quad \forall B_2 \in \mathcal{P}(A)$$

$$[T_1 \cap T_2 = \phi,\ B_1 \in V(T_1) \text{ et } B_2 \in V(T_2)] \Rightarrow B_1 \cup B_2 \in V(T_1 \cup T_2)$$

4. DEFINITION : *Une fonction veto* V *est sous-additive si :*

(6) $$\forall T_1 \in \mathcal{P}(N) \quad \forall T_2 \in \mathcal{P}(N) \quad \forall B_1 \in \mathcal{P}(A) \quad \forall B_2 \in \mathcal{P}(A)$$

$$[B_1 \cap B_2 = \phi \text{ et } B_1 \cup B_2 \in V(T_1 \cup T_2)] \Rightarrow B_1 \in V(T_1) \text{ ou } B_2 \in V(T_2)$$

5. REMARQUE : *Une fonction veto sur-additive vérifie*, en particulier :

(7) $$(\forall r \in \mathbb{N}^*)(\forall B_i \in \mathcal{P}(A)\ i = 1,\dots r)\ (\forall T_i \in \mathcal{P}(N)\ i = 1,..r)$$

$$\left.\begin{array}{l} i \neq j \quad T_i \cap T_j = \phi \\ B_i \in V(T_i) \quad i = 1,\dots r \end{array}\right\} \Rightarrow \cup B_i \neq A$$

dont un cas particulier est le suivant :

(7') $$(\forall T \in \mathcal{P}(N))\ (\forall B \in \mathcal{P}(A))\quad B \in V(T) \Rightarrow B^c \notin V(T^c)$$

de plus on a :

(8) $$(\forall T \in \mathcal{P}(N))\ (\forall R \in \mathcal{P}(N))\ (\forall B \in \mathcal{P}(A))$$

$$(T \subset R \text{ et } B \in V(T)) \Rightarrow B \in V(R)$$

(B^c, T^c désignent les complémentaires de B et de T).

6. DEFINITION : *Une fonction veto* V *est dite croissante si la propriété (8) est vérifiée.*

7. REMARQUE : Fonction veto et Fonction d'effectivité.

Soit $E : \mathcal{P}(N) - \{\phi\} \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(A) - \{\phi\})$

vérifiant $$\forall T \in \mathcal{P}(N) - \{\phi\}\ \forall B \in \mathcal{P}(A) - \{\phi\}$$

$$B \in V(T) \Leftrightarrow A\text{-}B \in E(T)$$

Si V vérifie (1), (2), (3), (4), (5) alors E est la fonction d'effectivité définie par Moulin et Peleg [6]. On aurait pu, dans tout ce chapitre, parler de fonction effectivité au lieu de fonction veto, les propriétés de l'une étant directement convertibles en des propriétés de l'autre. Il nous semble cependant que l'exploration des propriétés d'additivité est plus naturelle en termes de fonction veto étant donnée l'interprétation intuitive de celle-ci.

8. DEFINITION : *Une fonction veto* V *est maximale si :*

$$(9) \qquad \forall T \in \mathcal{P}(N) \quad \forall B \in \mathcal{P}(A) \qquad B \notin V(T) \Rightarrow B^c \in V(T^c)$$

9. REMARQUE : Si on se restreint à la classe des fonctions veto vérifiant (7') la maximalité au sens de la définition (8) équivaut à la maximalité au sens de l'inclusion.

Le premier exemple que nous donnons d'une fonction veto est lié au concept de jeu simple qui se trouve être un cas particulier de la fonction veto. cf. [1] [2].

EXEMPLE 1 : *Jeu simple-Veto associé à un jeu simple*

10. DEFINITION : *Un jeu simple est un couple* (N,W) *vérifiant :*

$$(11) \qquad \begin{cases} W \subset \mathcal{P}(N) \\ \phi \notin W \\ \forall T \in \mathcal{P}(N) \quad \forall R \in \mathcal{P}(N) \quad [T \in W \text{ et } T \subset R] \Rightarrow R \in W \end{cases}$$

L'ensemble W est dit ensemble des coalitions gagnantes.

Soit $\Gamma = (N,W)$ un jeu simple, on dit :

- *qu'il est nul si :* $W = \phi$
- *qu'il est propre si :* $\forall T \in \mathcal{P}(N) \quad T \in W \Rightarrow T^c \notin W$
- *qu'il est fort si :* $\forall T \in \mathcal{P}(N) \quad T \notin W \Rightarrow T^c \in W$
- *qu'il est faible si :* $\bigcap_{T \in W} T \neq \phi$
- *qu'il est dictatorial si :* $\bigcap_{T \in W} T = \{e\}$ (e est le *dictateur*)

11. DEFINITION : *Soit* A *un ensemble d'issues, et* $\Gamma = (N,W)$ *un jeu simple. La fonction veto canoniquement associée à* (Γ,A) *est l'application* $V_{\Gamma,A}$:

$$V_{\Gamma,A} : \mathcal{P}(N) \to \mathcal{P}^2(A)$$

vérifiant :

$$(12) \qquad \begin{cases} T \in W \Rightarrow V_{\Gamma,A}\,(T) = \mathcal{P}(A) - \{A\} \\ T \notin W \Rightarrow V_{\Gamma,A}\,(T) = \{\phi\} \end{cases}$$

12. REMARQUE : $V_{\Gamma,A}$ est souveraine et croissante. Inversement à une fonction veto V souveraine et croissante on peut associer un jeu simple $\Gamma_V = (N, W_V)$ où l'ensemble des coalitions gagnantes W_V est l'ensemble suivant :

$$W_V = \{T \in \mathcal{P}(N) \;/\; V(T) = \mathcal{P}(A) - \{A\}\}$$

Partant d'un jeu simple $\Gamma = (N,W)$ et d'un ensemble d'issues, A, il existe à priori plusieurs manières de leur associer une fonction veto V vérifiant $\Gamma_V = \Gamma$ mais $V_{\Gamma,A}$ définie plus haut est minimale parmi toutes, à savoir :

$$(V \text{ fonction veto}) \;\; \Gamma_V = \Gamma \;\Rightarrow\; V_{\Gamma,A}(T) \subset V(T) \;\forall\; T \in \mathcal{P}(N).$$

La proposition suivante montre comment se fait la conversion d'une propriété d'un jeu simple en termes de la fonction veto associée :

PROPROSITION 1 :

Soient $\Gamma = (N,W)$ un jeu simple non nul, A un ensemble d'issues $V_{\Gamma,A}$ la fonction veto associée à (Γ,A) :

Si Card $A \geq 2$ on a :

(a) Γ propre $\Leftrightarrow$ $V_{\Gamma,A}$ sur-additive.

(b) Γ propre et fort $\Leftrightarrow$ $V_{\Gamma,A}$ sur-additive maximale.

Si Card $A \geq 3$ on a :

(c) $V_{\Gamma,A}$ sous-additive $\Leftrightarrow \forall T_1 \in \mathcal{P}(N) \quad \forall T_2 \in \mathcal{P}(N)$

$$T_1 \cup T_2 \in W \Rightarrow T_1 \in W \text{ ou } T_2 \in W \qquad (*)$$

(d) $V_{\Gamma,A}$ sous-additive et sur-additive $\Leftrightarrow$ Γ dictatoriale.

DEMONSTRATION

La démonstration de (a) et (b) est facile à vérifier par le lecteur. Montrons (c) : partons de $V_{\Gamma,A}$ sous-additive :

$T_1 \cup T_2 \in W \Rightarrow A - \{a\} \in V(T_1 \cup T_2)$ où $a \in A$.

Card $A \geqslant 3$ $\exists B_1$ $\exists B_2$ $B_1 \neq \phi$ $B_2 \neq \phi$. $B_1 \cap B_2 = \phi$

$$B_1 \cup B_2 = A - \{a\}$$

$V_{\Gamma,A}$ sous-additive entraîne : $B_1 \in V(T_1)$ ou $B_2 \in V(T_2)$ d'après la définition de $V_{\Gamma,A}$ (relations (12)) on a : $T_1 \in W$ ou $T_2 \in W$, d'où (∗). La réciproque est par ailleurs évidente.

Démontrons (d) : Soit $V_{\Gamma,A}$ sous-additive et sur-additive. N étant fini la propriété :

(∗) $T_1 \cup T_2 \in W \Rightarrow T_1 \in W$ ou $T_2 \in W$

est équivalente à la suivante :

(∗) (∗) $\forall T \in W$ $\exists e \in T$ $\{e\} \in W$

Soit W^* l'ensemble des coalitions gagnantes minimales pour l'inclusion : $N \in W$ puisque le jeu est non nul.

d'après (∗ ∗) : $\exists e \in N$ $\{e\} \in W$, ; Montrons $W^* = \{\{e\}\}$

Supposons : $\exists T \neq \{e\}$; $T \in W^*$

T minimal $\Rightarrow$ $e \notin T$

Γ étant propre $\{e\} \cap T = \phi$ constitue une contradiction :

d'où $W^* = \{\{e\}\}$ et $\{e\} = \bigcap_{T \in W} T$

La réciproque est évidente.

<u>EXEMPLE 2</u> : *Fonctions veto additives*

Soit m une mesure de probabilité strictement positive sur A et soit ℓ une mesure de probabilité strictement positive sur N.

Cette donnée est équivalente à celle des 2 vecteurs :

$$\bar{m} = (m_a)_{a \in A} \qquad \bar{m} \in R_{+*}^{A} \qquad \sum_{a \in A} m_a = 1$$

$$\bar{\ell} = (\ell_i)_{i \in N} \qquad \bar{\ell} \in R_{+*}^{N} \qquad \sum_{i \in N} \ell_i = 1.$$

$$\forall B \in \mathcal{P}(A) \quad \text{on notera : } m(B) = \sum_{a \in B} m_a$$

$$\forall T \in \mathcal{P}(N) \quad \text{on notera : } \ell(T) = \sum_{i \in T} \ell_i$$

On définit une fonction veto de la manière suivante :

$$(13) \quad \begin{cases} V_{(\bar{\ell},\bar{m})}(\phi) = \{\phi\} \\ \forall T \in \mathcal{P}(N) - \{\phi\} : V_{(\bar{\ell},\bar{m})}(T) = \{B \in \mathcal{P}(A) / m(B) < \ell(T)\} \end{cases}$$

On vérifie que $V(\bar{\ell},\bar{m})$ réalise bien les axiomes (1),(2),(3). De plus elle vérifie (4), (5), (6) c'est-à-dire qu'elle est à la fois : souveraine, sur-additive et sous-additive.

13. DEFINITION : *Soit* V *une fonction veto, elle est dite additive si : il existe deux vecteurs* $\bar{\ell} \in R^N_{+*}$ et $\bar{m} \in R^A_{+*}$ tels que : $V = V(\bar{\ell},\bar{m})$

On remarque par ailleurs que pour une telle fonction le couple $(\bar{\ell},\bar{m})$ n'est point unique.

14. REMARQUE :

Soit un jeu simple $\Gamma = (N,W)$, un ensemble d'issues A et la fonction veto $V_{\Gamma,A}$ associée.(cf.exemple 1). Pour que $V_{\Gamma,A}$ soit additive, il faut qu'elle soit à la fois sur-additive et sous-additive.

D'autre part $V_{\Gamma,A}$ sur-additive et sous-additive équivaut à : soit card $A \geqslant 3$ et Γ dictatoriale, soit card $A = 2$ et Γ propre.

Inversement si l'on se donne Γ dictatoriale alors $V_{\Gamma,A}$ est additif. Posons à cet effet $|N| = n \quad |A| = p$

$$\bar{\ell} = (\ell_i)_{i \in N} \quad \begin{cases} \ell_i = \dfrac{1}{np} \quad \forall i \in N - \{e\} \quad \text{(e dictateur)} \\ \ell_e = 1 - \dfrac{n-1}{np} \end{cases}$$

$$\bar{m} = (m_a)_{a \in A} \qquad m_a = \frac{1}{p} \quad a \in A$$

on a $$V_{\Gamma,A} = V_{(\overline{\ell},\overline{m})}.$$

Par contre si card A=2 et Γ est propre on ne peut pas affirmer que $V_{\Gamma,A}$ est additif. On donnera d'ailleurs plus loin un contre-exemple.

EXEMPLE 3 : *Fonction veto neutre ; fonction veto cardinale.*

On pose : $|N| = n$ $\quad |A| = p$.

Une fonction veto est neutre quand il y a symétrie parmi les issues.

15. DEFINITION :

Soit V *une fonction veto ; elle est dite neutre si pour toute permutation* σ *de l'ensemble* A *on a :*

$$\forall T \in \mathcal{P}(N) \qquad \forall B \in \mathcal{P}(A) \qquad B \in V(T) \Rightarrow \sigma(B) \in V(T).$$

15 bis. REMARQUE : La définition ci-dessus équivaut à la suivante :

$$\forall T \in \mathcal{P}(N) \qquad \forall B \in \mathcal{P}(A) \qquad \forall B' \in \mathcal{P}(A)$$

$$B \in V(T) \quad \text{et} \quad |B'| = |B| \Rightarrow B' \in V(T)$$

où $|B|$ note le cardinal de B.

Si bien que la connaissance du cardinal de B est une information suffisante pour déterminer son appartenance ou sa non-appartenance à $V(T)$.

16. DEFINITION :

Soit V *une fonction veto neutre.*

La fonction veto cardinale associée à V *est l'application :*

$v : \mathcal{P}(N) \to \{o,\dots p-1\}$ *définie par :* $\quad v(T) = \max\limits_{B \in V(T)} |B|$.

Remarquons que $\quad v(\phi) = 0$.

Inversement à toute fonction $v : \mathcal{P}(N) \to \{o,\dots p-1\}$ vérifiant $v(\phi) = 0$ on peut associer d'une manière unique une fonction veto neutre comme suit :

$$(15) \qquad \forall T \in \mathcal{P}(N) \qquad V(T) = \{B \in \mathcal{P}(A) \;/\; |B| \leqslant v(T)\}\ .$$

Il est immédiat que V vérifie (1), (2), (3).

La proposition suivante traduit les propriétés d'une fonction veto neutre en termes cardinaux.

PROPOSITION 2 : Soit V une fonction veto neutre et v la fonction cardinale associée, on a alors les équivalences suivantes :

(a) V souveraine $\Leftrightarrow v(N) = p-1$ (4^*)

(b) V sur-additive $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall T_1 \in \mathcal{P}(N) \quad \forall T_2 \in \mathcal{P}(N) \\ T_1 \cap T_2 = \phi \Rightarrow v(T_1 \cup T_2) \geq v(T_1) + v(T_2) \end{cases}$ (5^*)

(c) V sous-additive $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall T_1 \in \mathcal{P}(N) \quad \forall T_2 \in \mathcal{P}(N) \\ v(T_1 \cup T_2) \leq v(T_1) + v(T_2) + 1 \end{cases}$ (6^*)

(d) V maximale $\Leftrightarrow \forall T \in \mathcal{P}(N)$ $v(T) + v(T^c) \geq p-1$ (9^*)

DEMONSTRATION :

La vérification de ces équivalences est facile. Démontrons à titre d'illustration l'équivalence (c) :

Supposons V sous-additive. Si (6^*) n'était pas vérifié, il existerait

$$T_1 \in \mathcal{P}(N) \qquad T_2 \in \mathcal{P}(N) \qquad v(T_1 \cup T_2) \geq v(T_1) + v(T_2) + 2$$

Il existerait aussi : $B_1 \in \mathcal{P}(A)$ $B_2 \in \mathcal{P}(A)$ vérifiant :

$$B_1 \cap B_2 = \phi \quad |B_1| = v(T_1) + 1$$
$$|B_2| = v(T_2) + 1$$

on aurait : $B_1 \cup B_2 \in V(T_1 \cup T_2)$ $B_1 \notin V(T_1)$ et $B_2 \notin V(T_2)$

contradiction.

Réciproquement si (6^*) est vérifié, prenons $T_1 \in \mathcal{P}(N)$ $T_2 \in \mathcal{P}(N)$ $B_1 \in \mathcal{P}(A)$ $B_2 \in \mathcal{P}(A)$ vérifiant $B_1 \cap B_2 = \phi$ $B_1 \cup B_2 \in V(T_1 \cup T_2)$

on a : $|B_1 \cup B_2| \leq v(T_1 \cup T_2) \leq v(T_1) + v(T_2) + 1$

d'où : $|B_1| + |B_2| \leq v(T_1) + v(T_2) + 1$

$(|B_2| - v(T_1)) + (|B_2| - v(T_2)) \leq 1$

et donc $\quad |B_1| - v(T_1) \leqslant 0 \quad$ ou $\quad |B_2| - v(T_2) \leqslant 0$

c.a.d. $\quad B_1 \in V(T_1) \quad$ ou $\quad B_2 \in V(T_2)$

d'où la sous-additivité de V.

La proposition suivante combine les propriétés des veto additifs et neutres.

PROPOSITION 3 : *Soit* V *une fonction veto additive et neutre. Alors elle est représentable par* $V(\bar{\ell},\bar{m}^*)$ où $\bar{\ell} \in R^N_{+*}$ et $\bar{m}^* = (m_a)_{a \in A}$ où $m_a = \frac{1}{p}$ $a \in A$.

DEMONSTRATION :

Il existe $(\bar{\ell},\bar{m}) \in R^N_{+*} \times R^A_{+*}$ tel que $V = V(\bar{\ell},\bar{m})$

posons $V^* = V(\bar{\ell},\bar{m}^*)$ où $m^*_a = \frac{1}{p}$ $a \in A$

montrons : $\quad V = V^*$

Soient $\quad T \in \mathcal{P}(N) \quad B \in \mathcal{P}(A) \quad B \in V(T) \quad$ on a :

$m(B) < \ell(T)$

posons $\quad |B| = k \quad$ V étant neutre on peut écrire :

$$\forall\ B' \in \mathcal{P}(A) \qquad |B'| = k \Rightarrow m(B') < \ell(T)$$

Pour k et T fixés il y a C^k_p inégalités de ce genre où C^k_p est le nombre de combinaisons de p, k à k.

En additionnant ces inégalités on a :

$$\sum_{|B'| = k} \left(\sum_{a \in B'} m_a \right) < \sum_{|B'| = k} \ell(T)$$

$$\Leftrightarrow \quad C^{k-1}_{p-1} \left(\sum_{a \in A} m_a \right) < C^k_p\ \ell(T)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{k}{p} < \ell(T) \qquad \text{car} \quad \sum_{a \in A} m_a = 1$$

d'où $\quad B \in V^*(T)$.

Réciproquement si $B \in V^*(T)$ les 3 dernières inégalités sont vraies d'où :

$$\sum_{|B'| = k} \left(\sum_{a \in B'} m_a - \ell(T) \right) < o$$

ce qui entraîne l'existence d'un B' vérifiant $|B'| = k$

et $$\sum_{a \in B'} m_a - \ell(T) < o$$

d'où $B' \in V(T)$ et d'après la neutralité : $B \in V(T)$ on a montré :

$$\forall B \in \mathcal{P}(A) \qquad \forall T \in \mathcal{P}(N)$$

$$B \in V(T) \Leftrightarrow B \in V^*(T)$$

C.Q.F.D.

COROLLAIRE 4 : *A toute fonction veto neutre et additive la fonction cardinale associée est donnée par :*

$$\forall T \in \mathcal{P}(N) \setminus \{\Phi\} \quad v(T) = \left\lceil p \sum_{i \in T} \ell_i \right\rceil - 1$$

$$v(\Phi) = o$$

où $\lceil x \rceil$ est l'entier tel que : $\lceil x \rceil - 1 < x \leqslant \lceil x \rceil \Leftrightarrow x \leqslant \lceil x \rceil < x + 1$

DEMONSTRATION :

D'après le résultat précédent :

$$V(T) = \max\{|B| \ / \ m^*(B) < \ell(T)\} = \max\ \{k / \tfrac{k}{p} < \ell(T)\} =$$
$$= \max\ \{k / \ \ k < p\ \ell(T)\} = \left\lceil p - \ell(T) \right\rceil - 1$$

EXEMPLE 4 : *Fonction veto anonyme et neutre.*

17. DEFINITION : *Soit* V *une fonction veto ; elle est dite anonyme si : pour toute permutation* θ *de l'ensemble* N *on a :*

$$\forall T \in \mathcal{P}(N) \qquad \forall B \in \mathcal{P}(A) \qquad B \in V(T) \Rightarrow B \in V(\theta(T))$$

18. REMARQUE : La définition précédente équivaut à la suivante :
V est anonyme si :

$$\forall T \in \mathcal{P}(N) \quad \forall R \in \mathcal{P}(N) \quad \forall B \in \mathcal{P}(A)$$
$$|T| = |R| \Rightarrow (B \in V(T) \Leftrightarrow B \in V(R)) .$$

19. REMARQUE : Si une fonction veto est anonyme et neutre on peut lui associer une fonction veto cardinale :

$$v : \{o,\dots n\} \to \{o,1,\dots p-1\}.$$

$$t \in \{o,\dots,n\} \quad v(t) = \max \{|B| / \exists T \in \mathcal{P}(N) |T| = t \quad B \in v(T)\}$$

elle vérifie $\qquad v(o) = o$

Inversement à une telle fonction cardinale on peut associer une fonction veto V unique qui soit anonyme et neutre.

Voici une proposition fondamentale qui affirme que lorsqu'elle existe, une fonction anonyme, neutre, maximale sous-additive et sur-additive est aussi additive.

posons : $\qquad |N| = n \qquad |A| = p$

PROPOSITION 5 : *Si* p *et* n *ne sont pas premiers entre eux il n'existe aucune fonction veto anonyme et neutre qui soit à la fois : maximale, sur-additive, et sous-additive.*

Si p *et* n *sont premiers entre eux, il existe une et une seule fonction de ce genre. Elle est additive et sa fonction cardinale est :*

$$(16) \qquad \begin{cases} v(t) = \left\lceil \dfrac{p\,t}{n} \right\rceil - 1 & t = 1,2,\dots n \\ v(o) = o \end{cases}$$

REMARQUE : Un veto donné par la formule (16) est dit proportionnel. Il existe pour tous les couples (p,n) mais il n'est maximal que lorsque p et n sont premiers entre eux (pour plus de précision cf. [4]).

DEMONSTRATION de la PROPOSITION 5 :

Remarquons d'abord que la sur-additivité, la sous-additivité et la maximalité se traduisent dans le cas d'un veto neutre et anonyme par les formules respectives :

$$v(t_1) + v(t_2) \leqslant v(t_1 + t_2) \quad \forall t_1 \forall t_2 \qquad t_1+t_2 \in \{o,\dots n\}$$

$$v(t_1) + v(t_2) + 1 \geqslant v(t_1+t_2) \quad \forall t_1 \forall t_2 \quad t_1+t_2 \in \{o,\dots n\}$$

$$v(t) + v(n-1) = p - 1 \qquad \forall\, t \in \{o,\dots,n\},$$

Montrons par récurrence la double inégalité :

$$\frac{p\ t}{n} - 1 < v(t) < \frac{p\ t}{n} \quad (*)$$

(*) est vraie pour $t = 1$:

la sur-additivité : $\quad n\, v(1) \leqslant p-1 < p \Rightarrow v(1) < \frac{p}{n}$

la sous-additivité : $\quad (n-1)\ v(1) + n-2 \geqslant v(n-1)$

la maximalité : $\quad (n-1)\ v(1) + n-2 \geqslant p-1-v(1) > p-1- \frac{p}{n}$

d'où $\quad v(1) > \frac{p}{n} - 1.$

Supposons que (*) est vraie pour $r = 1,\dots,t-1$

Montrons qu'elle est vraie aussi pour t :

On écrit : $\quad n = \gamma\, t + r \qquad o \leqslant r < t.$

Cas où $r = o$:

sur-additivité : $\quad \frac{n}{t}\, v(t) \leqslant p-1 < p \Rightarrow v(t) < \frac{pt}{n}$

sous-additivité : $\quad (\gamma-1)\ v(t) + \gamma-2 \geqslant v(n-t)$.

Maximalité : $\quad (\gamma-1)\ v(t) + \gamma-2 \geqslant p-1-v(t) > -1- \frac{pt}{n}$

d'où $\quad (\gamma-1)\ v(t) > p\, \frac{(n-t)}{n} - (\gamma-1)$

$$v(t) > \frac{pt}{n} - 1.$$

Cas où $r \neq o$:

sur-additivité : $\quad \gamma\ v(t) + v(r) \leqslant p-1$

$$\gamma\ v(t) \leqslant p-1-v(r) < p-1 -\left(\frac{pr}{n} - 1\right) = p\left(\frac{n-r}{n}\right)$$

$$\gamma\ v(t) < \frac{pt}{n}$$

sous-additivité : $\quad \gamma\ v(t) + \gamma-1 \geqslant v(n-r).$

Maximalité : $\gamma\, v(t) + \gamma - 1 \geqslant p-1-v(r) > p-1 - \frac{pr}{n}$

$$\Rightarrow \gamma\,(v(t) + 1) > p\,\frac{(n-2)}{n}$$

$$\Rightarrow \gamma \quad v(t) + 1 > \frac{pt}{n} \Rightarrow v(t) > \frac{pt}{n} - 1$$

Les inégalités (*) sont ainsi démontrées par récurrence.

Si p et n ne sont pas premiers entre eux :

Soit d = p.g.c.d de p et n : $d > 1$

pour : $p = d\, p'$
$n = d\, n'$

$$\frac{pt}{n} = \frac{p't}{n'} \text{ est entier pour } t = n'$$

$n' \in \{1,\ldots n-1\}$; et il n'existe pas d'entier

$$v(t) \in \left]\frac{pt}{n} - 1 \quad \frac{pt}{n}\right[$$

Si p et n sont premiers entre eux il est clair que :

$$V = V(\bar{\ell}^{*},\bar{m}^{*}) \quad \text{où} \quad \ell_i = \frac{1}{n} \quad i \in N$$

$$m_a = \frac{1}{p} \quad a \in A$$

et V est additif.

On termine cette section par une question : peut-on généraliser la propriété précédente ? Une fonction veto neutre (mais non anonyme) qui est à la fois maximale sur-additive et sous-additive est-elle additive ? On aura une réponse à la fin du second paragraphe.

La seconde section explore les propriétés stratégiques de la fonction veto.

II - COEUR D'UNE FONCTION VETO - STABILITE

20. NOTATIONS :

Pour tout ensemble X, $\mathcal{R}(X)$ désigne l'ensemble des relations d'ordres stricts sur X. $\mathcal{R}(A)$ sera, plus simplement $\mathcal{R}$. Un élément de $\mathcal{R}^N$, sera noté $\underline{R} = (R^i)_{i \in N}$.

21. DEFINITION

Soit V *une fonction veto, et soit un "profil"* $\underline{R} \in \mathcal{R}^N$
Une issue $a \in A$ *est dite bloquée par la coalition* $T \in \mathcal{P}(N)$ *pour le profil* $\underline{R}$ *si :*

$$(17) \quad \begin{cases} \exists B \in V(T) : & a \in B \\ \text{et} \forall i \in T, \forall b \in B^c & b\, R^i a \end{cases}$$

22. REMARQUE : $b\, R^i\, a$ sera interprété dans ce modèle : "le joueur i préfère b à a". L'ensemble des préférés à a pour tout i dans T sera noté :

$$\mathrm{Pr}\,(a, T, \underline{R}) \text{, formellement :}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Pr}\,(a, T, \underline{R}) &= \{b \in A / \forall i \in T \quad b\, R^i a\} && \text{si} \quad T \in \mathcal{P}(N) - \{\Phi\} \\ &= A - \{a\} && \text{si} \quad T = \phi. \end{aligned}$$

A cause des axiomes (1), (2), (3), la formule (17) est équivalente à la suivante :

$$(18) \qquad \mathrm{Pr}^c(a, T, \underline{R}) \in V(T)$$

$$\text{où} \qquad \mathrm{Pr}^c(a, T, \underline{R}) = A - \mathrm{Pr}(a, T, \underline{R})$$

23. DEFINITION :

Soit V *une fonction veto et* $\underline{R} \in \mathcal{R}^N$ *un profil. Une issue* $a \in A$ *est dite dominée pour* $\underline{R}$ *si il existe une coalition* T *qui bloque* a *pour* $\underline{R}$.

24. DEFINITION :

Soit V *une fonction veto et* $R \in \mathcal{R}^N$ *un profil. Le coeur de* V *pour le profil* $\underline{R}$ *est l'ensemble des issues non dominées. Il sera noté* $\mathcal{C}_V(\underline{R})$*. Formellement :*

$$\mathcal{C}_V(\underline{R}) = \{a \in A / \forall T \in \mathcal{P}(N) \quad P_r^c(a, T, R) \notin V(T)\}$$

25. REMARQUE : Soient V_1 et V_2 deux fonctions veto vérifiant $\forall T \in \mathcal{P}(N)$ $V_1(T) \supset V_2(T)$

On a $$\mathcal{C}_{V_1}(\underline{R}) \subset \mathcal{C}_{V_2}(\underline{R}) \qquad \forall\, \underline{R} \in \mathcal{R}^N.$$

Le concept de coeur se révèle être la généralisation du concept de même nom au cas d'un jeu simple.

EXEMPLE 1 : *Coeur d'un jeu simple et de la fonction veto associée.*

Reprenons l'exemple 1. Un jeu simple $\Gamma = (N,W)$, un ensemble d'issues A et un profil $\underline{R} \in \mathcal{R}^N$ sont donnés. On associe canoniquement à (Γ,A) la fonction veto $V_{\Gamma,A}$ par la formule (12).

On en déduit une formulation particulière du coeur :

$$\mathcal{C}_{V_{\Gamma,A}}(\underline{R}) = \{a \in A / \forall\, T \in W, \forall b \neq a, \text{non } (b\, R^i a\ \forall i \in T)\}$$

C'est exactement la définition du coeur du jeu simple Γ d'après Nakamura [6]

EXEMPLE 2 : *Coeur d'un veto neutre.*

Soit V une fonction veto neutre et v la fonction cardinale associée d'après la formule (14).

Soit $a \in A$.

a bloqué par T pour $\underline{R} \Leftrightarrow |P_r^c(a,T,\underline{R})| \leq v(T) \Leftrightarrow |P_r(a,T,\underline{R})| \geq p - v(T)$

d'où une formulation nouvelle du coeur :

$$\mathcal{C}_V(\underline{R}) = \{a \in A / \forall T \in \mathcal{P}(N) \quad |Pr(a,T,\underline{R})| < p - v(T)\}$$

III - LE THEOREME PRINCIPAL

Nous formulons dans cette section des conditions nécessaires pour qu'une fonction veto soit stable.

PROPOSITION 6 : *Soit* V *une fonction veto stable. Les deux propriétés suivantes sont nécessaires :*

a) $(\forall r \in \mathbb{N}^*)$ $(\forall B_i \in \mathcal{P}(A)\ i = 1,\dots r)$ $(\forall T_i \in \mathcal{P}(N)\ i = 1,\dots r)$

$$\left.\begin{array}{ll} i \neq j & T_i \cap T_j = \phi \\ B_i \in V(T_i) & i \in \{1,\dots r\} \end{array}\right\} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{i=r} B_i \neq A.$$

b) $(\forall r \in \mathbb{N}^*)$ $(\forall B_i \in \mathcal{P}(A)\ i = 1,\dots r)$ $(\forall T_i \in \mathcal{P}(N)\ i = 1,\dots r)$

$$\left.\begin{array}{ll} i \neq j & B_i^c \cap B_j^c = \phi \\ B_i \in V(T_i) & i \in \{1,\dots r)\} \end{array}\right\} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{i=r} T_i \neq \phi \,.$$

26. <u>REMARQUE</u> : La propriété (a) n'est autre que (7). Dans le cas où V est neutre la propriété (a) se traduit par :

a') $(\forall r \in \mathbb{N}^*)$ $(\forall T_i \in \mathcal{P}(N)\ i = 1,\dots r)$

$$(\ i \neq j\quad T_i \cap T_j = \phi) \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} v(T_i) \leqslant p-1$$

La propriété (b) n'a de sens intuitif que lorsque V est maximale, si V est neutre (v) s'écrit :

b') $(\forall r \geqslant 2)$ $(\forall T_i \in \mathcal{P}(N)\ i = 1,\dots r)$

$$\bigcap_{i=1}^{i=r} T_i = \phi \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} (p-v(T_i)) > p$$

Nous verrons par la suite ce que deviennent ces propriétés quand V est maximale.

<u>DEMONSTRATION DE LA PROPRIETE</u> (a) :

Par l'absurde.

Supposons (a) fausse, nous allons construire un profil $\underline{R}$ tel que $\mathcal{C}_V(\underline{R}) = \phi$.

Remarquons qu'on peut supposer que les $B_i \neq \phi$ sinon on se restreint à ceux des i tels que $B_i \neq \phi$. Par ailleurs $B_i^c \neq \phi$ $i \in \{1,\dots r\}$.

Soit i fixé $i \in \{1,\dots r\}$ et soient deux relations d'ordres strictes : $P_i \in \mathcal{R}(B_i)$ et $Q_i \in \mathcal{R}(B_i^c)$, arbitrairement choisies.

Soit alors la relation d'ordre stricte sur A ainsi définie

$\forall a \in A$ $\forall b \in B$

$$b \ \bar{R}^{i} a \iff \begin{cases} a \in B_i \ \text{ et } \ b \in B_i \ \text{ et } \ b \ P^i a \\ \text{ou} \\ a \in B_i^c \ \text{ et } \ b \in B_i^c \ \text{ et } \ b \ Q^i a. \\ \text{ou} \\ a \in B_i \ \text{ et } \ b \in B_i^c \end{cases}$$

Considérons alors le profil suivant parfaitement défini grâce à $T_i \cap T_j \neq \phi \ \ i \neq j$:

$$\underline{R} = (R^e)_{e \in N} \ \text{ où } \begin{cases} R^e = \bar{R}^i & \text{si } \ e \in T_i \\ R^e \in \mathcal{R} & \text{si } \ e \notin \bigcup_{i=1}^{r} T_i \end{cases}$$

C'est le profil cherché.

Puisqu'on a supposé (a) fausse on a : $\bigcup_{i=1}^{r} B_i = A$.

Soit $a \in A \quad \exists i \in \{1,\dots r\} : a \in B_i$,

On vérifie qu'on a : $B_i^c \subset P_r(a, T_i, \underline{R})$

$$\Rightarrow \ Pr^c(a, T_i, \underline{R}) \subset B_i$$

$$\Rightarrow \ Pr^c(a, T_i, \underline{R}) \in V(T_i)$$

a est dominé ; on a montré : $\mathcal{C}_V(\underline{R}) = \phi$.

<u>DEMONSTRATION de</u> (b)

Par l'absurde : $\exists r \in \mathbb{N}^* \qquad \exists B_i , \exists T_i \qquad i = 1,\dots r,$

$$B_i^c \cap B_j^c = \phi \quad i \neq j , \quad B_i \in V(T_i) \ \text{ et } \ \bigcap_{i=1}^{r} T_i = \phi$$

Posons $B_o = \bigcup_{i=1}^{i=r} B_i^c$ on a : $\begin{cases} B_i^c \cap B_j^c = \phi & i,j \in \{o,1\dots r\} \\ & i = j \\ \text{et } \ \bigcup_{i=o}^{r} B_i^c = A \end{cases}$

CONSTRUCTION DE $\underline{R}$:

Pour tout $i \in \{o,1,\dots r\}$: soit une relation d'ordre strict, arbitraire : $P^i \in \mathcal{R}(B_i^c)$

Soit aussi la permutation circulaire de $\{1,\dots r\}$.

$$\sigma : \{1,\dots r\} \rightarrow \{1,\dots r\}$$

$$\sigma(n) = n-1 \qquad n = 1,\dots r$$

$$\sigma(1) = r$$

on a $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{r} T_i^c = N$

Il existe une application $\Pi : N \rightarrow \{1,\dots r\}$ vérifiant $\forall e \in N \quad e \in T^c_{\Pi(e)}$

Fixons $i \in \{1,\dots r\}$, définissons $\bar{R}^i \in \mathcal{R}$ ainsi : $\forall a \in A \quad \forall b \in A$:

$$b\,\bar{R}_i a \Leftrightarrow \begin{cases} a \in B_o^c & \text{et} \quad b \in \bigcup_{i=1}^{r} B_i^c \\ & \text{ou} \\ a \in B_n^c & \text{et} \quad b \in B_j^c \quad \text{et} \quad \sigma^{i-1}_{(k)} < \sigma^{i-1}_{(j)} \\ & \text{ou} \\ a \in B_n^c & \text{et} \quad b \in B_n^c \quad \text{et} \quad b\,P^k a \end{cases}$$

Considérons alors le profil $\underline{R} = (R^e)_{e \in N}$ où $R^e = \bar{R}^i$ si $\Pi(e) = i$

DEMONTRONS que $\mathcal{C}_V(\underline{R}) = \phi$

Soit $a \in A$:

si $a \in B_o^c$ on a : $\qquad B_i^c \subset P_r(a, T_1, \underline{R})$

d'où $\qquad P_r^c(a, T_1, \underline{R}) \subset B_1 \in V(T_1)$

et a est dominé

si $a \in B_i^c \quad i \in \{1,\dots r\}$ on affirme qu'on a :

$$\forall e \in N \quad \forall b \in B^c_{\sigma^{-1}(i)} \quad e \in T_{\sigma^{-1}(i)} \Longrightarrow bR^e a \qquad (19)$$

Pour le prouver, soient $b \in B^c_{\sigma^{-1}(i)}$ et $e \in N$ vérifiant $a \; R^e b$

d'après la définition de R^e on a : $R^e = \bar{R}_j$ où $j = \Pi(e)$

par définition de $\bar{R}_j$: $\quad a\,\bar{R}_j\,b \Leftrightarrow \sigma^{j-1}_{(i)} > \sigma^{i-1}_{\sigma^{-1}(i)}$

ce qui équivaut à : $\quad \sigma^{j-1}_{(i)} > \sigma^{j-2}_{(i)}$ ce qui n'est possible qu'au seul cas où :

$$\sigma^{j-1}_{(i)} = r \quad \text{et} \quad \sigma^{j-2}_{(i)} = 1$$

d'après la première égalité on a :

$$\sigma^{-1}_{(i)} = \sigma^{-j}_{(r)} = j = \Pi(e) \quad \text{d'où} \quad e \in T^{c}_{\sigma^{-1}_{(i)}}$$

(19) est ainsi démontrée par l'absurde ; elle entraîne :

$$B^{c}_{\sigma^{-1}_{(i)}} \subset P_r(a, T_{\sigma^{-1}_{(i)}}, \underline{R})$$

d'où
$$P^{c}_{r}(a, T_{\sigma^{-1}_{(i)}}, \underline{R}) \subset B_{\sigma^{-1}_{(i)}}$$

a est bloquée par $T\sigma^{-1}_{(i)}$ pour $\underline{R}$

On a démontré $\mathcal{C}_V(\underline{R}) = \phi$ ce qui achève la démonstration.

La démonstration (6) permet de retrouver un résultat sur la stabilité du jeu simple démontré par Nakamura [6].

THEOREME 7 (Nakamura) :

Soit un jeu simple $\Gamma = (N,W)$, A *un ensemble fini d'issues,* $V_{\Gamma,A}$ *la fonction veto canoniquement associée à* (Γ,A)

Si $V_{\Gamma,A}$ est stable on a :

- ou bien $\bigcap_{T \in W} T \neq \phi$ (le jeu simple Γ est faible)
- ou bien $\nu = \min \{|\sigma| \,/\, \sigma \subset W \quad \bigcap_{\sigma} T = \phi\} > |A|$

27. REMARQUE : ν est appelé *nombre de Nakamura* du jeu simple Γ.

Nakamura démontre que la réciproque de ce théorème est aussi vraie [2].

DEMONSTRATION : C'est un corollaire du Lemme :

Supposons $\bigcap_{T \in W} T = \phi$ alors ν est un entier naturel (fini).

Posons $|A| = p$

Ecrivons $A = \{a_1, \ldots a_p\}$, supposons $p \geqslant \nu$.

D'après la définition de ν; il existe une famille (T_i) $i = 1, \ldots \nu$ vérifiant :

$$T_i \in W \qquad \bigcap_{i=1}^{i=\nu} T_i = \phi$$

Posons alors $B_i = A - \{a_i\}$ $i = 1,\ldots\nu$ on a la situation suivante :

$$B_i^c \cap B_j^c = \phi \quad \forall_i \quad \forall_j \in \{1,\ldots\nu\} \quad i \neq j$$

$$B_i \in B_{\Gamma,A}(T_i) \qquad i = 1,\ldots \nu$$

$$\bigcap_{i=1}^{\nu} T_i = \phi .$$

ce qui contredit l'énoncé (b) du Lemme ; d'où $p < \nu$.

On en arrive à l'énoncé du Théorème principal de ce paragraphe :

THEOREME 8 (Principal) : *Soit* V *une fonction veto stable et maximale. Alors* V *est sur-additive et sous-additive.*

COROLLAIRE 9 : *Soit* V *une fonction veto neutre stable et maximale. Alors on a :*

$$\forall\, T_1 \in \mathcal{P}(N) \qquad \forall\, T_2 \in \mathcal{P}(N)$$

$$T_1 \cap T_2 = \phi \Rightarrow v(T_1 \cup T_2) - v(T_1) - v(T_2) \in \{o,1\}$$

DEMONSTRATION DU COROLLAIRE : Il suffit de combiner le théorème précédent et la proposition (2).

DEMONSTRATION du THEOREME : Soit V stable. V est sur-additive, en effet :

Soient $T_1 \in \mathcal{P}(N)$ $T_2 \in \mathcal{P}(N)$ vérifiant $T_1 \cap T_2 = \phi$

$B_1 \in V(T_1)$ et $B_2 \in V(T_2)$

posons $T_3 = (T_1 \cup T_2)^c$ $B_3 = (B_1 \cup B_2)^c$

Supposons $B_1 \cup B_2 \notin V(T_1 \cup T_2)$

la maximalité de V entraîne : $B_3 \in V(T_3)$

On a la situation suivante :

$$(T_i)\ i = 1,2,3 \qquad T_i \cap T_j = \phi \quad i,\ j = 1,2,3 \quad i \neq j$$

$$B_i \in V(T_i) \quad i = 1,2,3$$
$$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = A$$

ce qui contredit l'énoncé (a) du lemme : d'où $B_1 \cup B_2 \in V(T_1 \cup T_2)$. La sur-additivité en découle. V est sous-additive :

Supposons par l'absurde qu'il existe : $B_1 \in \mathcal{P}(A)$ $B_2 \in \mathcal{P}(A)$

$$B_1 \cap B_2 = \phi \quad B_1 \cup B_2 \in V(T_1 \cup T_2) \; B_1 \notin V(T_1) \text{ et } B_2 \notin V(T_2)$$

D'après la maximalité de V on a :

$$B_1^c \in V(T_1^c) \quad B_2^c \in V(T_2^c)$$

posons :

$$A_i = B_i^c \qquad i = 1,2$$
$$S_i = T_i^c \qquad i = 1,2$$
$$B_1 \cup B_2 = A_3$$
$$T_1 \cup T_2 = S_3$$

on a :

$$A_i^c \cap A_j^c = \phi \quad i \neq j \quad i,j = 1,2,3$$
$$A_i \in V(S_i) \quad i = 1,2,3$$
$$S_1 \cap S_2 \quad S_3 = \phi$$

ce qui contredit l'énoncé (b) de la proposition 6, d'où
la sous-additivité de V.

COROLLAIRE 10 : *Soit* V *un veto anonyme neutre stable et maximal. Alors :*

a) p *et* n *sont premiers entre eux* (où $p = |A|$ et $n = |N|$)

b) V *est additif et la fonction cardinale associée est nommément :*

$$\begin{cases} v(t) = \left\lceil \frac{pt}{n} \right\rceil - 1 & \text{si } t = 1,\dots n \\ v(o) = o \end{cases}$$

La démonstration du corollaire découle immédiatement du théorème précédent et de la proposition (5).

28. REMARQUE : Pour un résultat plus complet en ce qui concerne la stabilité du veto anonyme et neutre on peut se reporter à [4].

29. REMARQUE : Toute fonction veto additive est stable cf. [6]. Notre théorème affirme d'autre part qu'un veto stable maximal est sur-additif et sous-

additif. Deux questions peuvent alors se poser :

- *Un veto maximal, sous-additif et sur-additif est-il stable ?*
- *Un veto stable et maximal est-il additif ?*

Le corollaire (10) se présente comme une réponse partielle à la seconde question. La réponse est positive au cas d'un veto anonyme et neutre. Malheureusement elle est négative dans le cas général. Nous fournissons ci-dessous un contre-exemple qui dissipe toute illusion à ce sujet.

EXEMPLE 3 : *Contre -exemple d'un veto maximal et stable non additif :*

30. REMARQUE D'ORDRE GENERAL : Soit $V = V(\ell,m)$ une fonction veto additif. Considérons deux joueurs distincts i et j :

si $\ell_i \leqslant \ell_j$ on a : $\forall T \in \mathcal{P}(N) \quad \{i,j\} \cap T = \phi \Rightarrow V(\{i\} \cup T) \subset V(\{j\} \cup T)$

si $\ell_i \geqslant \ell_j$ on a : $\forall T \in \mathcal{P}(N) \quad \{i,j\} \cap T = \phi \Rightarrow V(\{j\} \cup T) \subset V(\{i\} \cup T)$

Si bien qu'on ne peut avoir à la fois :

$$T_1 \cap \{i,j\} = \phi \quad B_1 \in V(\{i\} \cup T_1) \quad B_1 \notin V(\{j\} \cup T_1)$$

et $$T_2 \cap \{i,j\} = \phi \quad B_2 \notin V(\{i\} \cup T_2) \quad B_1 \in V(\{i\} \cup T_2)$$

Considérons alors le jeu simple $\Gamma = (N,W)$

où $N = \{1,2,3,4,5,6\}$

et $W = \{T \in \mathcal{P}(N) / \exists R \in W^* \quad R \subset T\}$

W^* est l'ensemble des coalitions gagnantes minimales :

$W^* = \{\{1,2\}, \{1,4,5\} , \{1,3,6\} , \{2,4,6\} , \{2,3,5\} \{1,4,3\} \{2,4,3\}\}$

On peut vérifier que (N,W) est propre, fort et non faible cf. [3].

Le nombre de Nakamura est $\nu = 3$.

Considérons maintenant l'ensemble $A = \{a,b\}$ comme ensemble d'issues.
Soit $V_{\Gamma,A}$ la fonction veto canoniquement associée à (Γ,A). Cette fonction est maximale et sur-additive d'après la proposition (1)

On a : $|A| = 2 < 3 = \nu$. D'après le théorème de Nakamura, $V_{\Gamma,A}$ est stable (cf. Remarque 26).

Vérifions que $V_{\Gamma,A}$ n'est pas additif :

Posons : $T_1 = \{1,4\}$ $T_2 = \{2,4\}$ $i = 5$ $j = 6$

on a : $T_1 \cup \{i\} \in W$ $T_1 \cup \{j\} \notin W$

$T_2 \cup \{i\} \notin W$ $T_2 \cup \{j\} \in W$.

Remarquons que : $T \in W \Leftrightarrow V(T) = \mathcal{P}(A) - \{A\} = \{\phi, \{a\} , \{b\}\}$

$T \notin W \Leftrightarrow V(T) = \{\phi\}$

D'après la remarque générale (29), $V_{\Gamma,A}$ ne peut pas être additif. D'ailleurs on pourrait obtenir des contre-exemples analogues pour A quelconque $|A| \geqslant 2$.

30. REMARQUE CONCLUSIVE

Notre étude laisse ouverte la question de savoir si une fonction veto maximale sous-additive et sur-additive est stable (*). Nous avons cependant vérifié que dans le cas où V est neutre et où $|A| \leqslant 4$, la réponse à cette question est positive. Nous n'avons pas cru nécessaire d'inclure cette vérification dans la présente étude.

(*) Pendant la préparation de cet article nous avons appris que M. Bezalel Peleg a répondu positivement à notre question. Nous citons sous toutes réserves l'étude non publiée où ce problème est résolu : "Convex Effectivity functions", by Bezalel Peleg, Research Memorandum n°46, April 1982, The Hebrew University, Jerusalem, Israël.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Ishikawa et K. Nakamura, "The strategy-proof social choice function" 1978, *Journal of Mathematecal Economics 6*,1979, 283-295.

[2] S. Ishikawa et K. Nakamura, " On the existence of the core of a characteristic function game with ordinal preferences", *Journal of operation research Society of Japan*,Vol.22 n°3, september 1979.

[3] B. Monjardet," Problêmes de Transversalité dans les hypergraphes, les ensembles ordonnés et en théorie de la décision collective". *Thèse d'Etat*, Université de Paris VI, Paris (1974).

[4] H. Moulin, "The proportional veto principle", *Review of Economic Studies*,(1981) XL VIII, 407-416.

[5] H. Moulin "Implementing efficient, anonymous and neutral social choice functions,"*Journal of mathematical Economics 7*, 1980, 249-269.

[6] H. Moulin et B. Peleg , "Stability and implementation of Effectivity functions", *Research memo. n°23, The Institute for Advanced Studies*. The Hebrew University of Jerusalem.

[7] H. Moulin, "Voting with proportionnel. Veto Power", *Econometrica*, Vol. 50, n°1 - January 1982, 145-162.

[8] K. Nakamura, "The Core of a simple game with ordinal preferences" *Int. J. of Game Theory 4*, 1975, 95-104.

[9] B. Peleg, "Representations of simple games by social choice functions" *Int. J. of Game Theory 7*, 1978, 81-94.

[10] J. Von Neuman et O.Morgenstern,"Theory of Games and Economic Behaviour" *Princeton University Press*, 1947.