MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

J. P. DESCLES
CH. FROIDEVAUX

Axiomatisation de la notion de repérage abstrait

Mathématiques et sciences humaines, tome 78 (1982), p. 73-119
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1982__78__73_0>

Math. Sci. hum. (20e année, n°78, *1982*, p.73-119)

AXIOMATISATION DE LA NOTION DE REPERAGE ABSTRAIT

J.P. DESCLES (*)

CH. FROIDEVAUX (**)

La théorie du repérage trouve ses origines dans deux séries de problèmes : l'analyse du fonctionnement de la copule qui, depuis G. Frege, est déclarée avoir les valeurs d'existence, d'identité et d'attribution (avec séparation de la valeur d'appartenance et de celle d'inclusion) ; l'analyse des catégories grammaticales (temps et aspects, personnes, espace) et l'analyse du fonctionnement du domaine notionnel.

Nous renvoyons aux publications qui développent certains points précis qui motivent la mathématisation présentée au paragraphe 2. Citons en particulier:

a) le rapport présenté à l'U.N.E.S.C.O. par A. Culioli et J.P. Desclés [CULI/DES-81]

b) l'article : "Traitement formel des langues naturelles" (lère partie) paru dans Mathématiques et sciences humaines, (77) 1982 [pour l'analyse de la copule *être* et de son corrélat *avoir*] ;

c) les articles relatifs aux catégories grammaticales des personnes, de l'aspect et du temps (voir tous les articles qui sont relatifs à ces problèmes, cités dans la bibliographie présentée dans le numéro Mathématiques et sciences humaines (77) 1982).

Nous allons aborder ici essentiellement un problème, celui de la distinction

---

(*) U.E.R. de Mathématiques et Informatique - Université de Paris 7

(**) ERA 642 - Université de Paris 7

identité/identification, que nous préconisons. En traitant de ce problème, nous introduirons des concepts qui justifieront les définitions proposées par la suite.

1. IDENTITE/IDENTIFICATION

On sait qu'une des préoccupations de G. Frege consistait à analyser la signification de propositions comme $a = a$ et $a = b$:

"a = a et a = b sont des propositions qui n'ont pas, la chose est évidente, même valeur de connaissance : a = a est a priori et, selon Kant, analytique, tandis que les propositions de la forme a = b ont bien souvent un contenu fort précieux pour le progrès de la connaissance, et elles n'ont pas toujours un fondement a priori. La découverte que chaque matin se lève le même soleil, et non pas un nouveau soleil, a bien été une des découvertes les plus fécondes de l'astronomie" ("Sens et dénotation").

Dans l'exemple célèbre *L'étoile du matin est Vénus*, pouvons-nous régler le problème de la signification de *est* en disant simplement que *est* renvoie à une "identité" ? Précisons un peu la notion d'identité.

A. Church, à la suite de G. Frege et de sa Begriffsschrift (1879), utilise deux schémas d'axiomes :

(i) $x = x$ (réflexivité)

(ii) $(x = y \text{ et } \phi(x)) \Rightarrow \phi(y)$ (indiscernabilité des identiques)

où 'x', 'y' sont des variables syntaxiques, $\phi(\xi)$ une variable de prédicat.

Hao Wang a proposé un seul schéma d'axiome :

(iii) $\phi(y) \equiv (\exists x)\ (x = y \text{ et } \phi(x))$

Les schémas (i) et (ii) sont déductibles de (iii).

Lorsqu'on a recours au calcul des prédicats du second ordre, nous pouvons poser la loi de Leibniz.

(LL) $(\forall x)\ (\forall y)\ [x = y \equiv (\forall\phi)\ (\phi(x) \equiv \phi(y))]$

et en déduire très simplement des propositions valides au sujet de l'identité :

(In.Id) $(\forall x)\ (\forall y)\ [x = y \Rightarrow (\forall \phi)\ (\phi(x) \equiv \phi(y))]$

(indiscernabilité des identiques)

(Id.in) $(\forall x)\ (\forall y)\ [(\forall \phi)\ (\phi(x) \equiv \phi(y)) \Rightarrow x = y]$

(identité des indiscernables)

(ρ) $(\forall x)\ (x = x)$

(σ) $(\forall x)\ (\forall y)\ (x = y \Rightarrow y = x)$

(τ) $(\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ (x = y$ <u>et</u> $y = z \Rightarrow x = z)$

Ces propriétés de l'identité peuvent néanmoins provoquer certains ennuis en particulier les lois (LL), (In.Id) et (Id.in). Rappelons l'exemple bien connu :

(1) *Le nombre des planètes est 9*

(2) *Copernic croit que le nombre des planètes est plus grand que 7*

En appliquant la loi de Leibniz, nous pouvons en tirer la conclusion qui est fausse :

(3) *Copernic croit que 9 est plus grand que 7*

Bien des théories ont été proposées pour remédier aux inconvénients de (LL). Par exemple, O.W. Quine a proposé "l'opacité référentielle" pour désigner les contextes dans lesquels (LL) conduit de la vérité à la fausseté ; on restreint alors le domaine de validité de (LL) en imposant au prédicat $\phi(\xi)$ de parcourir uniquement des propriétés "réelles". D'autres solutions ont été proposées en posant :

(LL) $a = b \equiv (\forall \phi)\ (\forall t)\ [R_t(\phi(a)) \equiv R_t(\phi(b))]$

où $R_t(p)$ se lit "il y a réalisation de p au temps t".

Nous ne rentrerons pas dans les détails.

L'analyse des langues naturelles nous montre que par l'énonciation, on établit beaucoup plus des <u>identifications</u> entre un terme et un autre que des <u>identités</u>.

Dans l'énoncé *L'étoile du matin est Vénus*, il s'agit beaucoup plus d'une identification entre *L'étoile du matin* et *Vénus*, cette identification ne respectant pas (LL), que d'une identité.

Par identification, nous entendons non pas une relation, mais une opération qui consiste à trouver un identificateur (*Vénus*) pour un terme (*l'étoile du matin*). Cette opération est constitutive d'une relation binaire, à savoir "l'identificateur et le terme (à identifier) sont identifiés entre eux".

Précisons ceci. Désignons par ':=' un opérateur unaire, dit d'identification. Soit a un terme donné. "L'opération d'identification " consiste à "appliquer l'opérateur := à l'opérande a de façon à obtenir le résultat b".

Utilisons la notation suivante pour l'opération d'application :

$[\Pi, \xi_o] \triangleright \xi_1$ est un schéma qui désigne l'application de l'opérateur Π à l'opérande ξ_o donnant pour résultat ξ_1. Le lecteur reconnaîtra dans ce schéma "l'opération d'application" utilisée par J. von Neumann dans son article sur les fondements des mathématiques de 1925 : "Eine Axiomatisierung der Mengenlehre" (traduit en anglais dans J. van Heijenoort, From Frege to Gödel, A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931).

Revenons à l'identification. En utilisant le schéma précédent, nous avons :

$$[:=, a] \triangleright b$$

a est le terme à identifier,

b est l'identificateur (de a).

L'opération d'identification engendre une relation binaire canonique et directement associée à celle-ci, que nous désignerons, par abus d'écriture, à l'aide du même symbole ':=' :

$$[:=, a] \triangleright b \Leftrightarrow a := b$$

Nous lisons 'a := b' par "a est identifié à b" (ou encore "b est l'identificateur de a"). La relation 'a := b' est clairement fonctionnelle.

A la relation 'x := y' nous associons une autre relation "dite relation d'identification" et que nous désignons par 'x = y', qui est moins fine que la relation canonique, à savoir :

$(\forall x)\ (\forall y)\ [x := y \rightarrow x = y]$

Nous lisons 'x = y' : "x et y sont identifiés entre eux".

Pour qu'il y ait identification, nous imposons à la relation 'x = y' engendrée par l'opération d'identification, les deux propriétés (ρ) (réflexivité) et (σ) (symétrie).

La distinction entre les deux relations 'x := y' et 'x = y' nous permet de bien cerner la notion même d'identification :

Si b "est l'identificateur de" a alors a et b "sont identifiés entre eux" et donc par symétrie b et a "sont identifiés entre eux" sans que pour autant b ait nécessairement pour identificateur a.

Les langues naturelles marquent-elles une différence entre les deux relations 'x := y' et 'x = y' ?

Prenons un exemple du français :

(1) *Paris est la capitale de la France*

Nous interprétons (1) comme le résultat d'une identification de "Paris" avec "la capitale de la France". De (1) nous tirons :

(1') *Paris et la capitale de la France sont identifiés*

(1") *La capitale de la France et Paris sont identifiés*

Par contre, la suite textuelle :

(2) ? *La capitale de la France est Paris*

a un degré d'acceptabilité plus faible ; elle apparaît dans certains contextes seulement, par exemple dans les manuels de logique ou dans des listes ou encore en réponse à des questions... Il semble bien - nous l'avons testé sur de nombreuses populations d'informateurs - que spontanément un francophone dise plutôt :

(3) *La capitale de la France, c'est Paris*

Ce test - il y en a d'autres - montre bien que le terme à identifier et l'identificateur ne sont pas substituables l'un à l'autre.

Puisque (1) et (2) n'ont pas le même degré d'acceptabilité, (1) et (2) ne sont pas construits de la même façon et la permutation formelle de l'objet identifié avec son identificateur change l'acceptabilité. Nous dirons que dans (1) il y a identification de Paris avec la capitale de la France : on identifie un terme avec un autre terme, en général plus déterminé, comme dans :

Pierre est le professeur dont je t'ai déjà parlé

L'acceptabilité de (2) étant plus faible, (1) et (2) ne sont pas équivalents, du point de vue de la signification.

Pour exprimer l'identification de La capitale de la France avec Paris, il est nécessaire d'utiliser, en français, un énoncé comme (3).

Nous dirons donc que :

L'identification est une opération qui induit une relation canonique 'x := y' symétrisable (mais non symétrique) à laquelle on associe une relation (symétrique et réflexive) 'x = y', appelée relation d'identification.

Dans beaucoup de langues, on a des marqueurs qui renvoient à des identifications et rarement à des identités.

L'analyse des nombreux marqueurs anaphoriques montre que ceux-ci sont les traces d'opérations d'identification et non pas d'identités.

Par exemple, dans l'énoncé :

(6) *Jean avait ce jour-là bien des soucis, il se sentait...*

le marqueur anaphorique il indique qu'il y a une identification entre une place dans une relation prédicative non saturée et un autre terme qui sert d'identificateur à cette place.

Désignons par ' <( ) r b >' une relation prédicative non saturée et par 'a' l'identificateur, le processus de l'anaphore fait intervenir une identification que l'on peut schématiquement représenter par :

$$\overbrace{<(\ )\ r\ b> \qquad a}^{:=}$$

il est la trace de l'opération d'identification d'une place d'argument avec son identificateur 'a'.

Les marqueurs de ressemblance sont aussi les traces d'opérations d'identification qui engendrent des relations d'identification symétriques et réflexives. Prenons :

(4) *Jean est comme Napoléon* (opération d'identification)

On peut en déduire :

(5) *Jean et Napoléon sont semblables* (relation d'identification réflexive et symétrique)

Mais l'"effet" produit par :

(6) *Napoléon est comme Jean*

est très différent de l'"effet" impliqué par (4). La relation canonique déduite de l'identification est non symétrique, tandis que la relation d'identification est, elle, symétrique.

La relation 'x = y' engendrée par l'identification n'est pas en général transitive (τ).

Plusieurs termes a_1, ..., a_n peuvent avoir le même identificateur b sans pour autant être identifiables entre eux.

Prenons de nouveau le marqueur "est comme". De :

(7) *Jean est comme Napoléon* (parce qu'ils sont tous deux Corses)

(8) *Napoléon est comme César* (parce qu'ils ont été tous deux des conquérants)

on ne peut pas déduire en général que :

(9) *Jean est comme César*

L'opération d'identification est donc telle que la relation canonique "être comme" est non transitive. De (7) et de :

(10) *Paul est comme Napoléon*

on ne peut pas en déduire "naturellement" que :

(11) *Jean et Paul sont semblables entre eux*

En effet, de (7) et (10) on en déduit que Jean et Paul ont pour identificateur Napoléon. On en déduit alors :

(12) *Jean* (respectivement *Paul*) *et Napoléon sont semblables entre eux*

Si la relation symétrique d'identification "être semblables entre eux" était transitive, on devrait en déduire (11), ce qui est contraire à notre comportement spontané.

La relation d'équivalence est une spécification de la relation d'identification.

Toute relation d'équivalence notée également '=', qui vérifie la propriété d'extensionnalité :

(Ext) $(\forall\Phi)\ (\forall\Psi)\ [(\forall x) : \Phi(x) \equiv \Psi(x) \rightarrow \Phi = \Psi]$

est une égalité extensionnelle.

Par exemple, l'égalité entre ensembles est extensionnelle (d'après l'axiome d'extensionnalité).

L'égalité extensionnelle est donc aussi une spécification de la relation d'identification.

L'identité, qui est également une spécification de l'identification, est une relation qui vérifie les propriétés (ρ), (σ), (τ), (Ext) et la loi de Leibniz (LL).

Nous avons ainsi une typologie des différentes spécifications de l'identification : équivalence, égalité extensionnelle, identité. On peut bien entendu encore l'affiner en dissociant égalité intensionnelle et égalité extensionnelle.

Beaucoup de difficultés que l'on rencontre dans le traitement des "phrases équatives" en langue naturelle sont levées lorsqu'on attribue à la copule non pas la valeur d'identité mais la valeur d'identification. Les langues naturelles ne marquent pratiquement jamais l'identité, alors qu'il existe plusieurs procédés pour signifier l'identification (par exemple l'utilisation de la copule est, du marqueur de dans *la ville de Paris*, du procédé d'extraposition en ce .... que, d'un grand nombre d'anaphoriques etc.).

1.2. ATTRIBUTION/LOCALISATION

G. Frege a proposé de distinguer parmi les valeurs de la copule est : la valeur d'appartenance (*Jean est un homme*) et la valeur d'inclusion (*Les hommes sont des mammifères*). Cette distinction permet d'expliquer pourquoi le schéma de syllogisme classique :

Les x sont z

Or les y sont des x

Donc les y sont z

est valide lorsque les trois occurrences de sont sont interprétées comme des inclusions, alors qu'il est non valide lorsque la première et la dernière sont interprétées comme des appartenances. On explique alors pourquoi

Les hommes sont nombreux

Or les Athéniens sont des hommes

Donc les Athéniens sont nombreux

est un sophisme puisque "nombreux" est une propriété non distribuable sur les individus, étant une propriété de classe.

A ces deux valeurs que les langues n'opposent pas par des marqueurs spéciaux, il faut ajouter la valeur de localisation sous-jacente à certains emplois de est, que Frege n'étudie pas, cette valeur n'apparaissant pratiquement pas dans le langage mathématique.

On trouve cette valeur avec des marqueurs comme :

est à, est dans, est sur, est sous, est au-dessus, est près de.

Toutes ces valeurs sont ramenées à une valeur plus fondamentale, appelée différenciation et qui a la propriété essentielle de non symétrie.

Comme précédemment, nous dissocions l'opération de différenciation de la relation canonique qui lui est associée et de la relation de différenciation qui est constituée.

Dans l'univers des ensembles, les relations d'appartenance et d'inclusion se distinguent par des propriétés spécifiques.

Toute relation de localisation est une spécification de la différenciation et est constituée par une opération de différenciation spécifiée : "un objet est localisé par rapport à un localisateur", le type de localisation (intériorité, extériorité, contact, non contact...) étant précisé par ailleurs.

Appelons relation de repérage une relation qui est constituée à partir d'une opération (dite de repérage) consistant à repérer un objet par rapport à un repère déterminé. Si les propriétés de réflexivité et de symétrie sont vérifiées, on a un repérage par identification ; si la propriété de non symétrie est vérifiée, on a un repérage par différenciation.

Ces deux types de repérage font intervenir des conditions de détermination sur les termes. En particulier, pour qu'il y ait repérage, il est nécessaire que le terme qui sert de repère soit plus déterminé (au sens large) que le terme repéré. On explique ainsi pourquoi on a :

Le livre est sur la table

et plus difficilement :

Le livre est sur une table

avec ω renvoyant à une valeur indéterminée. Dans l'exemple précédent, *une table* s'interprète comme *une des tables*.

Les conditions de détermination des termes devraient être systématiquement étudiées mais on retrouve ce phénomène dans de nombreuses langues.

Pour résumer ces deux types de repérage, A. Culioli a proposé la notation suivante :

"$x \underline{\in} y$" signifiant : $\begin{cases} \text{soit } x = y \\ \text{soit } x \subset y \\ \text{soit } x \in y. \end{cases}$

A un repérage (par identification ou différenciation) est associée une opération duale, appelée opération de détermination.
Avec les notations de A. Culioli, au repérage noté '$\underline{\in}$' est associé le dual, noté '$\underline{\ni}$' :

si "$x \underline{\in} y$" alors "$y \underline{\ni} x$"

L'introduction du dual permet d'absorber les problèmes relatifs à l'opposition être/avoir et aux conditions de détermination qui lui sont associées.
On ne dit pas en français ? *un livre est à Jean* mais plutôt *Jean a un livre* ou *il y a un livre qui est à Jean*.
Aux deux valeurs fondamentales qui apparaissent dans l'analyse de la copule, s'ajoute une troisième qui apparaît lorsqu'on traite de la négation et que l'on organise les catégories grammaticales. Cette troisième valeur est la ruption.
On l'utilise dans la catégorie des personnes lorsque l'on veut rendre compte du fait que "il ne renvoie ni à JE (l'énonciateur) ni à TU (le coénonciateur)". La ruption apparaît également dans l'analyse de l'aspect, notamment dans l'opposition énonciatif/aoristique.

L'axiomatique présentée ici se situe dans un cadre strictement ensembliste qui diffère de celui adopté dans [DES-80].

Les notations employées sont les suivantes :

		relation canonique	relation associée	relation duale
identification	=	σ_o	$d(\sigma_o)$	$\delta(\sigma_o)$
différenciation	$\neq$	σ_1	$d(\sigma_1)$	$\delta(\sigma_1)$
ruption	ω	σ_2	$d(\sigma_2)$	$\delta(\sigma_2)$

REMARQUE : Dans la plupart des publications linguistiques, il est fait usage des symboles =, $\neq$, ω pour désigner respectivement l'identification, la différenciation et la ruption (ou rupture).

2. SYSTEMES DE REPERAGE : DEFINITIONS

2.1. Notations et définitions préliminaires

E et F désignent deux ensembles non vides.

Une correspondance Γ (entre E et F) est la donnée de (G, E, F) où G est une partie de E x F, dite graphe de la correspondance Γ. La correspondance inverse Γ^{-1} de Γ est définie par (G^{-1}, F, E) où G^{-1} est la partie converse de G (on dit aussi partie inverse) : G^{-1} sera dit graphe inverse de Γ :

$(\forall x \in E)\ (\forall y \in F)\ ((y, x) \in G^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in G)$.

Par abus d'écriture, on note de la même façon 'Γ' la relation binaire (de E à F) canoniquement associée à la correspondance $\Gamma = (G, E, F)$ et la correspondance elle-même. On notera parfois G_Γ le graphe de la relation Γ.

Une correspondance Γ est fonctionnelle lorsqu'elle vérifie la propriété :

$(\forall x \in E)\cdot(\forall y, z \in F)\quad [(x, y) \in G \text{ et } (x, z) \in G \Rightarrow y = z]$

Dans ce cas, la correspondance Γ peut être considérée comme une opération $\Gamma^{\cdot}$ (ou une fonction) de domaine E et de codomaine F ; "l'ensemble de définition" de cette opération, noté $D_{\Gamma^{\cdot}}$, est un sous-ensemble de E :

$D_{\Gamma^{\cdot}} = \{x \in E / \exists\ y \in F \text{ tq } (x, y) \in G\}$

Lorsque x appartient à l'ensemble de définition $D_{\Gamma^{\cdot}}$, nous écrivons à la place de $(x, y) \in G$:

$$y = x\Gamma^{\cdot}$$

Lorsque $D_{\Gamma^{\cdot}} = E$, $\Gamma^{\cdot}$ est une application de E dans F (ou opération partout définie).

Soit $\Gamma^{\cdot}$ une opération de domaine E et de codomaine F, nous avons :

$(\forall x \in D_{\Gamma^{\cdot}})\quad [y = x\Gamma^{\cdot} \Leftrightarrow x\ \Gamma\ y\ ]$

REMARQUE 1 : La relation '$x\ \Gamma\ y$' est dite 'relation binaire associée canoniquement à l'opération '$\Gamma^{\cdot}$''. Dans certains contextes, il sera utile de se référer à l'opération $\Gamma^{\cdot}$, dans d'autres à la relation canoniquement associée

'Γ'.

Une correspondance $\Gamma = (G, E, F)$ est représentable par un <u>diagramme</u> $D(\Gamma)$ où les objets sont les éléments de E et de F et où les flèches sont en bijection avec les couples (x, y) de G :

$$'x \longrightarrow y' \Leftrightarrow (x, y) \in G$$

<u>Un diagramme dual</u> $\delta(D(\Gamma))$ du diagramme $D(\Gamma)$ est obtenu en conservant les objets mais en inversant le sens de toutes les flèches de $D(\Gamma)$:

si $'x \longrightarrow y'$ est une flèche de $D(\Gamma)$, alors $'x \longleftarrow y'$ est une flèche de $\delta(D(\Gamma))$.

<u>Une</u> partie duale $\delta(G)$ d'une partie $G \subset E \times F$ est une partie de $F \times E$ telle que :

$$(\forall x \in E)\ (\forall y \in F) : \quad [(x, y) \in G \Rightarrow (y, x) \in \delta(G)]$$

<u>PROPRIETE</u> : Soit $G \subset E \times F$; $\delta(\delta(G)) \supset G$.

Soit $\Gamma = (G, E, F)$ une correspondance (entre E et F) ; une <u>correspondance duale</u>, notée $\delta(\Gamma)$, est la donnée de $(\delta(G), F, E)$ où $\delta(G)$ est une partie duale du graphe G de la correspondance Γ; dans ce cas on dit que $\delta(G)$ est un graphe dual de G.

Si $\Gamma = (G, E, F)$ est une correspondance fonctionnelle, alors une correspondance duale de Γ, $\delta(\Gamma)$, n'est pas en général fonctionnelle. Désignons cependant par $\delta(\Gamma)^{\cdot}$ l'"opération multivoque" de domaine F et de codomaine E, déterminée par le graphe dual $\delta(G)$ de $\delta(\Gamma)$. Nous en déduisons alors :

$$(\forall x \in D_{\Gamma^{\cdot}}) : \quad [y = x\Gamma^{\cdot} \Rightarrow x \in y\,\delta(\Gamma)^{\cdot}]$$

<u>REMARQUE 2</u> : Alors que $\Gamma^{\cdot}$ est fonctionnelle c'est-à-dire qu'à chaque élément x de son ensemble de définition correspond un unique y tel que $y = x\Gamma^{\cdot}$, la "fonction multivoque" $\delta(\Gamma)^{\cdot}$ n'a plus cette propriété : l'image y de x pour $\Gamma^{\cdot}$

est définie de façon déterministe ; par contre, une image de y, pour $\mathcal{E}(\Gamma)^{\bullet}$, n'est pas obtenue de façon déterministe.

2.2. Rappel de quelques propriétés des relations binaires

Désormais nous supposons que E = F.

DEFINITION 1 : Soit Γ une relation binaire sur E et soit $a \in E$. La classe des satellites de a pour Γ est notée $[\Gamma]\,a$ et définie par :

$$[\Gamma]a = \{x \in E \mid x\,\Gamma\,a\} \qquad \square$$

Nous désignons par $\overline{\Gamma}$ la fermeture réflexive et transitive de la relation binaire Γ sur E.

DEFINITION 2 : Soit deux relations binaires sur E, Γ_1 et Γ_2. La relation Γ_1 est plus fine que la relation Γ_2 si :

$$\forall x, y \in E : \quad [x\,\Gamma_1 y \Rightarrow x\,\Gamma_2 y]$$

Nous notons : $\Gamma_1 \leq \Gamma_2$. $\square$

Notations : Lorsqu'une relation binaire Γ vérifie une propriété P, nous noterons :'$(\Gamma)(P)$'. La "négation logique" d'une propriété est notée 'n.P'.

DEFINITION 3 : Une relation binaire Γ est dite :

- réflexive (totalement) (ρ) $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $(\forall x \in E)\ (x\Gamma x)$
- symétrique (σ) $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $(\forall x, y \in E)\ [x\Gamma y \Rightarrow y\Gamma x]$
- transitive (τ) $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $(\forall x, y, z \in E)\ [x\Gamma y \text{ et } y\Gamma z \Rightarrow x\Gamma z]$
- irréflexive $(I\rho)$ $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $(\forall x \in E)\ [\text{non } (x\Gamma x)]$
- asymétrique $(A\sigma)$ $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $(\forall x, y \in E)\ [x\Gamma y \Rightarrow \text{non } (y\Gamma x)]$
- dissymétrique $(D\sigma)$ $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $(\exists y \in E)\ (\forall x \in E)\ [x\Gamma y \Rightarrow \text{non } (y\Gamma x)]$
- pseudo-symétrique $(\Psi\sigma)$ $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $(\forall x, y \in E)\ [x\Gamma y \Rightarrow y\Gamma x \text{ et } x \neq y]$

. <u>antisymétrique</u> (Antσ) $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $(\forall x, y \in E)\ [(x \neq y \text{ et } x\Gamma y) \Longrightarrow \text{non } (y\Gamma x)]$ □

On rappelle que deux propositions p et q sont

<u>contradictoires</u> si l'on a : (p et non q) ou (non p et q), on note alors : 'pwq'

<u>contraires</u> si l'on a : non (p et q), on note alors : 'p|q'.

Deux propositions contradictoires sont contraires.

<u>REMARQUES</u> : 1) 'w' et '|' désignent respectivement le "ou exclusif" et "l'incompatibilité logique" ; le "ou (non exclusif)" est désigné par v.

2) Nous supposerons désormais que l'ensemble E a au moins deux éléments puisque nous nous intéresserons aux relations binaires Γ telles que :

$$(\exists x, y \in E) : [x \neq y \text{ et } x\Gamma y].$$

<u>THEOREME 1</u> : Soit E un ensemble ayant au moins deux éléments. Soit Γ une relation binaire sur E telle que :

$$(\exists x, y \in E)\quad [x \neq y \text{ et } x\Gamma y]$$

Nous avons le diagramme suivant où :

chaque sommet désigne une propriété vérifiée par Γ

chaque flèche désigne une relation logique.

$$\begin{tikzcd}
 & (\Gamma)(\sigma) \arrow[rr, leftrightarrow, "\mid"] \arrow[dd] & & (\Gamma)(A\sigma) \arrow[dl] \arrow[dd] \arrow[r] & (\Gamma)(D\sigma) \\
(\Gamma)(\Psi\sigma) \arrow[ur] \arrow[rr, leftrightarrow, "\mid"] \arrow[dd] & & (\Gamma)(\mathrm{Ant}\sigma) \arrow[dd] & & \\
 & (\Gamma)(n.A\sigma) \arrow[rr, leftrightarrow, "v"] & & (\Gamma)(n.\sigma) \arrow[dl] & \\
(\Gamma)(n.\mathrm{Ant}\sigma) \arrow[ur] \arrow[rr, leftrightarrow, "v"] & & (\Gamma)(n.\Psi\sigma) & &
\end{tikzcd}$$

N.B. : Les flèches non étiquetées désignent des implications.

La démonstration est "classique" et ne présente aucune difficulté.

Le lecteur reconnaîtra deux "carrés des oppositions" :

$$\begin{tikzcd}
(\Gamma)(\sigma) \arrow[r, leftrightarrow, "|"] \arrow[d] \arrow[dr, leftrightarrow, "w"] & (\Gamma)(A\sigma) \arrow[d] \arrow[dl, leftrightarrow, "w"'] \\
(\Gamma)(n.A\sigma) \arrow[r, leftrightarrow, "v"] & (\Gamma)(n.\sigma)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(\Gamma)(\Psi\sigma) \arrow[r, leftrightarrow, "|"] \arrow[d] \arrow[dr, leftrightarrow, "w"] & (\Gamma)(\mathrm{Ant}\,\sigma) \arrow[d] \arrow[dl, leftrightarrow, "w"'] \\
(\Gamma)(n.\mathrm{Ant}\,\sigma) \arrow[r, leftrightarrow, "v"] & (\Gamma)(n.\Psi\sigma)
\end{tikzcd}$$

Sont contradictoires (w) entre elles les propriétés :

(σ) et $(n.\sigma)$; $(A\sigma)$ et $(n.A\sigma)$; $(\Psi\sigma)$ et $(n.\Psi\sigma)$; $(\mathrm{Ant}\,\sigma)$ et $(n.\mathrm{Ant}\,\sigma)$.

Sont contraires (|) entre elles les propriétés :

(σ) et $(A\sigma)$; $(\Psi\sigma)$ et $(\mathrm{Ant}\,\sigma)$.

THEOREME 2 : Avec les mêmes hypothèses que dans le théorème précédent, on a:

(1) $(\Gamma)\ (A\sigma) \Rightarrow (\Gamma)\ (I\rho)$

(2) $(\Gamma)\ (I\rho)$ et $(\Gamma)\ (\sigma) \Rightarrow (\Gamma)\ (n.\tau)$

PREUVE :

(1) $[(\forall x, y \in E)\ (x\Gamma y \Rightarrow \text{non } (y\Gamma x))] \Rightarrow [(\forall x \in E)\ (x\Gamma x \Rightarrow (\text{non}(x\Gamma x)))]$

or $[(\forall x \in E)\ (x\Gamma x \Rightarrow \text{non } (x\Gamma x))] \Leftrightarrow [(\forall x \in E)\ (\text{non } (x\Gamma x))]$

D'où : $[(\forall x, y \in E)\ (x\Gamma y \Rightarrow \text{non } (y\Gamma x))] \longrightarrow [(\forall x \in E)\ (\text{non}(x\Gamma x))]$

(2) On utilise l'hypothèse : $(\exists x, y \in E)\ (x \neq y \text{ et } x\Gamma y)$,

compatible avec : $[(\forall x \in E)\ (\text{non } (x\Gamma x))]$.

$\{[(\forall x, y \in E)\ (x\Gamma y \Rightarrow y\Gamma x)]$ et $[(\exists x, y \in E)\ (x \neq y \text{ et } x\Gamma y)]\} \Rightarrow$

$\Rightarrow [(\exists x, y \in E)\ (x \neq y \text{ et } x\Gamma y \text{ et } y\Gamma x)]$. D'où :

$\{[(\forall x \in E)(\text{non}(x\Gamma x))]$ et $[(\forall x,y \in E)(x\Gamma y \Rightarrow y\Gamma x)]$ et $[(\exists x,y \in E)(x \neq y \text{ et } x\Gamma y)]\} \Rightarrow$

$\Rightarrow [(\exists x, y \in E)\ (x \neq y \text{ et } x\Gamma y \text{ et } y\Gamma x \text{ et non } (x\Gamma x))]$

Le dernier membre de cette implication implique à son tour :

$(\exists x,y,z \in E)\ (x\Gamma y \text{ et } y\Gamma z \text{ et non } (x\Gamma z))$. D'où le résultat. □

DEFINITION 4 : Soit Γ une relation binaire sur E et soient P et Q deux propriétés de relations binaires. On dit que :

- P et Q sont compatibles pour Γ si :

  $[(\Gamma)\ (P)$ et $(\Gamma)\ (Q)]$ est vraie

- P est une spécification de Q pour Γ si :

  $[(\Gamma)\ (P) \Rightarrow (\Gamma)\ (Q)]$ est vraie. □

REMARQUE : Ces notions permettent d'introduire une hiérarchie sur une classe de propriétés attribuables à une relation binaire. Pour plus de détails, voir [DES-80] (annexe IV).

2.3. Systèmes de repérages

E est un ensemble donné.

DEFINITION 5 : On appelle repérage par σ sur E, la donnée d'un triplet $<\sigma,\ \delta(\sigma),\ d(\sigma)>$ où σ est une correspondance fonctionnelle sur E, $\delta(\sigma)$ une correspondance duale de σ et $d(\sigma)$ une relation binaire moins fine que la relation canonique (notée également σ), associée à σ.

σ (respectivement $\sigma^{\bullet}$) est appelée relation (respectivement opération) de repérage.

$\delta(\sigma)$ (respectivement $\delta(\sigma)^{\bullet}$) est appelée relation (respectivement opération) de détermination. □

REMARQUE 1 : Rappelons que la relation $d(\sigma)$ a été introduite pour rendre compte, entre autres, de la distinction entre identité et identification.

REMARQUE 2 : Soit $<\sigma,\ \delta(\sigma),\ d(\sigma)>$ un repérage sur E. L'opération $\sigma^{\bullet}$ définie par la correspondance fonctionnelle σ est déterministe (au sens de la remarque 2 de 2.1) ; par contre, l'"opération multivoque" $\delta(\sigma)^{\bullet}$ est non déterministe : si x est repéré par rapport à y, alors x est un des éléments déterminés par y.

$$(\forall x, y \in E)\ (x\sigma y \Rightarrow y\ \delta(\sigma) x)$$

DEFINITION 6 : Soit $<\sigma, \mathcal{E}(\sigma), d(\sigma)>$ un repérage par σ sur E. Le repérage est dit avoir une propriété P si la relation $d(\sigma)$ vérifie la propriété P.

N.B. : Nous prions le lecteur de nous excuser si nous employons la même lettre σ, pour renvoyer à des notions distinctes (σ renvoie dans la proposition suivante à la propriété de symétrie et σ' au repérage). C'est pour garder des notations usitées en divers endroits que nous le faisons.

PROPOSITION 1 : Soit $<\sigma', \mathcal{E}(\sigma'), d(\sigma')>$ un repérage par σ' sur E. Si le repérage possède l'une des trois propriétés $I\rho$, $n.\rho$ ou $D\sigma$, alors la relation de repérage σ' la possède.

PREUVE :

(i) Comme $\sigma' \leq d(\sigma')$, on a :

$$[(\exists x \in E)\ (x\sigma' x) \Rightarrow (\exists x \in E)\ (xd(\sigma')x)]$$

D'où : $[(\forall x \in E)\ (\text{non}\ (xd(\sigma')x))] \Rightarrow [(\forall x \in E)\ (\text{non}\ (x\sigma' x))]$

c'est-à-dire : $(d(\sigma'))\ (I\rho) \Rightarrow (\sigma')\ (I\rho)$

(ii) Comme $\sigma' \leq d(\sigma')$ on a :

$$[(\forall x \in E)\ (x\sigma' x) \Rightarrow (\forall x \in E)\ (xd(\sigma')x)]$$

D'où : $[(\exists x \in E)\ (\text{non}\ (xd(\sigma')x))] \Rightarrow [(\exists x \in E)\ (\text{non}\ (x\sigma' x))]$

c'est-à-dire : $(d(\sigma'))\ (n.\rho) \Rightarrow (\sigma')\ (n.\rho)$

(iii) Comme $\sigma' \leq d(\sigma')$, on a :

$$[(\forall y \in E)(\exists x \in E)\ (x\sigma' y \text{ et } y\sigma' x)]$$
$$\Rightarrow\ [(\forall y \in E)(\exists x \in E)(xd(\sigma')y \text{ et } yd(\sigma')x)]$$

D'où : $[(\exists y \in E)(\forall x \in E)(xd(\sigma')y \Rightarrow \text{non}\ (yd(\sigma')x))]$

$$\Rightarrow\ [(\exists y \in E)(\forall x \in E)(x\sigma' y \Rightarrow \text{non}\ (y\sigma' x))]$$

c'est-à-dire : $(d(\sigma'))\ (D\sigma) \Longrightarrow (\sigma')\ (D\sigma)$. □

Les propriétés de réflexivité et de symétrie vont nous permettre de spécifier divers types de repérage :

DEFINITION 7 : Soit $<\sigma\ ,\ \mathcal{E}(\sigma),\ d(\sigma)>$ un repérage par σ sur E.

(1) Si le repérage est réflexif et symétrique, le repérage sera appelé repérage par identification.

(2) Si le repérage est dissymétrique, le repérage sera appelé repérage par différenciation.

(3) Si le repérage est irréflexif et symétrique et si de plus, la relation de détermination est irréflexive, le repérage sera appelé repérage par ruption. □

PROPOSITION 2 : Un repérage par différenciation est tel que la relation de repérage est dissymétrique.

Un repérage par ruption est tel que la relation de repérage est irréflexive.

PREUVE : Soit $<\sigma',\ \delta(\sigma'),\ d(\sigma')>$ un repérage tel que $(d(\sigma'))\ (D\sigma)$.

D'après la proposition 1 de 2.3., $(d(\sigma'))\ (D\ \sigma) \Rightarrow (\sigma')\ (D\sigma)$.

Soit $<\sigma',\ \delta(\sigma'),\ d(\sigma')>$ un repérage tel que $(d(\sigma'))\ (I\rho)$. D'après la proposition 1 de 2.3. : $(d(\sigma'))(I\rho) \Rightarrow (\sigma')\ (I\rho)$. □

Nous allons désormais alléger la notation du repérage : à la place du triplet $<\sigma,\ \mathcal{E}(\sigma),\ d(\sigma)>$, nous noterons $<\sigma,\ \mathcal{E}(\sigma)>$, lorsque $d(\sigma)$ est donnée implicitement.

<u>DEFINITION 8</u> : On définit trois types de repérages particuliers $<\sigma_i, \delta(\sigma_i)>$, $i \in \{o, 1, 2\}$, où σ_i est une correspondance fonctionnelle, $\delta(\sigma_i)$ une correspondance duale de σ_i :

(1) un <u>repérage par identification</u> $<\sigma_o, \delta(\sigma_o)>$

(2) un <u>repérage par différenciation</u> $<\sigma_1, \delta(\sigma_1)>$, où la relation σ_1 est dissymétrique

(3) un <u>repérage par ruption</u> $<\sigma_2, \delta(\sigma_2)>$, où les relations σ_2 et $\delta(\sigma_2)$ sont irréflexives.

Nous gardons la terminologie donnée dans la définition 5, pour les différents types de repérage $<\sigma_i, \delta(\sigma_i)>$ $(i \in \{o, 1, 2\})$. □

3. SYSTEME DE REPERAGE FONDAMENTAL

La définition et les axiomes ont été introduits sous une forme légèrement différente dans [DES-80].

3.1. Définition et axiomes du repérage

3.1.1.

DEFINITION 9 : Soit un ensemble E non vide. On définit sur E trois types de repérage :

(i) un repérage par identification $\langle \sigma_0, \delta(\sigma_0) \rangle$

(ii) un repérage par différenciation $\langle \sigma_1, \delta(\sigma_1) \rangle$ (la relation σ_1 est dissymétrique) ;

(iii) un repérage par ruption $\langle \sigma_2, \delta(\sigma_2) \rangle$ (les relations σ_2 et $\delta(\sigma_2)$ sont irréflexives).

Un système de repérage fondamental $\underline{\underline{S}}$ est la donnée d'un ensemble $S \subset E$, dit ensemble sous-jacent à $\underline{\underline{S}}$, structuré à l'aide des trois repérages $\langle \sigma_0, \delta(\sigma_0) \rangle$, $\langle \sigma_1, \delta(\sigma_1) \rangle$, $\langle \sigma_2, \delta(\sigma_2) \rangle$ tels que les axiomes suivants AX0, AX1, AX2 et AX3 soient vérifiés. □

AX0 : (i) $(\forall x \in S)\ (\forall y \in E)\ [x\delta(\sigma_0)y \Rightarrow y \in S]$

(ii) $(\forall x, y \in E)\ (\forall u, v \in S)\ [(u \in [\overline{\delta(\sigma_1)}]v \text{ et } x\sigma_0 u \text{ et } y\sigma_0 v) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x \in [\overline{\delta(\sigma_1)}]y)]$

AX1 : Soient $x \in S$, $y \in E$

Si $x\ \delta(\sigma_1)y$ alors $y \in S$ et $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tq $y\sigma_1^n x$

DEFINITION 10 : Soit $x \in S$, si $x \notin D_{\sigma_1}$, x est appelé origine relative de $\underline{\underline{S}}$.

AX2 : Soient $x \in S$, $y \in E$

Si $x\,\delta(\sigma_2)y$ alors $y \in S$ et $\exists x_o \in S$ tq (a) (b) (c) :

(a) $x \in [\overline{\sigma_1}]x_o$ et $y\sigma_2 x_o$

(b) si $x \neq x_o$:

. si $x' \in E$, $x' \neq x_o$, $x' \neq x$ tq $\{x' \in [\overline{\sigma_1}]x_o$ et $x \in [\overline{\sigma_1}]x'$ et $x'\,\delta(\sigma_2)y'\}$

alors $y \in [\overline{\sigma_1}]y'$

. si $x'' \in E$, $x'' \neq x$ tq $\{x'' \in [\overline{\sigma_1}]x$ et $x''\,\delta(\sigma_2)y''\}$

alors $y'' \in [\overline{\sigma_1}]y$

(c) α) $(\forall v \in E \setminus \{x_o\})\ [y\,\delta(\sigma_1)v \Rightarrow v\sigma_2 x_o]$

β) $(\forall w \in E \setminus \{x_o\})\ [y\sigma_1 w \Rightarrow w\sigma_2 x_o]$

DEFINITION 11 : Un tel élément x_o est appelé point de base pour σ_2, associé à (x,y). □

AX3 : Il existe un unique élément de S, a_{oo} tq : $(a_{oo} \notin D_{\sigma_o} \cup D_{\sigma_1} \cup D_{\sigma_2})$ et $\exists y \in E$ tq $(a_{oo}\,\delta(\sigma_o)y$ ou $a_{oo}\,\delta(\sigma_1)y$ ou $a_{oo}\,\delta(\sigma_2)y)$

DEFINITION 12 : Un tel élément a_{oo} est appelé origine absolue de S.

REMARQUE : • $x\sigma_o y$ (resp. $x\sigma_1 y$, resp. $x\sigma_2 y$) se lit : x est repéré par identification (resp. par différenciation, resp. par ruption) par y.

• $x\,\delta(\sigma_o)y$ (resp. $x\,\delta(\sigma_1)y$, resp. $x\,\delta(\sigma_2)y$) se lit : x détermine par identification (resp. par différenciation, resp. par ruption) y.

3.1.2. Commentaire des axiomes :

o) L'axiome AXO signifie que : - tout élément de E déterminé par identification par un élément de S est aussi élément de S ;

- si 2 éléments x et y de E sont repérés par identification, l'un et l'autre par 2 éléments u et v de S, tels qu'il existe un chemin de détermination par différenciation joignant u à v, alors il existe aussi un chemin de détermination allant de x à y. On a ainsi le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[r, "\delta(\sigma_1)"'] & u_1 \arrow[r, "\delta(\sigma_1)"'] & u_2 \arrow[r, dashed] & u_{n-1} \arrow[r, "\delta(\sigma_1)"'] & v \\
x \arrow[u, "\sigma_o"] \arrow[r, "\delta(\sigma_1)"] & v_1 \arrow[r, "\delta(\sigma_1)"] & v_2 \arrow[r, dashed] & v_{m-1} \arrow[r, "\delta(\sigma_1)"] & y \arrow[u, "\sigma_o"']
\end{tikzcd}$$

Lorsque $\overline{\delta(\sigma_1)}$ s'interprète comme une relation d'antériorité, AXO signifie que si u est antérieur à v, et si x est identifié à u, y à v, alors x est antérieur à y.

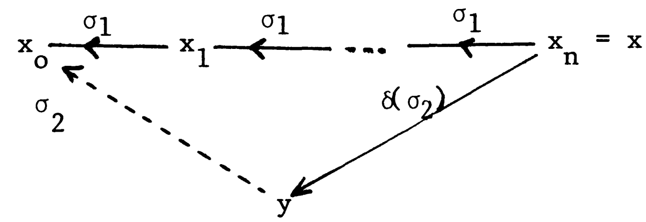
1) L'axiome AX1 signifie que : - tout élément de E déterminé par différenciation par un élément de S est aussi élément de S ;

- si un élément x de S détermine par différenciation un élément y de S, alors il existe un chemin fini de repérage par différenciation partant de y et aboutissant à x. On a ainsi le diagramme :

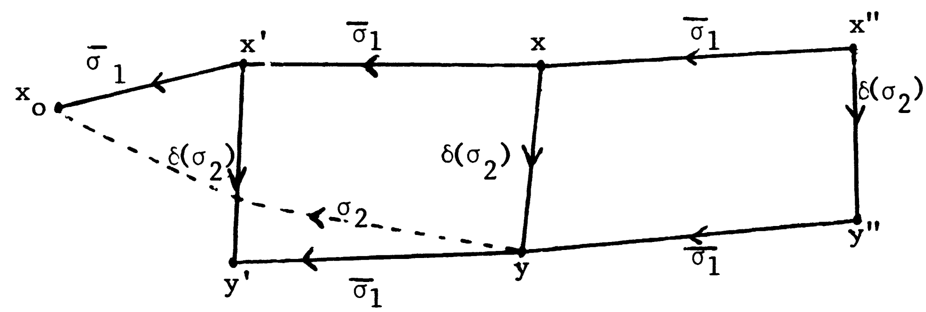
$$\begin{tikzcd}
x_n = x \arrow[rrrrrr, bend right, "\delta(\sigma_1)"'] & x_{n-1} \arrow[l, "\sigma_1"'] & x_{n-2} \arrow[l, "\sigma_1"'] \cdots x_i & x_{i-1} \arrow[l, "\sigma_1"'] \cdots x_2 & x_1 \arrow[l, "\sigma_1"'] & y = x_o \arrow[l, "\sigma_1"']
\end{tikzcd}$$

2) L'axiome AX2 signifie que pour tout élément x de S qui détermine par ruption un élément y de E, il existe un élément x_o de S - appelé point de base associé à (x, y) pour σ_2 - tel que les clauses suivantes soient vérifiées (et de plus $y \in S$) :

- <u>clause (a)</u> : il existe un chemin de repérage par différenciation fini, partant de x, aboutissant à x_o et y est repéré par ruption par x_o. On a ainsi le diagramme :



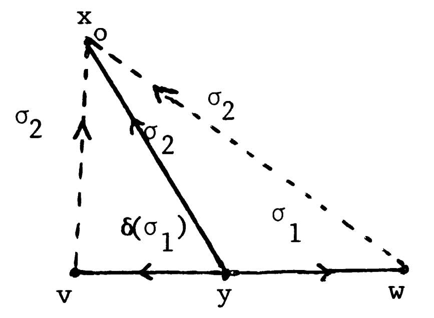
- <u>clause (b)</u> : si l'élément x', satellite de x_o pour la relation $\overline{\sigma_1}$ et tel que x soit satellite de x' pour la relation $\overline{\sigma_1}$, (resp. x" satellite de x pour la relation $\overline{\sigma_1}$) détermine par ruption l'élément y' de E (resp. l'élément y" de E), alors les rapports de différenciation entre y et y' (resp. y et y") sont du même type que ceux qui existent entre x et x' (resp. x et x") selon le diagramme :



Nous dirons de même que ci-dessus, en interprétant $\overline{\sigma_1}$ comme une relation d'antériorité, que la relation d'antériorité entre x et x' (resp. x et x") est la même que entre y et y' (resp. y et y").

- <u>clause (c)</u> : - tout élément v de $E \setminus \{x_o\}$ déterminé par différenciation par y, est repéré par ruption par x_o ;

- tout élément w de $E \setminus \{x_o\}$ qui repère par différenciation y, est repéré par ruption par x_o. On a ainsi le diagramme :



On a défini une composante locale en ruption avec le point x_o.

3) L'axiome AX3 signifie qu'il existe dans S un unique élément qui n'est repéré par aucun élément de S, quel que soit le type du repérage considéré De plus cet élément détermine pour l'un au moins des 3 repérages un élément de S.

Remarquons que l'origine absolue est une origine relative particulière.

3.2. Conséquences des axiomes - Propriétés :

N.B. Pour toutes les démonstrations omises ici, nous renvoyons le lecteur à [FROIDEVAUX, 1982, Thèse de 3ème Cycle, en cours].

On considère S, un ensemble sous-jacent à un système de repérage fondamental S.

PROPRIETE P1 : Soient $x \in S$, $y \in E$ tq $x\,\delta(\sigma_1)y$ et $(\forall m \in \mathbb{N}^*)$ $(\text{non}(x\sigma_1{}^m x))$.
Alors : $\exists! n \in \mathbb{N}^*$ tq $y\sigma_1{}^n x$.

REMARQUE R1 : $(\forall x \in E)$ $(\forall y \in E)$ $(x\sigma_i y \Rightarrow y\,\delta(\sigma_i)x)$ pour $i \in \{o, 1, 2\}$ par définition d'une relation duale. L'implication inverse est en général fausse. Dans certains systèmes de repérage, on pourra avoir : $(\forall x, y \in S)$ $(x\,\delta(\sigma_1)y \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y\sigma_1 x)$ (i-e $\delta(\sigma_1)$ coïncide sur S x S avec $\sigma_1{}^{-1}$).

Dans tous les cas cependant, on a :

- $(\forall x \in S)$ $(\forall y \in E)$ $[x\,\delta(\sigma_1)y \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*$ tq $y\sigma_1{}^n x]$
- $(\forall x \in S)$ $(\forall y \in E)$ $[x\,\delta(\sigma_2)y \Rightarrow \exists x_o \in S$ tq $y\sigma_2 x_o]$

<u>PROPRIETE P2</u> : Soient $x \in E$, $y \in S$, $n \in \mathbb{N}^*$, $i \in \{o, 1, 2\}$

Si $x\sigma_i{}^n y$ alors $y\,\delta(\sigma_i)^n x$ et $x \in S$.

Plus généralement : $(\forall x \in E)\ (\forall y \in S)\ (\ x\overline{\sigma_i}y \Rightarrow [y\overline{\delta(\sigma_i)}x$ et $x \in S]\ )$

<u>REMARQUE R2</u> : Soient $(x, y \in E)\ (u, v \in S)$ tq $x\sigma_o u$, $y\sigma_o v$ et $u \in [\overline{\delta(\sigma_1)}]v$.

Alors $x, y \in S$ d'après P2, et $x \in [\overline{\delta(\sigma_1)}]y$ d'après AXO (ii).On a :

$u \in [\overline{\delta(\sigma_1)}]v \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ tq $u\,\delta(\sigma_1)^n v$

$x \in [\overline{\delta(\sigma_1)}]y \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}$ tq $x\,\delta(\sigma_1)^m y$

L'axiome AXO ne dit rien sur l'éventuelle égalité de m et n.

<u>PROPRIETE P3</u> : $(\forall z \in S)\ (\forall v \in E)\ (z \in [\overline{\delta(\sigma_1)}]v \Leftrightarrow v \in [\overline{\sigma_1}]z)$

De plus, pour $z \in S$, si $z \in [\overline{\delta(\sigma_1)}]v$ ou si $v \in [\overline{\sigma_1}]z$ alors $v \in S$.

<u>PROPRIETE P4</u> : $(\forall u, v, w \in E)\ [(w \in [\overline{\sigma_1}]u$ et $w \in [\overline{\sigma_1}]v) \Rightarrow (u \in [\overline{\sigma_1}]v$ ou $v \in [\overline{\sigma_1}]u)]$

<u>REMARQUE R3</u> : Si $u \in [\overline{\sigma_1}]w$ et $v \in [\overline{\sigma_1}]w$, on n'a pas nécessairement $u \in [\overline{\sigma_1}]v$ ou $v \in [\overline{\sigma_1}]u$ car la relation $\delta(\sigma_1)$ n'est pas a priori fonctionnelle.

<u>DEFINITION 13</u> : Soit $y \in S$. On appelle <u>origine relative pour y</u>, une origine relative h_o de $\underline{S}$ telle que $y \in [\overline{\sigma_1}]h_o$.

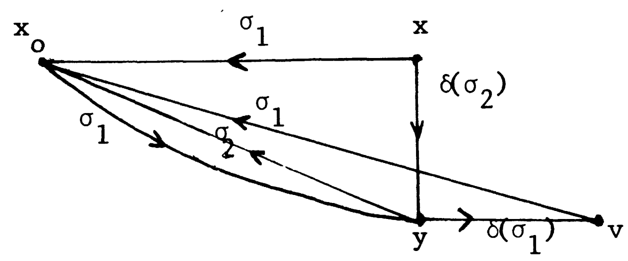
<u>PROPRIETE P5</u> : Soit $y \in S$. S'il existe une origine relative pour y, alors elle est unique.

<u>PREUVE</u> : Supposons que h_o et h'_o soient 2 origines relatives pour $y \in S$.
$(y \in [\overline{\sigma_1}]\,h_o$ et $y \in [\overline{\sigma_1}]h'_o) \Rightarrow (h_o \in [\overline{\sigma_1}]h'_o$ ou $h'_o \in [\overline{\sigma_1}]h_o)$ d'après P4. Or h_o et h'_o sont des origines relatives de $\underline{S}$: $[(\forall x \in S)\ (x \neq h_o \Rightarrow$
$\Rightarrow h_o \notin [\overline{\sigma_1}]x)]$ et $[(\forall x \in S)\ (x \neq h'_o \Rightarrow h'_o \notin [\overline{\sigma_1}]x)]$. D'où $h_o = h'_o$. □

REMARQUE R4 : On ne peut pas remplacer AX1 et AX2 par AX1 et AX2', où AX2' s'obtient à partir de AX2 en remplaçant la clause (c)α) par (c) α') :

$(\forall v \in E \setminus \{x_o\}), [v\sigma_1 y \Rightarrow v\sigma_2 x_o]$

Voici un exemple de structure vérifiant (AX1 et AX2') et ne vérifiant pas (AX1 et AX2) :



Nous n'avons indiqué que des parties des graphes. Plus précisément on a :

$G_{\sigma_1} = \{(x, x_o), (v, x_o), (x_o, y)\}$

$G_{\delta(\sigma_1)} = \{(x_o, x), (x_o, v), (y, x_o), (y, v)\}$

$G_{\sigma_2} = \{(y, x_o)\}$; $G_{\delta(\sigma_2)} = \{(x, y), (x_o, y)\}$

L'obstacle provient du fait que si $y\,\delta(\sigma_1)v$ alors il existe un chemin de repérage par différenciation partant de v, aboutissant à y, d'après AX1, mais que ce chemin peut contenir x_o. On ne peut pas montrer successivement (en commençant par y) que chaque élément u du chemin est tel que $(u, x_o) \in G_{\sigma_2}$, car dans AX2 c) on exclut $v = x_o$, $w = x_o$.

Il s'ensuit qu'on n'a pas nécessairement $(v, x_o) \in G_{\sigma_2}$.

PROPOSITION II 1 : Soient x_o, $z \in S$ tq $z\sigma_2 x_o$. Alors :

(i) $(\forall v \in E)$ $[\{(\exists n \in \mathbb{N})\ (\exists u_o, u_1, \ldots, u_n \in E \setminus \{x_o\}$ tq $(u_o=z, u_n=v$ et $(\forall i, o \le i \le n-1)\ (u_i\,\delta(\sigma_1)u_{i+1})))\} \Rightarrow \{v\sigma_2 x_o$ et $v \in S\}]$

(ii) $(\forall w \in E)$ $[\{(\exists m \in \mathbb{N})\ (\exists u_o, u_1, \ldots, u_m \in E \setminus \{x_o\}$ tq $(u_o=z, u_m=w$ et $(\forall i, o \le i \le m-1)\ (u_i\sigma_1 u_{i+1})))\} \Rightarrow \{w\sigma_2 x_o$ et $w \in S\}]$

COROLLAIRE C_1 : Soit x_o, $z \in S$ tq $z\sigma_2 x_o$. Alors :

(i) Soit $v \in E \setminus \{x_o\}$, si $v \in [\overline{\sigma_1}]z$ et si le plus court chemin de repérage par différenciation allant de v à z ne contient pas x_o, alors $v\sigma_2 x_o$ et $v \in S$.

(ii) Soit $w \in S \setminus \{x_o\}$, si $w \in [\overline{\delta(\sigma_1)}]z$ et si le plus court chemin de repérage par différenciation allant de z à w ne contient pas x_o, alors $w\sigma_2 x_o$.

N.B. : Dans (ii), il faut prendre $w \in S$ car on utilise P3 pour établir le résultat.

PROPRIETE P6 : Soient $x \in S$, $y \in E$ tq $x\,\delta(\sigma_2)y$. Soit $x_o \in S$ tq $x \in [\overline{\sigma_1}]x_o$ et $y\sigma_2 x_o$. Soient $x', y' \in S$ tq $x'\,\delta(\sigma_2)y'$ et ($y \in [\overline{\sigma_1}]y'$ ou $y \in [\overline{\delta(\sigma_1)}]y'$) et x_o n'appartient pas au plus court chemin de différenciation reliant y à y', alors x_o est le point de base associé au couple (x',y').

REMARQUE R5 : Le point de base x_o associé au couple (x, y) joue un rôle très particulier puisqu'il détermine par ruption les éléments de tout chemin de repérage par différenciation contenant le point y pourvu que ce chemin ne contienne pas x_o. De plus, si x est un satellite de x_o pour $\overline{\sigma_1}$ et si $x_o\,\delta(\sigma_2)u_o$ et si $x\,\delta(\sigma_2)u$, u n'est pas nécessairement un satellite de u_o pour $\overline{\sigma_1}$: AX2 b) ne concerne pas le cas où le point de base associé à un couple coïncide avec le premier terme de ce couple.

REMARQUE R6 : On peut construire sur un ensemble E donné plusieurs systèmes de repérage fondamentaux tels que les ensembles sous-jacents soient strictement inclus dans E.

Exemple : Soit E un ensemble infini dénombrable. Soient S_1, S_2, S_3 des sous-ensembles de E tels que :

- $E = S_1 \cup S_2 \cup S_3$
- $S_1 = \{u_o, u_1, \ldots, u_n, \ldots\}$ où $(\forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j)$ $(u_i \neq u_j)$ (par

exemple, la suite u_n est strictement croissante)

- $S_2 = \{v_o, v_1, \ldots, v_n, \ldots\}$ où $(\forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j)$ $(v_i \neq v_j)$ (par exemple, la suite v_n est strictement décroissante)
- $S_3 = \{1\}$ avec $1 \notin S_1 \cup S_2$ • $S_1 \cap S_2 = \emptyset$

Les graphes des relations σ_o, σ'_o, Σ_o, $\delta(\sigma_o)$, $\delta(\sigma'_o)$, $\delta(\Sigma_o)$ sont vides.

- On définit un <u>premier repérage par différenciation</u> $<\sigma_1, \delta(\sigma_1)>$ sur E :

$(\forall x, y \in E)$ $[x\sigma_1 y \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N}^*)\ (x = u_n \text{ et } y = u_{n-1})]$

$(\forall x, y \in E)$ $(x\sigma_1 y \Leftrightarrow y\,\delta(\sigma_1)x)$

- On définit un <u>premier repérage par ruption</u> $<\sigma_2, \delta(\sigma_2)>$ sur E :

$(\forall x, y \in E)$ $[x\sigma_2 y \Leftrightarrow x \in S_3 \text{ et } y = u_o]$

$(\forall x, y \in E)$ $[x\,\delta(\sigma_2)y \Leftrightarrow x \in S_1 \text{ et } y \in S_3]$

- On définit un <u>deuxième repérage par différenciation</u> $<\sigma'_1, \delta(\sigma'_1)>$ sur E :

$(\forall x, y \in E)$ $[x\sigma'_1 y \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N}^*)\ (x = v_n, y = v_{n-1})]$

$(\forall x, y \in E)$ $[x\sigma'_1 y \Leftrightarrow y\,\delta(\sigma'_1)x]$

- On définit un <u>deuxième repérage par ruption</u> $<\sigma'_2, \delta(\sigma'_2)>$ sur E :

$(\forall x, y \in E)$ $[x\sigma'_2 y \Leftrightarrow x \in S_3 \text{ et } y = v_o]$

$(\forall x, y \in E)$ $[x\,\delta(\sigma'_2)y \Leftrightarrow x \in S_2 \text{ et } y \in S_3]$

Soit $\underline{\underline{S}}_1$ l'ensemble $S_1 \cup S_3$ structuré par $<\sigma_1, \delta(\sigma_1)>$, $<\sigma_2, \delta(\sigma_2)>$.

Soit $\underline{\underline{S}}_2$ l'ensemble $S_2 \cup S_3$ structuré par $<\sigma'_1, \delta(\sigma'_1)>$, $<\sigma'_2, \delta(\sigma'_2)>$.

Alors $\underline{\underline{S}}_1$ et $\underline{\underline{S}}_2$ sont des systèmes de repérage fondamentaux, mais $\underline{\underline{S}}$, l'ensemble E structuré par $<\Sigma_1, \delta(\Sigma_1)>$, $<\Sigma_2, \delta(\Sigma_2)>$, où

$$G_{\Sigma_1} = G_{\sigma_1} \cup G_{\sigma'_1}, \quad G_{\Sigma_2} = G_{\sigma_2} \cup G_{\sigma'_2}$$

$$G_{\delta(\Sigma_1)} = G_{\delta(\sigma_1)} \cup G_{\delta(\sigma'_1)}, \quad G_{\delta(\Sigma_2)} = G_{\delta(\sigma_2)} \cup G_{\delta(\sigma'_2)},$$

n'est pas un système de repérage fondamental car :

$[1\Sigma_2 u_o$ et $1\Sigma_2 v_o$ et $S_1 \cap S_2 = \emptyset]$ contredit le fait que la relation Σ_2 est fonctionnelle : il est impossible d'obtenir un système de repérage fondamental sur E tout entier, en gardant G_{Σ_1}, $G_{\delta(\Sigma_1)}$, $G_{\delta(\Sigma_2)}$ et en ne modifiant que G_{Σ_2}.

3.3. Exemples de systèmes de repérage

La plupart des exemples ci-dessous se trouvent exposés dans [DES-80]. La structure de came proposée ici reprend en la formalisant la notion de came mentionnée par J.P. Desclés dans ("Opérations constitutives des énoncés" in Fundamenta Scientiae, 91, Strasbourg, 1981) et suggérée par A. Culioli. Pour le détail des démonstrations, le lecteur pourra se reporter à [FRO-82].

3.3.1. Exemple

Dans cet exemple, les graphes relatifs à σ_o et $\delta(\sigma_o)$ sont vides. E = S.

- Soit S un ensemble infini dénombrable, tel que : $S = S_1 \cup S_2$ avec

  $S_1 = \{a_o, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$

  $S_2 = \{b_o, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}$

  et $S_1 \cap S_2 = \emptyset$

(1) On définit sur S un repérage par différenciation $<\sigma_1, \delta(\sigma_1)>$ de la façon suivante :

. Soit $\sigma_1^{\bullet}$ l'application injective de $S - \{a_o, b_o\}$ dans S telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_n = a_{n+1}\sigma_1^{\bullet} \\ b_n = b_{n+1}\sigma_1^{\bullet} \end{cases}$$

σ_1 est la relation canonique associée à l'application $\sigma_1^{\bullet}$:

$(\forall x, y \in S)\ (x\sigma_1 y \Leftrightarrow y = x\sigma_1^{\bullet})$

On définit une relation de détermination $\delta(\sigma_1)$:

. $(\forall x, y \in S)\ (x\,\delta(\sigma_1)y \Leftrightarrow y\sigma_1 x)$

(2) On définit sur S un repérage par ruption $<\sigma_2, \delta(\sigma_2)>$ ainsi :

. $(\forall x, y \in S)\ (x\sigma_2 y \Leftrightarrow x \in S_2$ et $y = a_o)$

. $(\forall x, y \in S)\ (x\,\delta(\sigma_2)y \Leftrightarrow [(\exists p \in \mathbb{N}^*$ tq $x = a_{2p}, y = b_p)$ ou $(x = a_o, y \in S_2)])$

$\underline{\underline{S}}$ est l'ensemble S qui est structuré par les 2 repérages définis précédemment.

PROPOSITION 1 : $(\forall i, j \in \mathbb{N}) [i \neq j \Rightarrow (a_i \neq a_j \text{ et } b_i \neq b_j)]$

PROPOSITION 2 :

. La relation $\delta(\sigma_1)$ est bien une relation duale de σ_1, de même $\delta(\sigma_2)$ pour σ_2. On a : (σ_1) $(D\sigma)$, (σ_2) $(I\rho)$, $(\delta(\sigma_2))$ $(I\rho)$.

. La relation $\delta(\sigma_1)$ est fonctionnelle

PROPOSITION 3 :

a) $S_1 = [\bar{\sigma_1}]a_o$, $S_2 = [\bar{\sigma_1}]b_o$

b) $(\forall k \in \mathbb{N})$ $(\forall x \in S)$ $(a_k \in [\bar{\sigma_1}]x \Rightarrow (\exists q, o \leq q \leq k)$ $(x = a_q))$

$(\forall k \in \mathbb{N})$ $(\forall x \in S)$ $(x \in [\bar{\sigma_1}]a_k \Rightarrow (\exists q, k \leq q)$ $(x = a_q))$

On a un résultat analogue pour les éléments b_k de S_2.

PROPRIETE 1 : $\underline{\underline{S}}$ vérifie AX1.

PROPOSITION 4 : Il y a 2 origines relatives et 2 seulement : a_o et b_o.

PROPRIETE 2 : $\underline{\underline{S}}$ vérifie AX3, a_o est l'origine absolue.

PROPRIETE 3 : $\underline{\underline{S}}$ vérifie AX2.

PREUVE : Soient $x, y \in S$ tq $x\,\delta(\sigma_2)y$; 2 cas se présentent :

(i) $x = a_o$, $y \in S_2$

Alors $y\sigma_2 a_o$ par définition ; a_o est le seul point susceptible d'être le point de base de (a_o, y) pour σ_2 et AX2 a) est vérifié ; x coïncidant avec le point de base a_o, AX2 b) n'est pas à considérer.

[$v \in S$ et $y\,\delta(\sigma_1)v$] $\Rightarrow$ $v \in S_2$ et donc $v\sigma_2 a_o$

[$w \in S$ et $y\sigma_1 w$] $\Rightarrow$ $w \in S_2$ et donc $w\sigma_2 a_o$

AX2 c) est donc vérifié.

(ii) $x \neq a_o$: $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $x = a_{2p}$, $y = b_p$

AX2 (a) est vérifié car $b_p \sigma_2 a_o$ et $a_{2p} \in [\overline{\sigma_1}]\, a_o$: a_o est le seul point susceptible d'être le point de base de (a_{2p}, b_p) pour σ_2.

AX2(c) est alors établi comme en (1).

Vérifions AX2 (b) : - soit $x' \in S$, $x' \neq a_o$, $x' \neq a_{2p}$ tq $x' \in [\overline{\sigma_1}]a_o$ et $x \in [\overline{\sigma_1}]\,x'$. Alors $\exists q$, $o < q < 2p$ tq $x' = a_q$.

($y' \in S$ et $x'\,\delta(\sigma_2)y'$) $\Rightarrow$ [$(\exists l \in \mathbb{N})$ $(q = 2\,l)$ et $(y' = b_l)$]

Or [$l < p \Rightarrow b_p \in [\overline{\sigma_1}]b_l$] i.e $y \in [\overline{\sigma_1}]y'$.

- soit $x'' \in S$, $x'' \neq x$ tq $x'' \in [\overline{\sigma_1}]x$

Alors $\exists q'$, $q' > 2p$ tq $x'' = a_{q'}$

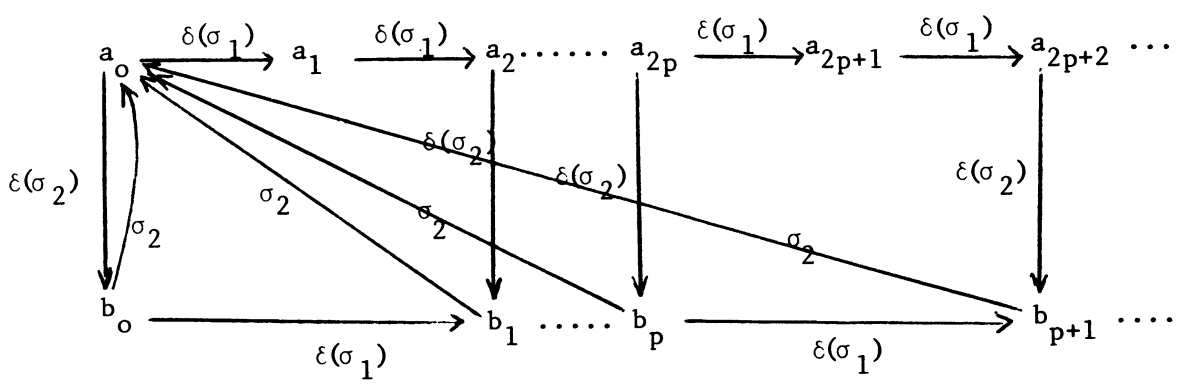
[$y'' \in S$ et $x''\,\delta(\sigma_2)y''$] $\Rightarrow$ [$(\exists l' \in \mathbb{N})$ $(q' = 2\,l')$ et $(y'' = b_{l'})$]

$l' > p \Rightarrow b_{l'} \in [\overline{\sigma_1}]b_p$ i.e $y'' \in [\overline{\sigma_1}]y$

D'où $\underline{\underline{S}}$ vérifie AX2. □

<u>PROPOSITION 5</u>: $\underline{\underline{S}}$ est un système de repérage fondamental.

Donnons un diagramme représentant $\underline{\underline{S}}$:



Le graphe relatif à σ_1 s'obtient à partir du graphe relatif à $\delta(\sigma_1)$ en inversant le sens des flèches.

Le graphe relatif à $\delta(\sigma_2)$ n'a pas été totalement représenté : il faut ajouter les flèches $y \xrightarrow{\delta(\sigma_2)} x$, là où on a les flèches $x \xrightarrow{\sigma_2} y$.

3.3.2. Exemple :

Dans cet exemple, les graphes relatifs à σ_o et $\delta(\sigma_o)$ sont vides.

Soit E un ensemble inclus dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels, tel que :

$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ avec $E_n = [\, n, n+1[$.

où $[n, n+1[\; = \{x/n \leq x < n+1\} \subset \mathbb{R}$

(1). Pour chaque n, on suppose qu'il existe une partie S_n dénombrable de E_n telle que :

(i) $n \in S_n$

(ii) il existe une injection $f_n : S_n \longrightarrow S_n$ telle que n n'est image d'aucun x de S_n.

. La partie S_n est totalement ordonnée par $\leq$:

$(\forall x, y \in S_n)$ $[x \leq y \Leftrightarrow (\exists p \in \mathbb{N})\ (y = xf_n^{\,p})]$

où $f_n^{\,p}$ désigne la $p^{\text{ième}}$ itérée de f_n, $f_n^{\,o}$ étant l'application identique.

. On en déduit un repérage par différenciation $<\sigma_1, \delta(\sigma_1)>$ défini comme suit :

- $(\forall x, y \in E)\,[x\sigma_1 y \Leftrightarrow (\exists p, n \in \mathbb{N})\ (x = nf_n^{\,p+1}$ et $y = nf_n^{\,p})]$
- $(\forall x, y \in E)\ \ (x\sigma_1 y \Leftrightarrow y\delta(\sigma_1)x)$

(2) Soit g_n une application de S_n dans S_{n+1} telle que :

(a) $(\forall x, y \in S_n)\ (\forall x', y' \in S_{n+1})$

$$\begin{bmatrix} (\exists p \in \mathbb{N}^*)\quad [y = xf_n^{\,p},\ x' = xg_n,\ y' = yg_n] \Rightarrow \\ (\exists q \in \mathbb{N})\ (y' = x'f_{n+1}^{\,q}) \end{bmatrix}$$

(b) $n+1 = n_{g_n}$

On en déduit le diagramme :

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f_n^{\,p}"] \arrow[d, "g_n"'] & y \arrow[d, "g_n"] & x,\ y \in S_n \\ x' \arrow[r, "f_{n+1}^{\,q}"'] & y' & x',\ y' \in S_{n+1} \end{tikzcd}$$

g_n est un morphisme d'ordre de $(S_n, \leq)$ dans $(S_{n+1}, \leq)$

.On définit un <u>repérage par ruption</u> $<\sigma_2,\ \delta(\sigma_2)>$ comme suit :

$(\forall x,\ y \in E)\ [x\sigma_2 y \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N})\ (x \in S_{n+1},\ y = n)]$

$(\forall x,\ y \in E)$:

$$x\delta(\sigma_2)y \Leftrightarrow \left\{ (\exists n \in \mathbb{N}) \left[\begin{array}{l} x \in S_n,\ y \in S_{n+1},\ y = xg_n \\ \underline{\text{ou}}\ x = n,\ y \in S_{n+1} \end{array} \right] \right\}$$

.$\underline{\underline{S}}$ est l'ensemble $S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ qui est structuré par les deux repérages définis précédemment.

<u>PROPOSITION</u> : $\underline{\underline{S}}$ est un système de repérage fondamental d'origine absolue o ; l'ensemble des entiers $n \in \mathbb{N}$ constitue l'ensemble des origines relatives.

Donnons un diagramme (parmi d'autres, selon le choix de f_n et de g_n) d'un tel système :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] S_o & o \arrow[r, "\delta(\sigma_1)"] \arrow[d, "\delta(\sigma_2)"] & x_1 \arrow[r, "\delta(\sigma_1)"] \arrow[d, "\delta(\sigma_2)"] & x_2 \arrow[r, "\delta(\sigma_1)"] \arrow[d, "\delta(\sigma_2)"] & x_3 \arrow[r, "\delta(\sigma_1)"] \arrow[dl, "\delta(\sigma_2)"] & x_4 \arrow[dl, "\delta(\sigma_2)"] & \cdots & [1 \\ S_1 & 1 \arrow[r, "\delta(\sigma_1)"'] & y_1 \arrow[r, "\delta(\sigma_1)"'] & y_2 \arrow[r, "\delta(\sigma_1)"'] & y_3 \arrow[r, "\delta(\sigma_1)"'] & y_4 & \cdots & [2 \\ \vdots & \vdots & & & & & & \\ S_n & n \arrow[r, "\delta(\sigma_1)"] & z_1 \arrow[r, "\delta(\sigma_1)"] & z_2 \arrow[r, "\delta(\sigma_1)"] & z_3 \arrow[r, "\delta(\sigma_1)"] & z_4 & \cdots & [n+1 \\ \vdots & \vdots & & & & & & \end{tikzcd}$$

<u>REMARQUE</u> : Seul le graphe relatif à $\delta(\sigma_1)$ a été entièrement représenté.

Le graphe relatif à $\delta(\sigma_2)$ est incomplet et les graphes relatifs à σ_1 et σ_2 n'ont pas été représentés.

3.3.3. Exemple :

Dans cet exemple, les graphes relatifs à σ_o et $\delta(\sigma_o)$ sont vides. E est l'ensemble des nombres rationnels.

Soit S un sous-ensemble de E tel que : $S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$, avec $S_n = \{n+\frac{p-1}{p}, p\in \mathbb{N}^*\}$

Chaque S_n a un point d'accumulation n+1 qui n'appartient pas à S_n.

(1) On définit un repérage par différenciation $\langle\sigma_1, \delta(\sigma_1)\rangle$ sur E comme suit :

- $(\forall x, y\in E)[x\,\sigma_1 y \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N})(\exists p \in \mathbb{N}^*)(x = n + \frac{p}{p+1}, y = n + \frac{p-1}{p})]$
- $(\forall x, y\in E)[x\,\sigma_1 y \Leftrightarrow y\delta(\sigma_1)x]$

(2) On définit un repérage par ruption $\langle\sigma_2, \delta(\sigma_2)\rangle$ sur E comme suit :

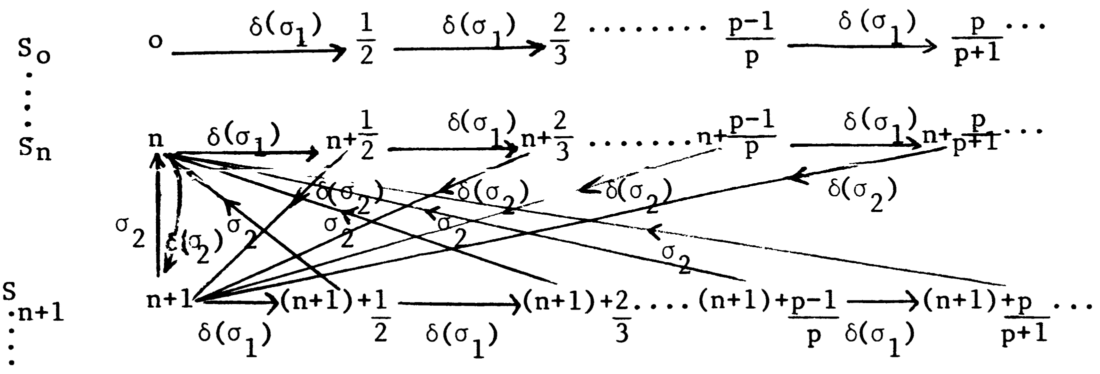
- $(\forall x, y \in E)\ [x\sigma_2 y \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N})\ (x \in S_{n+1}$ et $y = n)]$
- $(\forall x, y \in E)$:

$$x\delta(\sigma_2)y \Leftrightarrow \left\{(\exists n \in \mathbb{N}) \quad \begin{bmatrix} [x = n,\ y \in S_{n+1}] \\ \underline{\text{ou}} \\ [x \in S_n,\ y = n+1] \end{bmatrix}\right\}$$

$\underline{\underline{S}}$ est l'ensemble S qui est structuré par les 2 repérages définis précédemment.

PROPOSITION : $\underline{\underline{S}}$ est un système de repérage fondamental d'origine absolue 0 ; l'ensemble des entiers $n \in \mathbb{N}$ constitue l'ensemble des origines relatives.

Représentons $\underline{\underline{S}}$ par un diagramme :



REMARQUE : . Le graphe de la relation σ_1 n'a pas été indiqué ; il s'obtient à partir de celui de $\delta(\sigma_1)$ en inversant le sens des flèches.

. Le graphe de la relation $\delta(\sigma_2)$ n'a pas été totalement indiqué : il faut encore ajouter les couples (x, y) tels que $y\sigma_2 x$.

3.3.4. Exemple

Dans cet exemple les graphes relatifs à σ_o et $\delta(\sigma_o)$ sont vides.

Soit E = $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ où $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, et $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{o\}$. On choisit de noter un couple (a, b) de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$: $\frac{a}{b}$

. On définit les ensembles suivants :

$$k \geq 1,\ S_{2k} = \{\frac{1}{2k-1}, \frac{2}{2k-2}, \ldots, \frac{n}{p}, \frac{n+1}{p-1}, \ldots, \frac{2k-1}{1}\} \text{ , } 1 \leq n,p \leq 2k-1$$

$$S_{2k+1} = \{\frac{2k}{1}, \frac{2k-1}{2}, \ldots, \frac{n}{p}, \frac{n-1}{p+1}, \ldots, \frac{1}{2k}\} \quad 1 \leq n,\ p \leq 2k.$$

$$S = \bigcup_{i \geq 2} S_i$$

(1) On définit sur E un repérage par différenciation $\langle\sigma_1, \delta(\sigma_1)\rangle$ comme suit :

(a) $(\forall x, y \in E)$:

$$x\delta(\sigma_1)y \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} (\exists k \geq 1)\ (x, y \in S_{2k}) \text{ et} \\ \left[\begin{array}{l} (\exists n,\ o < n \leq 2k-2)\ (\exists p,\ 1 < p \leq 2k-1) \\ (x = \frac{n}{p},\ y = \frac{n+1}{p-1}) \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \underline{\text{ou}} \left[\begin{array}{l} (\exists k \geq 1)\ (x, y \in S_{2k+1}) \text{ et} \\ \left[\begin{array}{l} (\exists n,\ 1 < n \leq 2k)\ (\exists p,\ o < p \leq 2k-1) \\ (x = \frac{n}{p},\ y = \frac{n-1}{p+1}) \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

(b) $(\forall x, y \in E)\ (x\delta(\sigma_1)y) \Leftrightarrow y\sigma_1 x)$

(2) On définit sur E un <u>repérage par ruption</u> $<\sigma_2, \ \delta(\sigma_2)>$ comme suit:

(c) $(\forall x, y \in E)$:

$$
x\,\delta(\sigma_2)\,y \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll}
\left[\begin{array}{l} (\exists k \geq 1)\ (x \in S_{2k})\ \underline{\text{et}} \\ \left[\begin{array}{ll} x = \frac{2k-1}{1},\ y = \frac{2k}{1} & \text{(i)} \\ \underline{\text{ou}}\ x = \frac{1}{2k-1},\ y \in S_{2k+1} & \text{(ii)} \end{array} \right. \end{array} \right. \\
\underline{\text{ou}} \left[\begin{array}{l} (\exists k \geq 1)\ (x \in S_{2k+1})\ \underline{\text{et}} \\ \left[\begin{array}{ll} x = \frac{1}{2k},\ y = \frac{1}{2k+1} & \text{(iii)} \\ \underline{\text{ou}}\ x = \frac{2k}{1},\ y \in S_{2k+2} & \text{(iv)} \end{array} \right. \end{array} \right.
\end{array} \right.
$$

(d) $(\forall x, y \in E)$:

$$
x\sigma_2 y \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l}
(\exists k > 1)\ (x \in S_{2k}\ \text{et}\ y = \frac{2k-2}{1}) \\
\underline{\text{ou}}\ (\exists k \geq 1)\ (x \in S_{2k+1}\ \text{et}\ y = \frac{1}{2k-1})
\end{array} \right.
$$

. $\underline{S}$ est l'ensemble S qui est structuré par les 2 repérages définis précédemment.

Représentons $\underline{S}$ par un diagramme :

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
S_2 & \frac{1}{1} \arrow[d, "\delta(\sigma_2)"'] \\
S_3 & \frac{2}{1} \arrow[r, "\delta(\sigma_1)"] & \frac{1}{2} \arrow[dl, "\delta(\sigma_2)"'] \\
S_4 & \frac{1}{3} \arrow[r, "\delta(\sigma_1)"] & \frac{2}{2} \arrow[r, "\delta(\sigma_1)"] & \frac{3}{1} \\
\vdots & \vdots \\
S_{2k} & \frac{1}{2k-1} \arrow[r, "\delta(\sigma_1)"] & \frac{2}{2k-2} & \cdots & \frac{n}{p} \arrow[r, "\delta(\sigma_1)"] & \frac{n+1}{p-1} & \cdots & \frac{2k-1}{1} \arrow[dllllll, "\delta(\sigma_2)"'] \\
S_{2k+1} & \frac{2k}{1} \arrow[r, "\delta(\sigma_1)"] & \frac{2k-1}{2} & \cdots & \frac{m}{q} \arrow[r, "\delta(\sigma_1)"] & \frac{m-1}{q+1} & \cdots & \frac{1}{2k} \arrow[dllllll, "\delta(\sigma_2)"'] \\
S_{2k+2} & \frac{1}{2k+1} \arrow[r, "\delta(\sigma_1)"] & \frac{2}{2k} & \cdots & \frac{r}{s} \arrow[r, "\delta(\sigma_1)"] & \frac{r+1}{s-1} & \cdots & \frac{2k+1}{1} \\
\vdots
\end{tikzcd}
$$

REMARQUE :

- Le graphe de la relation σ_1 n'a pas été représenté : il s'obtient directement à l'aide de (b) à partir du graphe de $\delta(\sigma_1)$. Le graphe de σ_2 n'a pas été représenté non plus.
- Le graphe de la relation $\delta(\sigma_2)$ n'a pas été totalement représenté : il faut encore ajouter les couples (x, y) tq $y\sigma_2 x$.

LEMME :

1) $S_i = [\overline{\delta(\sigma_1)}]b_i$, $i \geq 2$ avec pour $k \geq 1$, $b_{2k} = \frac{2k-1}{1}$, $b_{2k+1} = \frac{1}{2k}$

La relation $\delta(\sigma_1)$ est fonctionnelle.

2) $S_i = [\overline{\sigma_1}]a_i$, $i \geq 2$ avec pour $k \geq 1$, $a_{2k} = \frac{1}{2k-1}$, $a_{2k+1} = \frac{2k}{1}$;

a_i est une origine relative.

PROPOSITION : $\underline{S}$ est un système de repérage fondamental d'origine absolue a_2 tel que l'ensemble des points de base coïncide avec l'ensemble des origines relatives $\{a_n, n \geq 2\}$.

THEOREME : S est un ensemble dénombrable : on peut construire effectivement une injection g de S dans $\mathbb{N}$.

Commentaire : la démonstration est analogue au procédé de la diagonale proposé par Cantor en 1895 pour démontrer que l'ensemble des rationnels est dénombrable.

3.3.5. Exemple

Dans cet exemple, les graphes relatifs à σ_o et à $\delta(\sigma_o)$ sont vides.

Soient E un ensemble infini (dénombrable), S une partie infinie de E.

Soit S_o un sous-ensemble fini de S non vide : soit $a_o \in S_o$.

(a) Soit σ_1 une relation fonctionnelle sur E dont l'application canonique associée $\sigma_1^{\cdot}$ est injective et définie sur $S - S_o$:

$$\sigma_1^{\cdot} : S - S_o \longrightarrow S$$

$$x \longmapsto x\sigma_1^{\cdot} = y \quad \text{avec : } x\sigma_1^{\cdot} = y \Leftrightarrow x\sigma_1 y$$

(b) On définit une relation duale de σ_1 par :

$(\forall x, y \in E)\ (x\sigma_1 y \Leftrightarrow y\, \delta(\sigma_1) x)$

(c) On suppose de plus que $\underline{\underline{S}} = \langle S, \sigma_1, \delta(\sigma_1)\rangle$ vérifie la propriété d'induction suivante :

(P) Tout sous ensemble $S' \subset S$ tel que :

(i) $a_o \in S'$

(ii) $(\forall x \in S')\ (\forall y \in S)\ [x\, \delta(\sigma_1) y \Rightarrow y \in S']$

coïncide avec S.

<u>PROPOSITION</u> : La relation $\delta(\sigma_1)$ est fonctionnelle. L'application associée $\delta(\sigma_1)^{\cdot}$ est définie sur tout S. L'application $\sigma_1^{\cdot}$ est surjective. Plus précisément, $\sigma_1^{\cdot}$ et $\delta(\sigma_1)^{\cdot}$ sont deux bijections réciproques l'une de l'autre,
$\sigma_1^{\cdot} : S - S_o \longrightarrow S, \quad \delta(\sigma_1)^{\cdot} : S \longrightarrow S - S_o$.

Précisons que pour établir cette proposition, on utilise le lemme suivant :

<u>LEMME 1</u> : $S = \{a_o\, [\delta(\sigma_1)^{\cdot}]^n,\ n \in \mathbb{N}\}$

<u>PREUVE</u> : Ce résultat découle de la propriété (P) et du caractère fonctionnel de la relation $\delta(\sigma_1)$.

- Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ [\delta(\sigma_1)^{\cdot}]^n$ est définie pour a_o.
  - soit n = 1 : raisonnons par l'absurde. Supposons que $\delta(\sigma_1)^{\cdot}$ ne soit pas définie pour a_o. Prenons pour sous-ensemble de S, $S' = \{a_o\}$.

(*) $a_o \in S'$

(**) $(\forall x \in S')$ $(\forall y \in S)$ (non $[x\,\delta(\sigma_1)y]$), si bien que la clause (ii) de (P) est trivialement vérifiée. Il s'ensuit, d'après (P), que $S' = S$. Or on a supposé S infini : il y a contradiction. Donc $a_o\,\delta(\sigma_1)^{\cdot}$ existe.

- soit $n = k$: supposons que $[\delta(\sigma_1)^{\cdot}]^k$ soit définie pour a_o (hypothèse de récurrence).
- soit $n = k+1$: raisonnons par l'absurde. Supposons donc que $[\delta(\sigma_1)^{\cdot}]^{k+1}$ ne soit pas définie pour a_o. Prenons pour sous-ensemble de S, $S' = \{a_o,\ a_o\,\delta(\sigma_1)^{\cdot},\ \ldots,\ a_o[\delta(\sigma_1)^{\cdot}]^k\}$

(*) $a_o \in S'$

(**) soit $x \in S'$: - ou bien $(\exists m,\ o \leq m < k)$ $(x = a_o[\,\delta(\sigma_1)^{\cdot}]^m)$

Alors $\delta(\sigma_1)^{\cdot}$ est définie pour x : si $y = x\,\delta(\sigma_1)^{\cdot}$, $y = a_o[\,\delta(\sigma_1)^{\cdot}]^{m+1}$. Comme $o < m+1 \leq k$, $y \in S'$.

- ou bien $x = a_o[\delta(\sigma_1)^{\cdot}]^k$. Comme on a supposé que : $(\forall y \in S)$ [non $(x\,\delta(\sigma_1)y)$], la clause (ii) de (P) est vérifiée. D'après (P), $S' = S$. Or on a supposé S infini : il y a donc contradiction et $[\delta(\sigma_1)^{\cdot}]^{k+1}$ est définie pour a_o.

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $[\delta(\sigma_1)^{\cdot}]^n$ est définie pour a_o.

Soit $S' = \{a_o[\delta(\sigma_1)^{\cdot}]^n,\ n \in \mathbb{N}\}$

(*) $S' \subset S$, $a_o \in S'$

(**) soit $x \in S'$, alors $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $x = a_o[\delta(\sigma_1)^{\cdot}]^n$

$x\,\delta(\sigma_1)y \Rightarrow y = a_o[\,\delta(\sigma_1)^{\cdot}]^{n+1}$. Or $a_o[\delta(\sigma_1)^{\cdot}]^{n+1} \in S'$. S' vérifie les clauses (i) et (ii) de (P). Donc $S' = S$.

$S = \{a_o[\delta(\sigma_1)^{\cdot}]^n,\ n \in \mathbb{N}\}$. □

<u>REMARQUE</u> : La démonstration du lemme 1 et donc de la proposition nécessite l'hypothèse S infini. On peut en effet trouver un ensemble S fini - S sous-ensemble de E, E dénombrable, avec $S_o \subset S$, $S_o = \{a_o\}$- des relations σ_1 et

$\delta(\sigma_1)$ tels que (a) (b) (c) soient vérifiées mais tels que l'application $\sigma_1^{\cdot}$ ne soit pas surjective :

<u>EXEMPLE</u> : $E = \mathbb{N}$, $S = \{o, 1, 2, 3, 4\}$ $S_o = \{o\}$

$$\sigma_1^{\cdot} : S - \{o\} \longrightarrow S \qquad \delta(\sigma_1)^{\cdot} : S - \{4\} \longrightarrow S$$
$$x \longmapsto x - 1 \qquad\qquad x \longmapsto x + 1$$

(a) (b) (c) sont vérifiées mais 4 n'est l'image par $\sigma_1^{\cdot}$ d'aucun élément de S; $\sigma_1^{\cdot}$ n'est pas surjective et $\delta(\sigma_1)^{\cdot}$ n'est pas définie sur tout S.

<u>LEMME 2</u> : $S_o = \{a_o\}$

<u>THEOREME 1</u> : Si on définit sur E un repérage par différenciation $<\sigma_1, \delta(\sigma_1)>$ tel que les graphes de σ_1 et $\delta(\sigma_1)$ soient inclus dans S x S et définis par (a) et (b), alors tout repérage par ruption $<\sigma_2, \delta(\sigma_2)>$ qui fait de $\underline{S} = <S, \sigma_1, \delta(\sigma_1), \sigma_2, \delta(\sigma_2)>$ un système de repérage fondamental vérifie les propriétés : - $(\forall u \in E)\ (\forall v \in S)\ (u\sigma_2 v \Rightarrow u \in S$ et $u \in \overline{[\sigma_1]}v)$

Il existe au plus un élément v de S tel que : $(\exists u \in S)(u\sigma_2 v)$.

- $\{z \in E/(\exists x \in S)\ (x\delta(\sigma_2)z)\}$ est vide ou infini.

En particulier, lorsque les graphes des relations σ_2 et $\delta(\sigma_2)$ sont vides, $\underline{S}$ est un système de repérage fondamental.

<u>Rappel</u> : Un ensemble P muni d'une application f est <u>péanien</u> s'il satisfait aux axiomes suivants :

(1) f est une application injective définie sur P à valeurs dans P.

(2) Il existe un élément distingué a_o de P tel que a_o n'appartient pas à l'image de P par f.

(3) Tout sous-ensemble P' de P tel que : (i) $a_o \in P'$

(ii) $(\forall a \in P')\ (af \in P')$

coïncide avec P.

THEOREME 2 : L'ensemble S muni de l'application $\delta(\sigma_1)^{\cdot}$ est un ensemble péanien.

THEOREME 3 : L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est un système de repérage fondamental, d'origine absolue o, tel que les applications :

$$f : \mathbb{N} - \{o\} \longrightarrow \mathbb{N} \qquad\qquad g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} - \{o\}$$

$$x \longmapsto x - 1 \qquad\qquad x \longmapsto x + 1$$

(fonction prédécesseur) (fonction successeur)

caractérisent respectivement le repérage par différenciation σ_1 et la détermination duale $\delta(\sigma_1)$.

3.3.6. Exemple : Système à came. Nous choisissons E = S .

Soit un ensemble infini dénombrable S tel que :

$S = \{a_o, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{3n}, \ldots\}$ et

$(\forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j)\ (a_i \neq a_j)$

- On définit sur S un repérage par identification $<\sigma_o, \delta(\sigma_o)>$ comme suit :

  (1) $(\forall x, y \in S)\ [x\sigma_o y \Leftrightarrow (\exists p \in \mathbb{N})\ (x = a_{(p+1)n}, y = a_{pn})]$

  (2) $(\forall x, y \in S)\ [x\sigma_o y \Leftrightarrow y\,\delta(\sigma_o)x]$

- On définit sur S un repérage par différenciation $<\sigma_1, \delta(\sigma_1)>$ comme suit :

  (3) $(\forall x, y \in S)\ [x\,\delta(\sigma_1)y \Leftrightarrow (\exists i \in \mathbb{N})\ (x = a_i \text{ et } y = a_{i+1})]$

  (4) $(\forall x, y \in S)\ [x\sigma_1 y \Leftrightarrow y\,\delta(\sigma_1)x]$

- Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on définit sur S un repérage par ruption $<\sigma_2, \delta(\sigma_2)>$ comme suit :

  (5) $(\forall x, y \in S)\ [x\sigma_2 y \Leftrightarrow (\exists i \in \mathbb{N}^*)\ (x = a_i \text{ et } y = a_o)]$

  (6) $(\forall x, y \in S)\ [x\,\delta(\sigma_2)y \Leftrightarrow [((\exists i \in \mathbb{N}^*)\ (x = a_o, y = a_i)) \text{ ou } ((\exists p \in \mathbb{N}^*)\ (x = a_{pn}, y = a_{(p+1)n}))]]$

- $\underline{\underline{S}}$ est l'ensemble S qui est structuré par les 3 repérages définis précédemment.

LEMME : - Les relations $\delta(\sigma_1)$ et $\delta(\sigma_2)$ sont duales des relations σ_1 et σ_2 respectivement. On a : (σ_1) $(D\sigma)$, (σ_2) $(I\,\rho)$ et $(\delta(\sigma_2))$ $(I\,\rho)$.

- (i) $S = [\overline{\sigma_1}]a_o$; (ii) $S = [\overline{\sigma_1}]a_n \cup [\overline{\delta(\sigma_1)}]a_n$.

(iii) $(\forall p, q \in \mathbb{N})[\ p \leq q \Rightarrow a_q \sigma_1^{q-p} a_p$ et $a_p \delta(\sigma_1)^{q-p} a_q\ ]$

(iv) $(\forall p, q \in \mathbb{N})[\ (a_p \in [\overline{\sigma_1}]a_q$ ou $a_q \in [\overline{\delta(\sigma_1)}]a_p) \Rightarrow\ q \leq p\ ]$

PROPOSITION : $\underline{\underline{S}}$ est un système de repérage fondamental d'origine absolue a_o.

PREUVE :

- Montrons que $\underline{\underline{S}}$ vérifie AXO.

  AXO (i) est trivialement vérifié car E = S.

  Soient x, y, u, v $\in$ S tq $x\sigma_o u$, $y\sigma_o v$.

  D'après (1), $(\exists p, p' \in \mathbb{N})$ $(x = a_{(p+1)n}$, $u = a_{pn}$,

  $y = a_{(p'+1)n}$, $v = a_{p'n})$.

  Supposons que $u \in [\overline{\delta(\sigma_1)}]v$; $(\exists m \in \mathbb{N})$ $(u\ \delta(\sigma_1)^m v)$.

  $a_{pn}\ \delta(\sigma_1)^m a_{p'n} \Rightarrow pn \leq p'n$ (d'après le lemme)

  $p \leq p' \Rightarrow a_{(p+1)n}\ \delta(\sigma_1)^{[(p'+1)-(p+1)]n} a_{(p'+1)n}$ (d'après le lemme)

  i.e $x\ \delta(\sigma_1)^{(p'-p)n} y$ d'où $x \in [\overline{\delta(\sigma_1)}]y$.

  AXO est donc vérifié.

- AX1 est trivialement vérifié à cause de (4)

- Montrons que $\underline{\underline{S}}$ vérifie AX2 :

  Soient x, y $\in$ S tq $x\ \delta(\sigma_2) y$; 2 cas sont possibles :

  (*) $x = a_o$: alors y quelconque dans $S \setminus \{a_o\}$ est possible.

  Or $(\forall y \in S \setminus \{a_o\})$, $(y\sigma_2 a_o)$. Donc a_o est le point x_o de la clause (a) de AX2, cherché.

  La clause (b) de AX2 ne concerne pas les couples (a_o, y).

  Comme $\forall v \in S \setminus \{a_o\}$, $v\sigma_2 a_o$, la clause (c) de AX3 est vérifiée.

(*) $x \neq a_o$: alors $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tq $x = a_{pn}$ et $y = a_{(p+1)n}$.

- $a_{pn}\delta(\sigma_2)a_{(p+1)n}$, $a_{(p+1)n}\sigma_2 a_o$; or $a_{pn} \in [\overline{\sigma_1}]a_o$ (d'après le lemme).

Donc a_o est le point x_o de la clause a) de AX2.

- Soit $x' \in [\overline{\sigma_1}]a_o$, $x' \neq a_o$ tq $a_{pn} \in [\overline{\sigma_1}]x'$, $x \neq x'$

$(x' \neq a_o,\ a_{pn} \in [\overline{\sigma_1}]x'$ et $x \neq x') \Rightarrow (\exists m \in \mathbb{N}^*)$ $(m < pn$ et $x' = a_m)$

(Soit $y' \in S$ tq $x'\delta(\sigma_2)y'$) : $[\exists p'$ tq $((m = p'n,\ o < p' < p)$ et

$(x' = a_{p'n},\ y' = a_{(p'+1)n}))]$

$p' < p \Rightarrow a_{(p+1)n}\sigma_1^{[(p+1)-(p'+1)]n}a_{(p'+1)n}$ i.e $y\sigma_1^{(p-p')n}y'$,

Soit $y \in [\overline{\sigma_1}]y'$.

- $(x'' \in [\overline{\sigma_1}]a_{pn},\ x'' \neq x) \Longrightarrow (\exists m \in \mathbb{N},\ pn < m)$ $(x'' = a_m)$

(Soit $y'' \in S$ tq $x''\delta(\sigma_2)y''$) : $[\exists p'$ tq $((m = p'n,\ o < p < p')$ et

$(x'' = a_{p'n}$ et $y'' = a_{(p'+1)n}))]$;

or $(p+1) < (p'+1) \Rightarrow a_{(p'+1)n}\sigma_1^{(p'-p)n}a_{(p+1)n}$

i.e $y'' \in [\overline{\sigma_1}]y$.

AX2 b) est donc vérifié.

- Etant donné que le seul point susceptible d'être le point de base de tout couple $(x, y) \in S \times S$ tel que $x\delta(\sigma_2)y$ est a_o et que pour tout $u \in S\setminus\{a_o\}$, $u\sigma_2 a_o$, la clause (c) de AX2 est vérifiée.

AX2 est donc vérifié.

- Soit $x \in S$, $x \notin D_{\sigma_1}. \Rightarrow x = a_o$

  Or $a_o \notin D_{\sigma_o}. \cup D_{\sigma_1}. \cup D_{\sigma_2}.$ et $a_o \in D_{\delta(\sigma_1)}.$ car $a_o\delta(\sigma_1)a_1$.

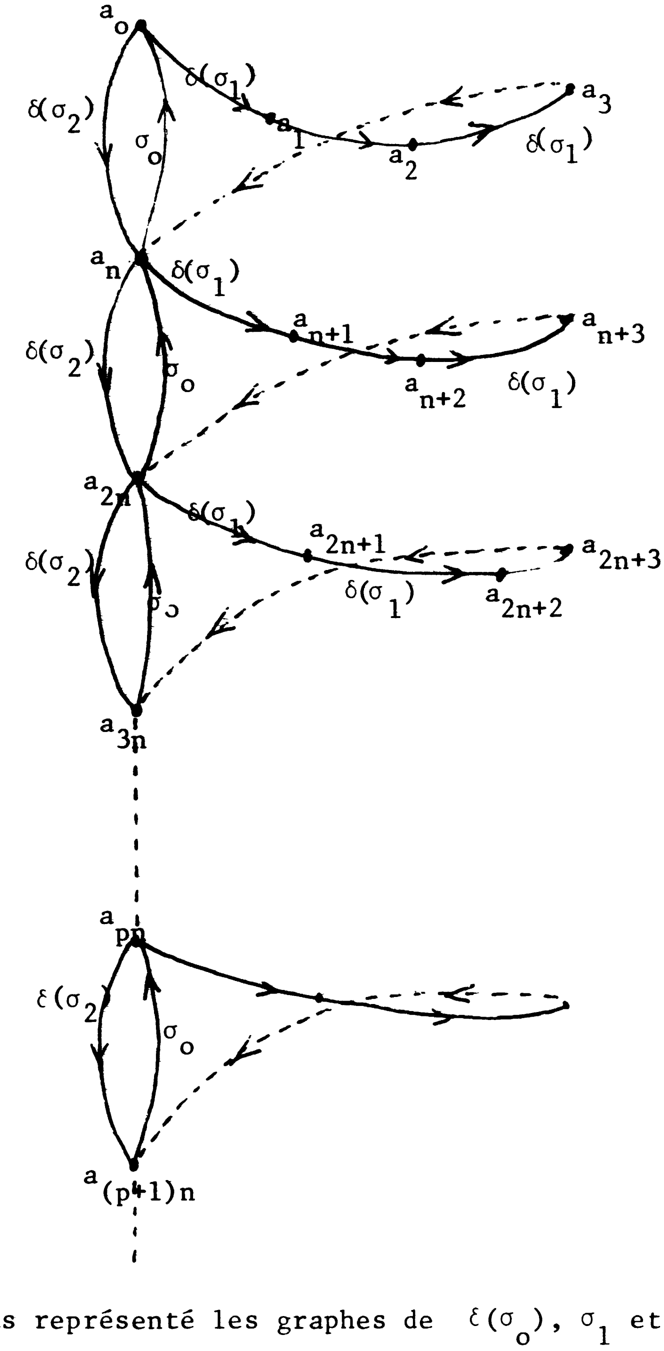
  a_o est l'unique élément z de S tel que :

  $z \notin (D_{\sigma_o}. \cup D_{\sigma_1}. \cup D_{\sigma_2}.)$ et $\exists y \in S$ tq $z\delta(\sigma_o)y$ ou $z\delta(\sigma_1)y$ ou $z\delta(\sigma_2)y$

  a_o est l'origine absolue et AX3 est vérifié.

  $\underline{\underline{S}}$ est un système de repérage fondamental. □

Nous proposons un diagramme pour un système à came :



Nous n'avons pas représenté les graphes de $\delta(\sigma_o)$, σ_1 et σ_2. Le graphe de $\delta(\sigma_2)$ est représenté de façon incomplète : il manque les flèches $a_o \xrightarrow{\delta(\sigma_2)} a_i$ $(i \in \mathbb{N}^*)$. □

REFERENCES

[CULI/DES-81] CULIOLI A., DESCLES J.P., Systèmes de représentations linguistiques et métalinguistiques - Les catégories grammaticales et le problème de la description des langues peu étudiées, Rapport U.N.E.S.C.O., Paris, 1981.

[CULI/DES-82] CULIOLI A., DESCLES J.P., "Traitement formel des langues naturelles - Première partie : mise en place de concepts à partir d'exemples", Mathématiques et sciences humaines, (77) 1982.

[DES-80] DESCLES J.P., Opérateurs/opérations : méthodes intrinsèques en informatique fondamentale. Applications aux bases de données et à la linguistique, Thèse d'Etat (mathématiques), Université René Descartes, Paris, 1980.

[FRO-82] FROIDEVAUX Ch., Etude mathématique d'opérations métalinguistiques, Thèse de 3ème Cycle en cours, Université Paris 7, 1982.