J. P. DESCLES

Multiopérateurs - Multiopérations

Mathématiques et sciences humaines, tome 78 (1982), p. 33-72
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1982__78__33_0>

Math. Sci. hum. (20^e année, n°78, 1982, p.33-72)

MULTIOPERATEURS - MULTIOPERATIONS

J.P. DESCLES *

Nous introduisons les définitions mathématiques et les principaux résultats qui interviennent dans le formalisme qui est constitutif des systèmes de représentations métalinguistiques. Les êtres mathématiques "utiles" sont des multiopérateurs - qui généralisent directement les opérateurs - auxquels on associe des multiopérations définies comme des applications entre un domaine et un codomaine. Des opérateurs de base sont composés entre eux, au moyen d'opérations de composition - appelées T-opérations - de façon à former des multiopérateurs, mais les compositions sont toutes indépendantes de l'action des opérateurs et multiopérateurs sur des objets, les compositions sont définies intrinsèquement (voir aussi [DES-81]).

Dans le cadre de cet article, nous allons présenter la notion de 'treille' de façon informelle. Les constructions, définitions et propriétés algébriques sont présentées en détail dans notre thèse [DES, 80] à laquelle nous renvoyons.

1. Nous désirons manipuler des objets hétérogènes, donc plusieurs sortes d'ensembles d'objets. Nous définissons donc des sortes élémentaires qui nous permettront ultérieurement de définir des ensembles d'objets isotypes.

En linguistique, on sait qu'il est nécessaire de manipuler des <u>noms</u>, des <u>prédicats</u> (qui joueront le rôle d'opérateurs par rapport à des arguments),

* U.E.R. Mathématiques et Informatique - Université Paris 7

des <u>propositions</u>... Dans le cadre théorique qui nous intéresse, les <u>sortes</u> élémentaires correspondront aux catégories métalinguistiques les plus fondamentales. Celles-ci se subdivisent en <u>catégories énonciatives</u> et <u>prédicatives</u>. Parmi les catégories énonciatives, on distingue celle des énonciateurs, celle des repères temporels, celle des situations énonciatives. Parmi les catégories prédicatives, on distingue les objets nominaux (à la source de la catégorie nominale) et les opérateurs prédicatifs (à la source de la catégorie verbale, des prépositions, des adjectifs...).

2. Désignons par S un ensemble (non vide) de sortes élémentaires. M désigne le monoïde libre de base S et de neutre: 'λ'.
Les sortes servent à construire récursivement les <u>types</u>.

<u>DEFINITION 1</u>: L'ensemble T des <u>types</u> $\underline{t}$ engendré récursivement à partir de S est ainsi construit :

(i) une <u>sorte</u> de S est un <u>type (élémentaire)</u>;

(ii) un mot de $M - (S \cup \{\lambda\})$ est un <u>type (composé)</u> de T ;

(iii) <u>Si</u> $\underline{t}_1$ et $\underline{t}_2$ sont des types de T

<u>alors</u> $\langle \underline{t}_1, \underline{t}_2 \rangle$ est un <u>type (dit fonctionnel)</u> de T

(iv) λ est le type vide de T □.

Soit $s \in S$; X^s désigne un ensemble ayant une seule sorte d'objets.

Soit $\mu = s_1 \ldots s_n \in M$; X^μ est un <u>ensemble 'de type μ'</u>, défini à une bijection près, comme un produit cartésien d'ensembles:

$$X^\mu \simeq X^{s_1} \times \ldots \times X^{s_n}$$

Soit $\langle \mu, \nu \rangle \in T$; $X^{\langle \mu, \nu \rangle}$ est un <u>ensemble (fonctionnel) de type $\langle \mu, \nu \rangle$</u> tel que :

$$X^{\langle \mu, \nu \rangle} \simeq \mathrm{Hom}(X^\nu, X^\mu)$$

où $\mathrm{Hom}(X^{\nu}, X^{\mu})$ désigne l'ensemble des applications de X^{ν} dans X^{μ}.

Un ensemble de type 'λ' est identifié à l'ensemble vide.

Un élément de X^{s} est dit 'objet de sorte s'; un élément de $X^{\underline{t}}$ ($\underline{t} \in T$) est dit 'objet de type $\underline{t}$'. Soit $\mu \in T$, la notation '$x_{\mu} \in X^{\mu}$' désigne un uple d'objets dont les sortes sont spécifiées pour μ.

3. DEFINITION 2 : Soit V un ensemble (non vide) de vocables, τ une application (dite typante) de V dans l'ensemble des parties de $S \times M$ (S étant un ensemble de sortes et M le monoïde libre engendré à partir de S); un opérateur σ est caractérisé par la donné d'un nom v de V et par un type fonctionnel $\tau(v) = \langle s,\mu\rangle$ de $S \times M$; s est la sorte des objets du codomaine, μ le type des objets du domaine de l'opérateur. On désigne par Σ un ensemble d'opérateurs dont les noms appartiennent tous à V ; Σ est appelé S - schéma d'opérateurs □.

Le poids d'un opérateur est défini par la longueur du mot μ de son type $\langle s,\mu\rangle$.

Un ensemble Σ est donc partitionné en opérateurs de différents poids: zéro-aires, unaires, binaires, etc.

DEFINITION 3 : Etant donné un opérateur σ, caractérisé par $\langle v, \langle s, \mu\rangle\rangle$; définir une opération associée à l'opérateur σ consiste à préciser:

1°) un domaine X^{μ}, un codomaine X^{s};

2°) un mécanisme opératoire déterminé par une application $\sigma^{\cdot}$ de $\mathrm{Hom}(X^{\mu}, X^{s})$.

L'application $\sigma^{\cdot}$ est l'opération structurale associée à l'opérateur σ □.

Opérateur σ de type $\langle s,\mu\rangle$ et opération $\sigma^{\cdot}$ de $\mathrm{Hom}(X^{\mu}, X^{s})$ sont en dualité!

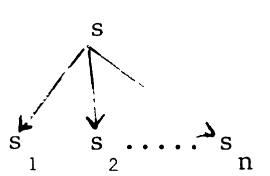
Considérons un opérateur σ, de type $<s,\mu>$; son action sur l'opérande x de X^{μ} détermine un résultat y qui est l'unique objet de X^{s} tel que cet y soit l'image de x par l'opération $\sigma^{\bullet}$.

Etant donné un opérateur σ, il existe en général plusieurs opérations associées, selon les domaines, codomaines et mécanismes opératoires.

Tout opérateur zéro-aire est tel qu'une opération associée 'est' une constante puisqu'elle est définie par une application de $\mathrm{Hom}(\emptyset, X^{s})$, qui spécifie un élément distingué de X^{s}.

4. Les prédicats linguistiques (verbes, adjectifs, prépositions...) sont des opérateurs prédicatifs. Les opérateurs énonciatifs permettent d'identifier ou de différencier ou encore de mettre en rupture, des objets métalinguistiques comme des index de personne, de temps, d'espace... Ces opérateurs énonciatifs font partie d'une théorie abstraite du repérage que nous ne présentons pas ici et nous renvoyons à la bibliographie et aux articles qui en traitent.

5. Nous représentons un opérateur σ, caractérisé par $<v, <s, \mu>>$ avec $\mu = s_1 \ldots s_n$, par un graphe (plus précisément dendron élémentaire au sens de [BAR/DES, 71]) visualisé par :



Le graphe représentatif est une arborescence (élémentaire et étiquettée par des sortes) telle que l'ensemble des successeurs immédiats de la racine soit totalement ordonné (selon un ordre transversal).

Nous appelerons ce graphe au moyen du vocable arbre.

6. A partir d'un S - schéma Σ, nous engendrons des opérateurs dérivés et plus complexes qui prendront le nom de 'multiopérateurs'. Ces derniers appartiennent à un ensemble $T[\Sigma]$ dit 'ensemble des multiopérateurs dérivés de Σ', il est construit récursivement au moyen de deux T-opérations primitives d'agencement des opérateurs (et multiopérateurs) entre eux; ces T-opérations sont appelées 'intrication' et 'greffe' (désignées respectivement par : $\otimes$ et o).

Nous présentons, de façon informelle, ces T-opérations.

6.1. DEFINITION 4 : Un multiopérateur σ de $T[\Sigma]$ est caractérisé par un nom w et un type (fonctionnel) $<\mu,\nu>$ tel que w soit défini récursivement à partir des noms des opérateurs élémentaires de Σ. □

6.2. Soit deux opérateurs élémentaires de σ_1 et σ_2 d'un S - schéma Σ caractérisés respectivement par :

$<v_1, <s'_1, <s_1 \ldots s_n>>$

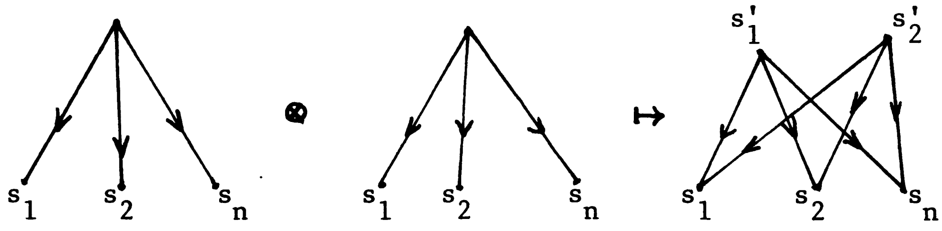
$<v_2, <s'_2, <s_1 \ldots s_n>>$

On remarquera que les types de σ_1 et σ_2 ne sont pas indépendants.

L'intrication compose les opérateurs σ_1 et σ_2 entre eux de façon à construire un multiopérateur σ_3, indépendamment de l'action des opérateurs σ_1 et σ_2, donc indépendamment de toutes les opérations structurales associées à σ_1 et σ_2. Le multiopérateur σ_3 est caractérisé par le triplet :

$<v_1v_2, <s'_1s'_2, s_1 \ldots s_n>>$

Si l'on représente σ_1 et σ_2 par deux arbres, le multiopérateur σ_3 est représenté à son tour par un graphe sans circuit connexe (et étiqueté) tel que l'ensemble de tous les successeurs d'un noeud soit totalement ordonné. Nous visualisons cette opération d'intrication $\otimes$ par :



Supposons que $\sigma^\bullet_1$ et $\sigma^\bullet_2$ soient deux opérations associées respectivement aux multiopérateurs σ_1 et σ_2 :

$\sigma^\bullet_1 : X^\mu \longrightarrow X^{s'_1}$ $\quad (\mu = s_1 \ldots s_n)$

$\sigma^\bullet_2 : X^\mu \longrightarrow X^{s'_2}$ $\quad ($ " $)$

L'opération structurale associée au multiopérateur σ_3 est défini par l'application :

$$\sigma^\bullet_3 : X^\mu \longrightarrow X^{s'_1} \times X^{s'_2}$$
$$x \longmapsto \langle y_1, y_2 \rangle = \langle \sigma^\bullet_1(x), \sigma^\bullet_2(x) \rangle$$

Nous notons :

$$\sigma_3 = \sigma_1 \otimes \sigma_2$$

L'application $\sigma^\bullet_3$ est appelée <u>multiopération associée au multiopérateur σ</u>.

Naturellement, on généralise sans peine la définition précédente aux intrications d'opérateurs :

$$\sigma = \sigma_1 \otimes \ldots \otimes \sigma_n$$

Nous avons la

<u>PROPOSITION1</u> : <u>Lorsque l'intrication est définie, elle est associative</u>.
La preuve complète dépend de la construction précise de $T[\Sigma]$.

6.3. La <u>greffe</u> o compose des multiopérateurs de $T[\Sigma]$ entre eux de façon à obtenir un autre multiopérateur de $T[\Sigma]$; la composition par greffe opère sur les opérateurs indépendamment des multiopérations associées aux multiopérateurs composés.

De façon informelle, considérons deux multiopérateurs σ_4 et σ_5 caractérisés par :

$<w_4 , <\mu , \nu>>$

$<w_5 , <\nu , \rho>>$

avec : $\mu = s_1 \ldots s'_p$

$\nu = s_1 \ldots s_n$

$\rho = s'' \ldots s''_9.$

La greffe construit un autre multiopérateur σ_6 caractérisé par :

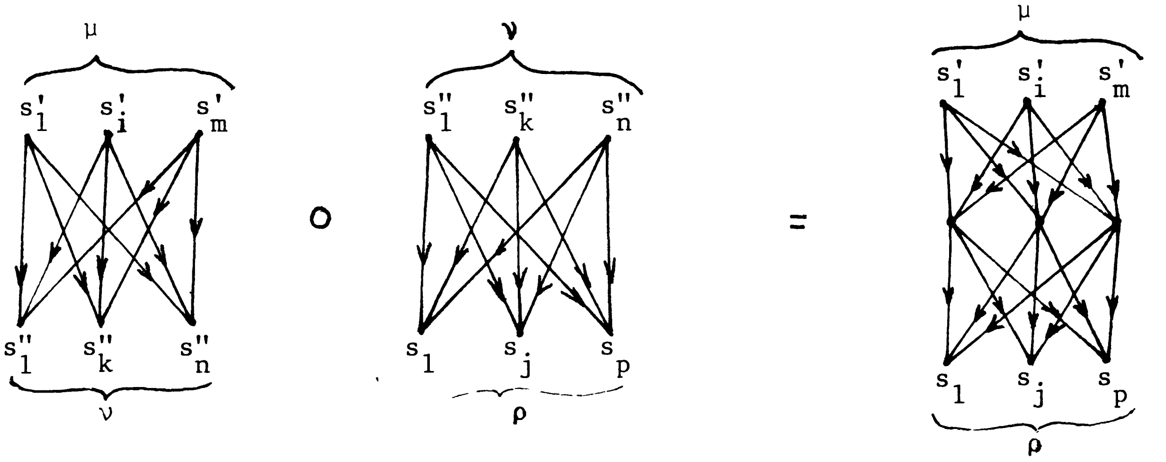
$$<w_6 , <\mu , \rho>>$$

avec w_6 déduit canoniquement de w_4 et w_5 (nous ne donnons pas ici la loi qui déduit w_6 du couple $<w_4, w_5>$)

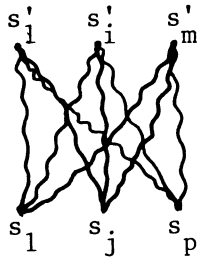
Nous notons :

$$\sigma_6 = \sigma_4 \circ \sigma_5$$

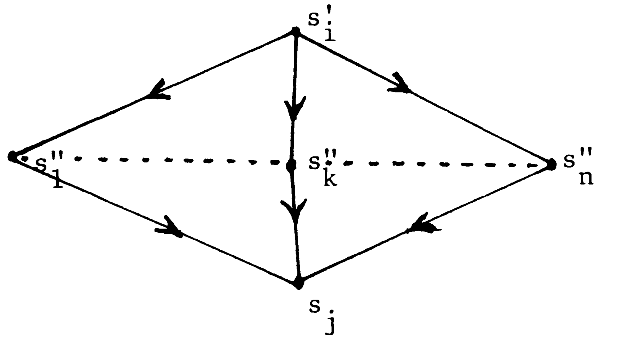
Si l'on a représenté σ_4 et σ_5 par des graphes, alors σ_6 est représentable par un graphe sans circuit ayant les mêmes propriétés que les graphes qui représentaient les multiopérateurs σ_4 et σ_5 . Nous visualisons ceci par :



En effet, le graphe représentatif de σ_6 est représentable par un "graphe de chemins" (chaque arc représente une "somme de chemins", "somme" étant pris dans un sens qui peut être facilement précisé du fait que l'ensemble des successeurs d'un sommet est totalement ordonné); ce "graphe des chemins" est visualisé par :



où par exemple l'arc d'extrémités $<s'_i, s_j>$ est lui-même un graphe visualisé par :



On démontre que le multiopérateur qui résulte de la greffe de σ_4 avec σ_5 est, à son tour, décomposable par intrication d'opérateurs (non plus élémentaires, cette fois, mais de type $<s'_i, s''_1 \ldots s''_p>$ $(i = 1, \ldots, p)$).

En utilisant les notations :

$$\sigma_4 = \sigma_4^1 \otimes \ldots \otimes \sigma_4^p$$
$$\sigma_5 = \sigma_5^1 \otimes \ldots \otimes \sigma_5^q$$

On démontre que la greffe de σ_4 sur σ_5 vérifie la décomposition suivante :

$$\sigma_6 = \sigma_4 \circ \sigma_5 = \sigma_6^1 \otimes \ldots \otimes \sigma_6^p$$

avec $\sigma_6^i = \sigma_4^i \circ \sigma_5$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$

<u>REMARQUE</u> : les graphes visualisés précédemment permettent de comprendre cette assertion.

Supposons que $\sigma_4^\bullet$ et $\sigma_5^\bullet$ soient les multiopérations associées aux multiopérateurs σ_4 et σ_5 :

$$\sigma_4^\bullet : X^\rho \longrightarrow X^\nu$$

$$\sigma_5^\bullet : X^\nu \longrightarrow X^\mu$$

La <u>multiopération</u> $\sigma_6^\bullet$ <u>associée au multiopérateur</u> σ_6 est définie par :

$$\sigma_6^\bullet = \sigma_4^\bullet \circ \sigma_5^\bullet : x \longmapsto \sigma_4^\bullet(\sigma_5^\bullet(x)) .$$

<u>PROPOSITION 2</u>: <u>Lorsqu'elle est définie, la greffe o est associative.</u>

La preuve est relative à la construction de T[Σ], elle n'est donc pas donnée ici.

6.4. Nous ajoutons maintenant d'autres multiopérateurs qui ne sont pas construits à partir de Σ mais qui seront plongés canoniquement dans T[Σ]. En fait, ces multiopérateurs, dits <u>S-coprojectifs</u>, sont engendrés dynamiquement alors que les multiopérateurs dérivés directement de Σ ne le sont pas.

Soit μ un mot de M , $\underline{l}(\mu)$ désigne la longueur de μ et $[\underline{l}(\mu)]$ le segment de longueur $\underline{l}(\mu)$ défini par l'ensemble :

$$\{1, 2, \ldots\ldots, \underline{l}(\mu)\}$$

lorsque $\underline{l}(\mu) = o$ et l'ensemble vide sinon.

Tout mot μ de M est identifié à une application, notée aussi par abus de langage 'μ', de $[\underline{l}(\mu)]$ dans S .

Désignons par N le monoïde libre de base $\mathbb{N}$ (entiers naturels), de neutre o , la concaténation étant notée '$\bullet$' .

DEFINITION 5 : Un S - coprojectif f_μ^ν est canoniquement déterminé par une application f qui fait commuter le diagramme dit 'triangulaire' :

$$\begin{tikzcd} {[\underline{l}(\mu)]} \arrow[rr, dashed, "f"] \arrow[dr, "\mu"'] & & {[\underline{l}(\nu)]} \arrow[dl, "\nu"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

C'est un multiopérateur (dit applicationnel) caractérisé par $<w, <\mu, \nu>>$ où le nom w est un mot du monoïde N :

$$w = 'f(1) \bullet \ldots \bullet f(\underline{l}(\mu))'$$

L'action du S - coprojectif f_μ^ν sur les opérandes de X^μ est définie par l'application:

$$(f_\mu^\nu)^\cdot : X^\nu \longrightarrow X^\mu$$

$$<x_1, \ldots, x_{\underline{l}(\nu)}> \longmapsto < y_1, \ldots, y_{\underline{l}(\mu)} >$$

avec $y_j = x_{f(i)}$ $\qquad (j = 1, \ldots, \underline{l}(\mu))$ □

EXEMPLE : soit $S = \{a,b\}$.

μ = aaba ; ν = ababa ;

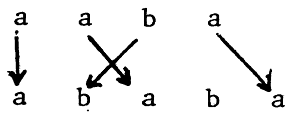
Le S coprojectif f_μ^ν déterminé par l'application :

$$f : [4] \longrightarrow [5] \quad : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

est tel que son action $(f_\mu^\nu)^\cdot$ est ainsi définie :

$$X^\nu \ni <x_1, x_2, x_3, x_4, x_5> \longmapsto <x_1, x_3, x_2, x_5> \in X^\mu$$

On peut représenter ce multiopérateur par un graphe visualisé par :



6.5. Nous avons dit que l'on construisait récursivement l'ensemble $T[\Sigma]$ à partir d'un S - schéma d'opérateurs Σ; plus précisément la construction de $T[\Sigma]$ est telle que nous aurons les théorèmes ci-dessous.

Désignons par $T[K_\circ]$ l'ensemble des S - coprojectifs; chaque S - coprojectif est interprêté comme un multiopérateur.

THEOREME 1 : L'ensemble des multiopérateurs de $T[K_\circ]$ est fermé sous la greffe et l'intrication.

THEOREME 2: Soit Σ un S - schéma d'opérateurs; l'ensemble $T[\Sigma]$ des multiopérateurs engendrés à partir de Σ est le plus petit ensemble tel que :

(i) $\Sigma \subset T[\Sigma]$;

(ii) $T[K_\circ] \subset T[\Sigma]$;

(iii) $T[\Sigma]$ est fermé sous la greffe et l'intrication;

(iv) tout multiopérateur de $T[\Sigma]$ est construit par greffe et intrication à partir de Σ et des S - coprojectifs de $T[K_\circ]$.

De la construction détaillée (voir [DES,80]) on déduit :

THEOREME 3: L'ensemble $T[\Sigma]$ est récursif.

6.6. L'ensemble $T[\Sigma]$ peut être considéré comme l'ensemble des flèches d'une catégorie $\underline{\underline{T}}[\Sigma]$ ayant pour objets les mots μ de M ; la composition est la greffe, chaque objet μ a pour neutre le S - coprojectif I_μ^μ canoniquement défini par l'application identique.

On en déduit aussitôt que T[Σ] est une <u>théorie algébrique</u> (à sortes dans S) au sens de F.W. Lawvere [LAW-63] et que cette catégorie est <u>librement engendrée à partir du S-schéma Σ</u>. En fait, Lawvere a introduit cette notion dans le cas particulier où l'on considère une seule sorte d'objets et la notion a été généralisée à plusieurs sortes d'objets par [BNA-68] , [ADJ-76] , [DES-80].

La catégorie $\underline{\underline{T}}[\Sigma]$ est une catégorie à 'coproduits finis', au sens suivant:

Soit $\mu = s_1 \ldots s_j \ldots s_n$ un mot de M . Tout multiopérateur σ de type $\langle\mu,\nu\rangle$ (donc toute flèche de $\underline{\underline{T}}[\Sigma](\mu,\nu)$) est déterminé de façon unique par la donnée de n opérateurs $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ de T[Σ] de types respectifs $\langle s_j,\nu\rangle$ $(j = 1,\ldots,n)$, tels que les diagrammes co-produits commutent dans $\underline{\underline{T}}[\Sigma]$ pour $j = 1,\ldots, n$:

$$\begin{tikzcd} \mu = s_1 \ldots s_j \ldots s_n \arrow[rr, dashed, "\sigma"] \arrow[dr, "T[K_\circ] \ni J^{\mu}_{s_j}"'] & & \nu \arrow[dl, "\sigma_j \in T[\Sigma]"] \\ & s_j & \end{tikzcd}$$

où $J^{\mu}_{s_j}$ est un S - coprojectif déterminé par la coprojection :

$$[1] \longrightarrow [n] : 1 \longmapsto j$$

Nous en déduisons que, pour un tel multiopérateur σ, nous avons la décomposition par intrication :

$$\boxed{\sigma = \sigma_1 \otimes \ldots \otimes \sigma_j \ldots \otimes \sigma_n}$$

6.7. Désignons par $\underline{\underline{\mathrm{Ens}}}^M$ la catégorie des ensembles indicés par le monoïde M engendré librement par S, l'ensemble des sortes. $X^{(s)}$ désigne une famille d'ensembles de $\underline{\underline{\mathrm{Ens}}}^S$ et $X^{(\mu)}$ son prolongement à M.

DEFINITION 6 : Une $\underline{\underline{T}}\,[\Sigma]$-algèbre - ou $T\,[\Sigma]$-algèbre - de $\underline{\underline{Ens}}^M$ est la donnée d'un foncteur contravariant $\underline{A} : \underline{\underline{T}}\,[\Sigma] \longrightarrow \underline{\underline{Ens}}^M$ $\square$.

Ce foncteur est défini par le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mu \arrow[rrr, "\underline{A}(\mu)"] \arrow[d, "\sigma"'] & & & X^{\mu} \\ \nu \arrow[rrr, "\underline{A}(\nu)"'] & & & X^{\nu} \arrow[u, "\underline{A}(\sigma) = \sigma^{\cdot} \in \mathrm{Hom}\,(X^{\nu},\, X^{\mu})"'] \end{tikzcd}$$

Le foncteur $\underline{A}$ associe donc à chaque multiopérateur de type $\langle \mu, \nu \rangle$ une multiopération ; c'est-à-dire une application de X^{ν} dans X^{μ}. La notion de $\underline{\underline{T}}[\Sigma]$-algèbre de $\underline{\underline{Ens}}^M$ généralise celle de Σ-algèbre. Dans une Σ-algèbre, on sait définir des opérateurs dérivés des opérateurs élémentaires de Σ. On sait associer des opérations dérivées aux opérations élémentaires associées aux opérateurs élémentaires dans la Σ-algèbre. Dans une $\underline{\underline{T}}[\Sigma]$ -algèbre de $\underline{\underline{Ens}}^M$, les multiopérateurs sont construits récursivement à partir des opérateurs élémentaires de Σ ; par le foncteur, on associe à chacun de ces multiopérateurs une multiopération.

La greffe et l'intrication apparaissent comme des lois de composition qui composent entre eux les multiopérateurs de $T[\Sigma]$. Plus précisément

la greffe O est une opération partielle :

$$T[\Sigma]^2 \rightarrowtail T[\Sigma]$$

l'intrication $\otimes_n$ est une opération partielle définie pour chaque n :

$$T[\Sigma]^n \rightarrowtail T[\Sigma].$$

Les noms des multiopérateurs ainsi construits sont déduits par des moyens canoniques (relatifs à la construction de $T[\Sigma]$ qui n'a pas été donnée ici), des noms des multiopérateurs composants.

Nous en déduisons donc que $T[\Sigma]$ est engendré à l'aide des deux lois de greffe et d'intrication, que nous appelerons T-opérations.

6. 8. Nous avons vu que ces T-opérations, lorsqu'elles sont définies, sont associatives (propositions 1 et 2). Il découle directement de la structure de la théorie algébrique $\underline{\underline{T}}[\Sigma]$ les propriétés suivantes :

(P1) Pour tout $<\mu,\nu> \in M \times M$, pour toute famille $\sigma_j \in \underline{\underline{T}}[\Sigma]<s_j,\nu>$ $(j=1,\ldots,m)$ (avec $\mu = s_1\ldots s_j\ldots s_m$) nous avons :

$$\boxed{J^{\mu}_{s_j} \circ (\sigma_1 \boxtimes \ldots \boxtimes \sigma_m) = \sigma_j} \qquad \text{pour } j = 1,\ldots,m.$$

(P2) Pour tout $<\mu,\nu> \in M \times M$, pour tout $\sigma \in \underline{\underline{T}}(\mu,\nu)$ $(\mu = s_1\ldots s_m)$

$$\boxed{(J^{\mu}_{s_1} \boxtimes\ldots\boxtimes J^{\mu}_{s_m}) \circ \sigma = (J^{\mu}_{s_1} \circ \sigma) \boxtimes\ldots\boxtimes (J^{\mu}_{s_m} \circ \sigma) = \sigma}$$

(P3) Pour tout $<\mu,\nu> \in M \times M$, pour tout $\sigma \in \underline{\underline{T}}[\Sigma](\mu,\nu)$ $(\nu = s_1\ldots s_p)$:

$$\boxed{\sigma \circ (J^{\nu}_{s_1} \boxtimes \ldots\boxtimes J^{\nu}_{s_p}) = \sigma}$$

(P4) Soit $\sigma_j \in \underline{\underline{T}}[\Sigma](s_j,\nu)$ et $\sigma'_j \in \underline{\underline{T}}[\Sigma](s'_j,\nu)$ pour $j = 1,\ldots m$

$$\boxed{\text{si } \sigma_j = \sigma'_j \text{ pour } j = 1,\ldots m \quad \text{alors } \sigma_1 \boxtimes \ldots\boxtimes \sigma_m = \sigma'_1 \boxtimes \ldots\boxtimes \sigma'_m .}$$

(P5) Soit $\sigma = \sigma_1 \boxtimes\ldots\boxtimes \sigma_m \in \underline{\underline{T}}[\Sigma](\mu,\nu)$ et soit $\sigma' \in T[\Sigma](\nu,\rho)$

$$\boxed{\sigma \circ \sigma' = (\sigma_1 \circ \sigma') \boxtimes\ldots\boxtimes (\sigma_m \circ \sigma')}$$

(P6) Soit $\sigma \in \underline{\underline{T}}[\Sigma](\mu,\nu)$: il existe m $\sigma_j \in \underline{\underline{T}}[\Sigma](s_j,\nu)$ $(j=1,\ldots,m)$

tels que :

$\sigma = \sigma_1 \boxtimes \ldots\boxtimes \sigma_m$ (pour $\mu = s_1,\ldots s_m$)

Nous avons également :

<u>PROPOSITION 3</u> : <u>Dans T[Σ], pour des multiopérateurs composables, la greffe $\circ$ est distributive à droite par rapport à l'intrication $\boxtimes$.</u>

La preuve repose sur l'examen de la construction de T[Σ].

7. Les S-coprojectifs jouent un rôle fondamental dans la construction de T [Σ] (voir théorème 2) et dans toutes les utilisations que l'on peut en attendre.

En effet, les S-coprojectifs sont des multiopérateurs qui donnent la possibilité de :

- permuter des arguments d'un opérateur;
- dupliquer un argument d'un opérateur;
- étendre "la portée" d'un opérateur;
- effacer un argument d'un opérateur;

Grâce aux S-coprojectifs, il sera possible d'"intriquer" des multiopérateurs qui n'opèrent pas sur le même uple de données.

7. 1. Précisons des notations

$\underline{\underline{T}}[\Sigma](\mu, \nu)$ désigne l'ensemble des flèches :

$$\sigma : \mu \longrightarrow \nu$$

c'est-à-dire des multiopérateurs de type $<\mu, \nu>$.

Le S-coprojectif $J^{\mu}_{s_j}$ qui est déterminé canoniquement par une coprojection :

$$j : [1] \longrightarrow [\underline{1}(\mu)] \quad : \quad 1 \longmapsto j$$

est appelé S-coprojection.

Par conséquent :

$J^{\mu}_{s_j}$ désignera une S-coprojection (s_j présente obligatoirement une occurrence dans μ).

J^{ρ}_{ν} désignera un S-coprojectif caractérisé par l'application $f : [\underline{1}(\nu)] \longrightarrow [\underline{1}(\rho)]$ qui fait commuter le diagramme triangulaire :

f est dite application canonique de J^{ρ}_{ν}.

Montrons les "effets" de quelques S-coprojectifs.

7. 2. Soit $\sigma \in \underline{\underline{T}}[\Sigma](s,\nu)$

Dans une $\underline{\underline{T}}[\Sigma]$-algèbre, associons à σ une opération :

$$\sigma^{\cdot} : X^{\nu} \longrightarrow X^{s}$$

$$: x_{\nu} = \langle x_1, \ldots, x_{\underline{1}(\nu)} \rangle \longmapsto y = \sigma^{\cdot}(x_{\nu})$$

En composant l'opérateur σ avec un S-coprojectif J_{ν}^{ρ}, on obtient un nouvel opérateur :

$$\boxed{\sigma' = \sigma \circ J_{\nu}^{\rho}}$$

<u>L'opération associée à σ'</u> est ainsi définie :

$$(\sigma')^{\cdot} = X^{\rho} \longrightarrow X^{s}$$

$$x_{\rho} \longmapsto y'$$

avec :

$$y' = (\sigma')^{\cdot}(x_{\rho}) = \sigma^{\cdot}(x_{f(1)}, \ldots, x_{f(\underline{1}(\nu))})$$

où f est l'application canonique de J_{ν}^{ρ} :

$$f : [\underline{1}(\nu)] \longrightarrow [\underline{1}(\rho)]$$

Nous adaptons sans peine les définitions précédentes aux multiopérateurs.

7. 3. Permutation des arguments d'un opérateur

Soit $\sigma \in \underline{\underline{T}}[\Sigma](s, \mu)$ et $\Pi_{\mu}^{\mu'}$ un S-coprojectif déterminé par une permutation canonique Π (alors $\underline{1}(\mu) = \underline{1}(\mu')$).

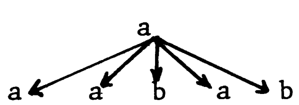
Nous en déduisons que $\sigma' \in \underline{\underline{T}}[\Sigma](s, \mu')$ avec :

$$\boxed{\sigma' = \sigma \circ \Pi}$$

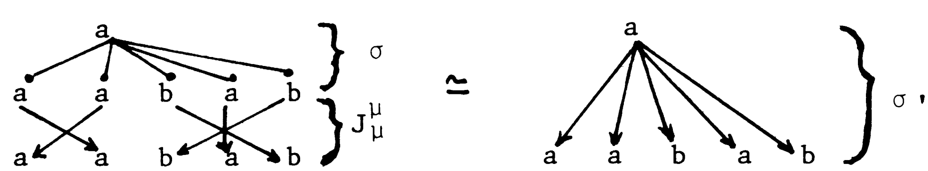
<u>Exemple 1</u> : $S = \{a, b\}$; $\mu = \mu' = a\,a\,b\,a\,b$; $\underline{1}(\mu) = 5$

$$\Pi = [5] \longrightarrow [5] : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Soit $\sigma : a \longrightarrow a\,a\,b\,a\,b$ représenté par :



L'opérateur $\sigma' = \sigma \circ \Pi$: $a \longrightarrow a\,a\,b\,a\,b \longrightarrow a\,a\,b\,a\,b$ est représenté par :



L'action de σ sur $\langle x_1, \ldots, x_5 \rangle$ donne pour résultat :

$$y = \sigma^{\bullet}(\langle x_1, \ldots, x_5 \rangle)$$

L'action de $\sigma' = \sigma \circ \Pi$ sur $\langle x_1, \ldots, x_5 \rangle$ donne pour résultat :

$$y' = \sigma^{\bullet}(\langle x_2, x_1, x_5, x_4, x_3 \rangle) \qquad \square$$

On remarquera que toute permutation Π ne détermine pas un S-coprojectif ; ainsi, dans l'exemple précédent, la permutation $\Pi = \binom{1\ 2\ 3\ 4\ 5}{3\ 2\ 1\ 5\ 4}$ ne fait pas commuter le diagramme triangulaire. Par contre, cette permutation Π détermine un S-coprojectif $\Pi_{\mu}^{\mu'}$ pour μ = a a b a b et μ' = b a a b a.

7. 4. Soit σ_2 un opérateur binaire (c'est-à-dire que $\sigma_2 \in \underline{\underline{T}}[\Sigma](s,\mu)$ avec $\underline{1}(\mu) = 2$). L'opérateur converse de σ_2, désigné par $\breve{\sigma}_2$, est défini par :

$$\boxed{\breve{\sigma}_2 \equiv \sigma_2 \circ \Pi_2}$$

où Π_2 est le S-coprojectif déterminé par la permutation $\Pi_2 : [2] \longrightarrow [2] \binom{12}{21}$

7. 5. <u>Duplication d'arguments d'opérateurs</u>

Soit $\sigma \in \underline{\underline{T}}[\Sigma](s,\mu)$ et S_{μ}^{ν} un S-coprojectif déterminé par une <u>surjection</u> canonique k :

$$[\underline{1}(\mu)] \xrightarrow{k} [\underline{1}(\nu)]$$

Nous en déduisons $\sigma' \in \underline{\underline{T}}[\Sigma](s,\nu)$ avec

$$\boxed{\sigma' = \sigma \circ S_{\mu}^{\nu}}$$

Comme k est une surjection, $\underline{1}(\nu) < \underline{1}(\mu)$ (on suppose que <u>k</u> n'est pas une bijection). Il s'ensuit que deux occurrences au moins d'une même occurrence d'une lettre dans ν sont présentes dans μ . Cette condition entraîne que un des arguments de σ à savoir un x_i du uple suivant :

$$x_{\nu} = \langle x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_{\underline{1}(\nu)} \rangle$$

sera dupliqué en tant qu'argument de σ' dans le uple suivant :

$$x_{\mu} = \langle x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_{\underline{1}(\nu)} \rangle$$

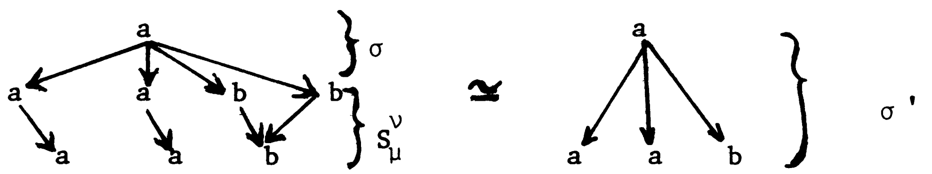
En fait, les rangs (ou adresses) des arguments dupliqués p fois sont tels que, pour la surjection k, on a :

$$k(i_1) = k(i_2) = \ldots = k(i_p)$$

<u>Exemple 2</u> : $S = \{a, b\}$; μ = aabb ; ν = aab.
Soit la surjection $k = \binom{1\ 2\ 3\ 4}{1\ 2\ 3\ 3} : [4] \longrightarrow [3]$.
Nous avons $k(3) = k(4)$. Nous en déduisons le S-coprojectif S_μ^ν . Soit $\sigma \in \underline{\underline{T}}[\Sigma](s,\mu)$, nous en déduisons alors $\sigma' \in \underline{\underline{T}}[\Sigma]\ (s,\nu)$, tel que :

$$\sigma' = \sigma \circ S_\mu^\nu \ : a \longrightarrow a\ a\ b\ b \longrightarrow a\ a\ b.$$

qui sera représenté par :



Si l'action de σ sur le 4-uple $\langle x_1, x_2, x_3, x_4\rangle$ donne pour résultat

$$y = \sigma^\bullet \langle x_1, x_2, x_3, x_4\rangle$$

alors l'action de σ' sur le 3-uple $\langle z_1, z_2, z_3\rangle$ donne pour résultat :

$$y' = (\sigma \circ J_\mu^\nu)^\bullet = \sigma^\bullet(\langle z_1, z_2, z_3, z_3\rangle)$$

il y a duplication du troisième argument z_3 □

7. 6. <u>Extension de la portée d'un opérateur σ</u>

Soit $\sigma \in T[\Sigma]\ (s,\mu)$ et J_μ^ν un S-coprojectif caractérisé par l'<u>injection</u> canonique :

$$j : [\underline{l}(\mu)] \longrightarrow [\underline{l}(\nu)]$$

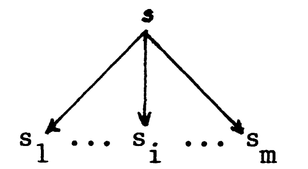
Comme j est une injection, $\underline{l}(\mu) \leq \underline{l}(\nu)$. Nous en déduisons l'<u>opérateur étendu</u>

$$\sigma' = \sigma \circ J_\mu^\nu \in \underline{\underline{T}}[\Sigma]\ (s,\nu)$$

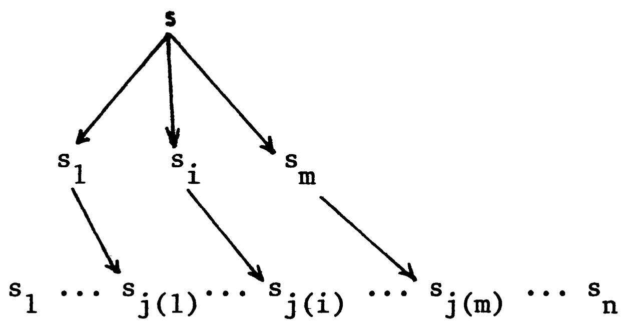
<u>déduit de σ</u> (par J_μ^ν).

Ainsi tout opérateur m-aire (tel que $\underline{l}(\mu) = m$) peut être étendu en un opérateur n-aire (avec $n \geqslant m$ et $\underline{1}(\nu) = n$).

Représentons σ par un arbre

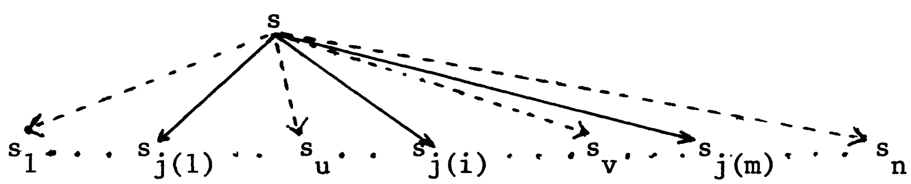


L'opérateur étendu σ' est alors représenté par :



Introduisons deux sortes d'arcs : les <u>arcs vivants</u> (représentés par une "flèche pleine") et les <u>arcs morts</u> (représentés par une "flèche en pointillé")

L'opérateur étendu σ' est représenté alors par le graphe visualisé par :



La distinction "arc mort"/"arc vivant" est justifiée lorsqu'on examine <u>l'action d'un opérateur étendu</u>. Soit $\sigma^{\bullet}$ l'opération associée à σ dans une $\underline{\underline{T}}\,[\Sigma]$ -algèbre :

$$\sigma^{\bullet} : X^{\mu} \longrightarrow X^{s} : x_{\mu} = \langle x_1, \ldots, x_m \rangle \longmapsto y = \sigma^{\bullet}(x_{\mu})$$

Soit j une injection

$j : [m] \longrightarrow [n] : i \longmapsto j(i) j_i$

L'opération $(\sigma')^{\bullet}$ associée à l'opérateur étendu σ' est alors définie par :

$$y' = (\sigma')^{\bullet}(\langle z_1, \ldots, z_k, \ldots, z_n \rangle)$$
$$= \sigma^{\bullet}(\langle z_{j_1}, \ldots, z_{j_m} \rangle)$$

où chaque $j_i \in [n]$ est la i-ieme image ($i \in [m]$) d'un élément de $[m]$:

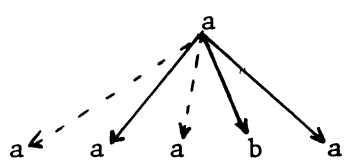
$j_i = j(i)$

L'action de l'opérateur σ' sur un n-uple de données n'est effective ou vivante que sur m arguments du uple, aux rangs $j_1, \ldots, j_i, \ldots, j_m$ et non effective ou morte sur les autres arguments.

<u>Exemple 3</u> : $S = \{a, b\}$; $\mu = a\ b\ a$; $\nu = b\ a\ a\ b\ a$

Soit J_μ^ν déterminé par l'injection $j : [3] \longrightarrow [5]$: $\binom{1\ 2\ 3}{2\ 4\ 5}$

L'opérateur étendu $\sigma' = \sigma \circ J_\mu^\nu$ est représenté par :



Son action sur un 5 uple est définie par :

$$\begin{aligned} y' &= (\sigma')^{\cdot}(\langle z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 \rangle) \\ &= \sigma^{\cdot}(\langle z_2, z_4, z_5 \rangle) \\ &= \sigma^{\cdot}(\langle z_{j(1)}, z_{j(2)}, z_{j(3)} \rangle) \qquad \square \end{aligned}$$

Lorsque l'injection $j : [\underline{1}(\mu)] \longrightarrow [\underline{1}(\nu)]$ sera <u>injective croissante</u>, nous dirons que l'extension est canonique et l'opérateur ainsi obtenu sera dit <u>prolongé</u> (il y a extension de la portée de l'opérateur).

7.7. <u>Effacement d'arguments d'un opérateur</u>

Soit $\sigma \in \underline{\underline{T}}[\Sigma]$ (s, ν). Supposons que nous puissions factoriser σ de la façon suivante :

il existe $\sigma' \in \underline{\underline{T}}[\Sigma]$ (s, μ) avec $\underline{1}(\mu) \leq \underline{1}(\nu)$ tel que l'on ait :

$$\boxed{\sigma = \sigma' \circ J_\mu^\nu}$$

où J_μ^ν est caractérisé par l'injection $j : [\underline{1}(\mu)] \longrightarrow [\underline{1}(\nu)]$.

L'action de σ sur un $\underline{1}(\nu)$-uple d'arguments est la même que l'action de σ' sur un $\underline{1}(\mu)$-uple d'arguments, à condition "d'effacer" les arguments "supplémentaires" de σ par rapport à ceux de σ', ce qui revient à dire que les arguments supplémentaires de σ deviennent "morts".

En effet, nous avons :

$$y = \sigma^{\bullet}(x_\nu) = \sigma^{\bullet}(\langle x_1, \dots, x_{\underline{1}(\nu)}\rangle)$$
$$= (\sigma')^{\bullet}(x_\mu) = (\sigma')^{\bullet}(\langle x_{j(1)}, \dots, x_{j(\underline{1}(\mu))}\rangle)$$

<u>Exemple 4</u> : $S = \{a, b\}$; $\nu = a\ b\ a\ a$; $\mu = a\ b\ a$.

$\sigma : a \longrightarrow a\ b\ a\ a$; $\sigma' = a \longrightarrow a\ b\ a$.

Supposons que $\sigma^{\bullet}$ soit définie :

$$\sigma^{\bullet} : X^{abaa} = X^a \times X^b \times X^a \times X^a \longrightarrow X^a$$
$$\langle x_1, x_2, x_3, x_4\rangle \longmapsto y$$

et $(\sigma')^{\bullet}$ soit également définie :

$$(\sigma')^{\bullet} : X^{aba} = X^a \times X^b \times X^a \longrightarrow X^a$$
$$\langle z_1, z_2, z_3\rangle \longmapsto y'$$

Supposons que l'on ait la factorisation suivante :

$$\sigma = \sigma' \circ J^{abaa}_{aba} \quad : \quad \begin{tikzcd} a \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\sigma'"'] & & a\ b\ a\ a \\ & a\ b\ a \arrow[ur, "J^{abaa}_{aba}"'] & \end{tikzcd}$$

avec $j : [3] \longrightarrow [4] : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Nous avons alors :

$$y = \sigma^{\bullet}(\langle x_1, x_2, x_3, x_4\rangle)$$
$$= (\sigma')^{\bullet}(\langle x_1, x_2, x_3\rangle)$$
$$= (\sigma')^{\bullet}(\langle x_{j(1)}, x_{j(2)}, x_{j(3)}\rangle)$$

En fait, l'argument 'x_4' de σ a été "oublié", c'est-à-dire effacé. □

7.8. Nous retrouvons les problèmes d'extension et de réduction (avec effacement d'arguments) de la portée d'opérateurs en linguistique lorsqu'un <u>opérateur prédicatif</u> (verbe par exemple) d'un certain poids peut étendre sa portée ou respectivement est factorisable, ce qui revient à effacer des arguments.

Prenons deux exemples :

<u>Exemple 5</u> : Considérons deux sortes d'objets, des <u>noms</u> ($\underline{n}$) et des <u>propositions</u> ($\underline{p}$). Considérons les deux opérateurs prédicatifs suivants :

D_1 (représentant le verbe <u>dort</u>) de type $\langle \underline{p}, \underline{n} \rangle$

F_2 (représentant le verbe <u>fait que</u>) de type $\langle \underline{p}, \langle \underline{n}, \underline{p} \rangle\rangle$

L'opérateur unaire D_1 peut être étendu, d'où l'opérateur D_2 de type $\langle \underline{p}, \underline{n}\ \underline{n} \rangle$:

$$D_2 = D_1 \circ J^{\underline{n}\ \underline{n}}_{\underline{n}} \quad \text{avec l'injection} \quad j : [1] \rightarrowtail [2] : \binom{1}{2}$$

Utilisons l'opérateur 'identité' $I^{\underline{n}}_{\underline{n}}$ de type $\langle \underline{n}, \underline{n} \rangle$ caractérisé par l'application identique.

Nous en déduisons un nouvel opérateur prédicatif binaire D'_2 (représentant le verbe '<u>fait dormir</u>') de type $\langle \underline{p}, \underline{n}\ \underline{n} \rangle$ décomposable ainsi :

$$\boxed{D'_2 \equiv_{def} F_2 \circ \langle (I^{\underline{n}}_{\underline{n}} \circ J_1) \otimes (D_1 \circ J_2) \rangle}$$

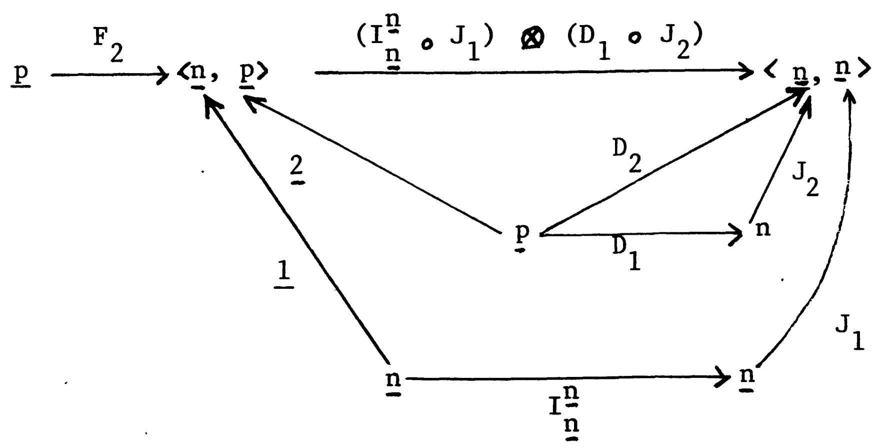
avec J_1 de type $\langle \underline{n}, \underline{n}\ \underline{n} \rangle$ caractérisé par l'injection j_1

$$j_1 : [1] \rightarrowtail [2] : \binom{1}{1}$$

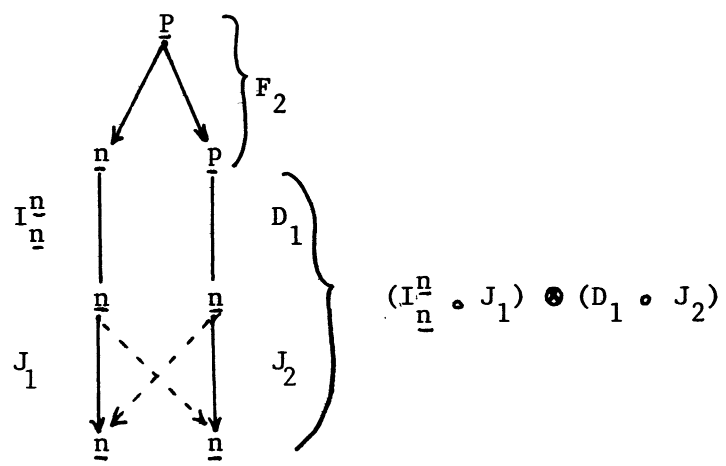
J_2 de type $\langle \underline{n}, \underline{n}\ \underline{n} \rangle$ caractérisé par l'injection j_2

$$j_2 : [1] \rightarrowtail [2] : \binom{1}{2}$$

En utilisant les flèches de $\underline{\underline{T}}[\Sigma]$ et en supposant que D_1 et F_2 sont des opérateurs élémentaires de Σ , nous avons le diagramme suivant :



sachant que 1 et 2 sont les coprojections de n respectivement p dans $\langle \underline{n}, \underline{p} \rangle$. Utilisons les représentations déjà introduites, nous avons le graphe représentatif de D'_2 :



Si nous faisons agir D'_2 sur le couple d'arguments $\langle N, M \rangle$ (pour $\langle$ Noémon, Marie $\rangle$) nous avons étape après étape en remontant le graphe "de bas en haut" :

$$(D'_2)^{\bullet}(\langle N, M\rangle) \left| \begin{array}{l} \langle N, D^{\bullet}_1(M)\rangle \\ F^{\bullet}_2(\langle N, D^{\bullet}_1(M)\rangle) \end{array} \right.$$

Supposons que les opérations $D^{\bullet}_1$ et $F^{\bullet}_2$ associées aux opérateurs D_1 et F_2 permettent d'agencer formellement entre eux les noms (représentés ici par les symboles respectifs 'D_1' et 'F_2') des opérateurs avec leurs arguments respectifs, les résultats sont :

$D_1^{\bullet}\ (A) = "A'D_1'"$ (pour "*A dort*")

$F_2^{\bullet}(A,B) = "A'F_2'B"$ (pour "*A fait que B*")

Le résultat déductible de l'opération $(D_2')^{\bullet}$ associée à l'opérateur complexe D_2' est donné par :

$$(D_2')^{\bullet}(\langle N,\ D_1^{\bullet}(M)\rangle) \equiv F_2^{\bullet}(N,\ D_1^{\bullet}(M))$$

$$= "N'F_2'"M'D_1'"\ "$$

(pour "*Noémon fait que "Marie dort"* "

Noémon fait dormir Marie) □

Exemple 6 : Considérons l'opérateur prédicatif ternaire C_3 de type $\langle \underline{p}, \underline{n}\ \underline{n}\ \underline{n} \rangle$ (représentant le verbe ...*donne*...*à*...) supposé être un opérateur élémentaire de Σ . C_3 est une flèche de $\underline{\underline{T}}\,[\Sigma]$: $p \xrightarrow{C_3} \underline{n}\ \underline{n}\ \underline{n}$

La proposition *Jean donne un livre à Julien* est obtenue en faisant agir l'opérateur C_3 sur le 3-uple $\langle$ *Jean*, *un livre*, *Julien* $\rangle$ d'arguments d'où l'agencement formel de la proposition.

De C_3 nous pouvons "déduire" plusieurs opérateurs (binaires) qui factorisent C_3 selon le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\underline{p} \arrow[rr, "C_3"] \arrow[dr, "C_2'"'] & & \underline{n}\ \underline{n}\ \underline{n} \\
& \underline{n}\ \underline{n} \arrow[ur, "J^{\underline{n}\ \underline{n}\ \underline{n}}_{\underline{n}\ \underline{n}}"'] &
\end{tikzcd}$$

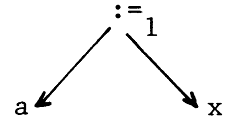
En effet, il existe des opérateurs prédicatifs binaires C_2' qui représentent des verbes bivalents tels que *donne à*... (*donner à quelqu'un*) ou *donne*... (*donner quelque chose*) obtenus en "oubliant" un argument de C_3. De même, C_1' opérateur unaire qui représente le verbe monovalent *donne* (au sens de "a l'habitude de donner"), factorise C_3 (*Jean donne* (en général) $\simeq$ *il est généreux*). □

7.9. Le formalisme de S-coprojectif permet de rapprocher la catégorie $\underline{\underline{T}}[\Sigma]$ de la "logique combinatoire avec types" ([CUR-68], voir[DES-80]). Les différents S-coprojectifs présentés dans l'article (7.3. à 7.7.) jouent des rôles analogues aux principaux combinateurs de la logique combinatoire. Alors que la greffe 'o' joue un rôle analogue au combinateur $\underline{B}$, la duplication (et l'effacement) est traitée à l'aide du combinateur $\underline{W}$, la permutation à l'aide du combinateur $\underline{C}$ et ses dérivés $\underline{C}_{ij}$.
Le formalisme des multiopérateurs est utile pour la linguistique, non seulement pour la théorie linguistique à laquelle nous nous attachons, mais également pour la théorie des opérateurs prédicatifs de Z.S. Harris (modèles de 1976 et suivants), de la grammaire applicationnelle de S.K. Shaumyan.
A titre d'illustration, montrons comment nous traiterions un cas de réfléchi, cas particulier d'anaphorisation.

Exemple 7 : Introduisons un opérateur unaire, noté $:=_1$, d'identification. Désignons par x son argument. L'action de $:=_1$ sur cet argument consiste à trouver un identificateur de x, supposons que ce soit a. En attribuant à x le rôle d'une variable et à a le rôle d'une constante, l'action de $:=_1$ sur x donnant pour résultat a peut être représentée par :

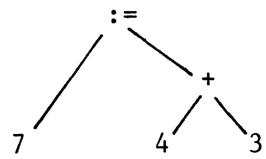
$$\frac{:=_1 \qquad\qquad x}{a}$$

mais également par :



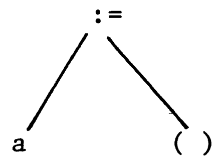
en notant dans la représentation en arbre à la fois l'opérateur, l'argument et le résultat.

REMARQUE : Pour "7 = 4 + 3", nous pouvons utiliser la représentation :

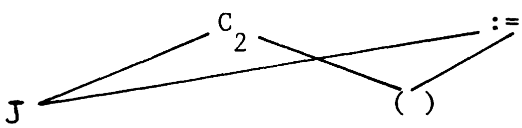


que l'on trouve dans la théorie de la compilation ("génération de codes").

En notant par ( ) un opérateur "o-aire" quelconque dont l'action est une application de $\emptyset$ (ensemble vide) dans un dodomaine X qui aura pour but de distinguer un élément (à déterminer) de X, nous pouvons utiliser :



pour représenter "l'identification de la place d'un argument à son identificateur a". La proposition "Jean se couche" est alors représentée à l'aide d'un opérateur C_2 prédicatif binaire (couche$_2$) de type $\langle \underline{p}, \underline{n}\ \underline{n} \rangle$ et d'une identification du 2ème argument avec le premier, d'où la représentation (se étant représenté par l'identification de la place non saturée dans le schéma) :



le formalisme introduit ici est un "bon" cadre pour traiter de ce genre de représentation.

8. Représentations des multiopérateurs

Comment représenter dans la théorie des graphes les multiopérateurs, de façon à faire apparaître les décompositions récursives ? En d'autres termes, il nous faut associer à chaque multiopérateur σ de $T[\Sigma]$ une représentation graphique $G(\sigma)$ qui permettrait de reconstruire les composants de σ.

En fait, chaque multiopérateur σ est représentable par un graphe sans circuit particulier que nous appelons '<u>treille</u>'. A l'ensemble $T[\Sigma]$ des multiopérateurs, on associe donc une sous-classe de graphes sans circuit , qui est engendrée récursivement à partir des représentations de base.

Précisons cela.

8.1. Aux éléments σ de Σ , on associe canoniquement des arbres élémentaires $G(\sigma)$ plus spécialement des arborescences élémentaires telles que l'ensemble des successeurs immédiats de la racine soit totalement ordonné (nous les avons appelés <u>dendrons</u>).

Soit σ un opérateur de Σ , caractérisé par le triplet $\langle v, \langle s, \mu \rangle\rangle$ de $V \times S \times M$; à σ on associe l'arbre $G(\sigma)$ défini par :

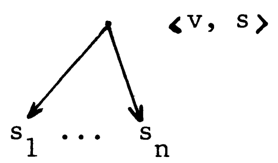
1. <u>la racine</u> qui est étiquetée par $\langle v, s\rangle$;

2. la suite <u>des terminaux</u> étiquetés par :

   $\langle s_1, \ldots, s_n\rangle$

   si $\mu = s_1 \ldots s_n$.

Nous pouvons visualiser $G(\sigma)$ par :

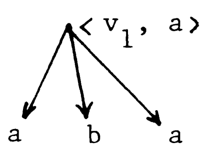


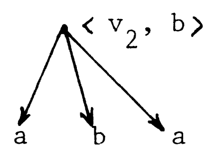
<u>Exemple 1</u> : $S = \{a, b\}$. Soient :

$\sigma_1 = \langle v_1, \langle a, a\ b\ a\rangle\rangle$

$\sigma_2 = \langle v_2, \langle b, a\ b\ a\rangle\rangle$

Représentons σ_1 et σ_2 par les arbres $G(\sigma_1)$ et $G(\sigma_2)$ suivants visualisés par :





□

<u>REMARQUE</u> : Très souvent, la racine est étiquetée par la seconde composante

seule, le nom v de l'opérateur étant implicite.

Nous userons désormais de cette simplification.

3.2. Soit f_μ^ν un S-coprojectif de type $\langle\mu\,,\nu\rangle$ caractérisé par son triangle commutatif. Le S-coprojectif f_μ^ν peut être considéré comme un multiopérateur caractérisé par le triplet :

$$\langle\text{'}f(1)\bullet\ldots\bullet f(\underline{1}(\mu))\text{'}, \langle\mu\,,\nu\rangle\rangle$$

où $\text{'}f(1)\bullet\ldots\bullet f(\underline{1}(\mu))\text{'}$ désigne la suite des images concatenées de f, c'est-à-dire un mot du monoïde libre de base $\mathbb{N}$ (l'opération de concaténation est notée '$\bullet$').

Posons $\mu = s_1 \ldots s_i \ldots s_m$

$\nu = s'_1 \ldots s'_j \ldots s'_n$

Soit $f : [m] \longrightarrow [n]$ l'application canonique du S-coprojectif f_μ^ν.
A chaque couple $\langle s_i, s'_{f(j)}\rangle$ nous associons l'arbre avec un <u>arc vivant</u> et des <u>arcs morts</u> dont la racine est étiquetée par s_i et dont la suite des terminaux est étiquetée par :

$$\langle s'_1, \ldots, s'_{f(j)}, \ldots, s'_n\rangle$$

Nous visualisons cet "arbre" par :

$$\begin{tikzcd}
 & s_i \arrow[dl, dashed] \arrow[d] \arrow[dr, dashed] & \\
s'_1 & s'_{f(j)} & s'_n
\end{tikzcd}$$

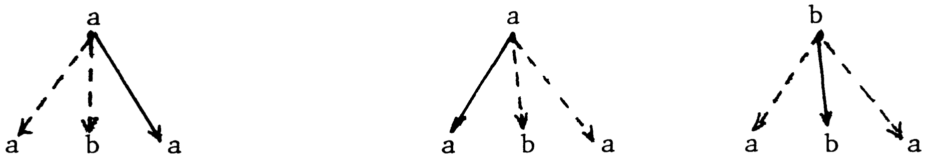
<u>REMARQUE</u> : On rappelle que la distinction arc vivant/arc mort est motivée par la projection qui est associée à l'arbre en question :

$$X^{s'_1} \times \ldots \times X^{s'_{f(j)}} \times \ldots \times X^{s'_n} \longrightarrow X^{s_i}$$

$$\langle x'_1, \ldots, x'_{f(j)}, \ldots, x'_n\rangle \longmapsto x'_{f(j)}$$

en sachant que $s'_{f(j)} = s_i$.

<u>Exemple 2</u> : $S = \{a, b\}$. Soit $\mu = a\ a\ b$ et $\nu = a\ b\ a$. Nous avons f_μ^ν caractérisé par l'application $f = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$. A ce S-coprojectif nous associons les trois arbres visualisés par :



Ces trois arbres sont associés aux trois S-coprojections f_a^{aba}, f_a^{aba}, f_b^{aba} caractérisées par les trois coprojections $[1] \longrightarrow [3]$, d'images respectives 3, 1, 2. □

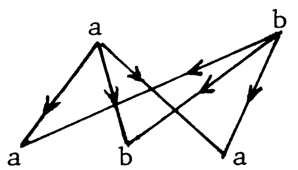
8.3. La T-opération d'intrication $\otimes$ compose deux opérateurs en multiopérateur.

Soit σ_1 un opérateur de type $\langle s, \nu\rangle$ et σ_2 un autre opérateur de type $\langle s', \nu\rangle$. Supposons que ces opérateurs soient représentés par deux arbres $G(\sigma_1)$ et $G(\sigma_2)$ dont les racines respectives sont étiquetées s et s' et dont la suite des terminaux est étiquetée par la même suite ν .

L'intrication $\sigma = \sigma_1 \otimes \sigma_2$ est représentée par un <u>graphe non arborescent</u> $G(\sigma)$ sans circuit tel que :

1. la suite des sommets de niveau un (ou <u>suite des racines</u>) est la suite des racines de $G(\sigma_1)$ <u>et</u> de $G(\sigma_2)$;
2. la suite des terminaux de $G(\sigma)$ est la suite des terminaux de $G(\sigma_1)$ <u>et</u> de $G(\sigma_2)$ <u>identifiés entre eux</u>.

<u>Exemple 1</u> (suite) : L'intrication $\sigma = \sigma_1 \otimes \sigma_2$ est représentée par un graphe $G(\sigma)$ visualisé par :



□

L'opération d'intrication $\otimes$ s'étend aux arbres dont la suite des terminaux est étiquetée par un même mot. Nous avons :

$$G(\sigma_1 \otimes \sigma_2) = G(\sigma_1) \otimes G(\sigma_2)$$

Nous étendons la représentation à une intrication quelconque d'opérateurs :

$$G(\sigma_1 \otimes \ldots \otimes \sigma_n) = G(\sigma_1) \otimes \ldots \otimes G(\sigma_n).$$

En particulier, tout S-coprojectif f_μ^ν est représentable par un graphe sans circuit avec arcs vivants et arcs morts.

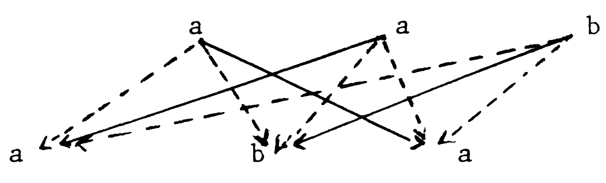
Exemple 2 (suite) : Le S-coprojectif f_μ^ν peut être considéré comme une intrication des trois S-coprojections f_a^ν, f_a^ν, f_b^ν :

$$f = f_a^\nu \otimes f_a^\nu \otimes f_b^\nu$$

Nous en déduisons le graphe :

$$G(f_\mu^\nu) = G(f_a^\nu) \otimes G(f_a^\nu) \otimes G(f_b^\nu)$$

visualisé par :

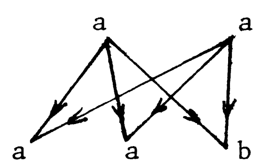


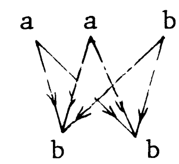
□

8.4. Soit σ_1 et σ_2 deux multiopérateurs de types respectifs $<\mu, \nu>$ et $<\nu, \rho>$. Supposons que $G(\sigma_1)$ et $G(\sigma_2)$ soient les graphes respectifs associés à σ_1 et σ_2. Comme σ_1 et σ_2 sont composables, à $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2$ on associe un graphe $G(\sigma)$ obtenu en substituant à la suite des terminaux de $G(\sigma_1)$ la suite des racines de $G(\sigma_2)$. Le graphe $G(\sigma)$ a pour racines la suite des racines de $G(\sigma_1)$ et pour terminaux la suite des terminaux de $G(\sigma_2)$. Nous transportons dans les graphes l'opération de composition par greffe :

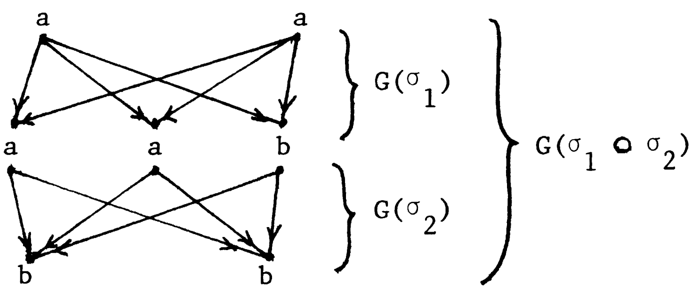
$$G(\sigma_1 \circ \sigma_2) = G(\sigma_1) \circ G(\sigma_2)$$

<u>Exemple 3</u> : $S = \{a, b\}$. Soient σ_1 et σ_2 visualisés par :





Le graphe $G(\sigma_1 \circ \sigma_2)$ est visualisé par :

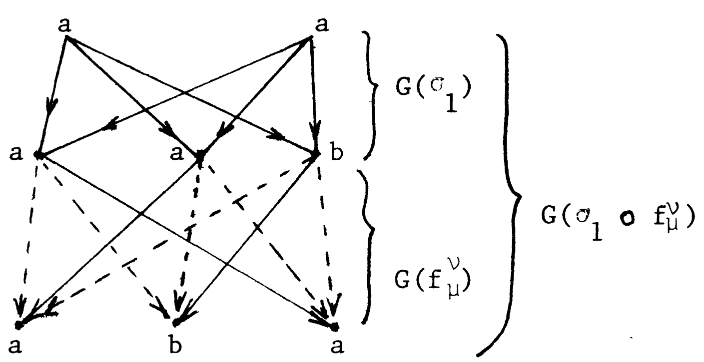


□

<u>Exemple 4</u> : Considérons $G(\sigma_1)$ dans l'exemple précédent et le S-coprojectif $\overset{\vee}{f}_\mu$ de l'exemple 2. Nous avons :

$$G(\sigma_1 \circ \overset{\vee}{f}_\mu) = G(\sigma_1) \circ G(\overset{\vee}{f}_\mu)$$

qui est représenté par le graphe :



□

8.5. Soit Σ un ensemble d'opérateurs élémentaires. Les <u>treilles engendrées par Σ</u> sont donc tous les graphes construits à partir des arbres représentatifs des opérateurs de Σ au moyen des T-opérations de composition (intrication et greffe) et des S-coprojectifs. Donnons de façon informelle la définition des treilles :

Chaque treille engendrée par Σ est un graphe orienté, connexe et sans circuit tel que :

1. il y ait deux types d'arcs : des arcs vivants et des arcs morts ;
2. l'ensemble des successeurs immédiats de chaque sommet est totalement ordonné ;
3. tout arbre ,qui a sa racine à un niveau et la suite de ses successeurs au niveau inférieur,est soit un arbre élémentaire associé à un opérateur de Σ, soit un arbre associé à une S-coprojection.

REMARQUE : On rappelle que tout graphe sans circuit est décomposable en niveaux. La définition qui précède est justifiée par le statut des objets (multiopérateurs) représentés par les treilles.

8.6. Les treilles engendrées par Σ constituent une sous-classe des graphes sans circuit . Etant donné des arbres élémentaires représentatifs d'opérateurs de Σ , agencés entre eux par greffe et intrication de façon à vérifier les propriétés définitoires des treilles, dans quelle mesure peut-on dire que le graphe ainsi obtenu est représentatif d'un multiopérateur de $T[\Sigma]$?

Nous allons voir que deux treilles engendrées par Σ peuvent être "équivalentes", en particulier les suites d'un même niveau peuvent ne pas être identiques et engendrer l'équivalence. Donnons en un exemple :

Considérons l'ensemble des sortes :

$S = \{a, b, c, d, e, f\}$

et les six opérateurs élémentaires de Σ :

σ de type $\langle a, a\ c \rangle$

σ' de type $\langle b, b\ d \rangle$

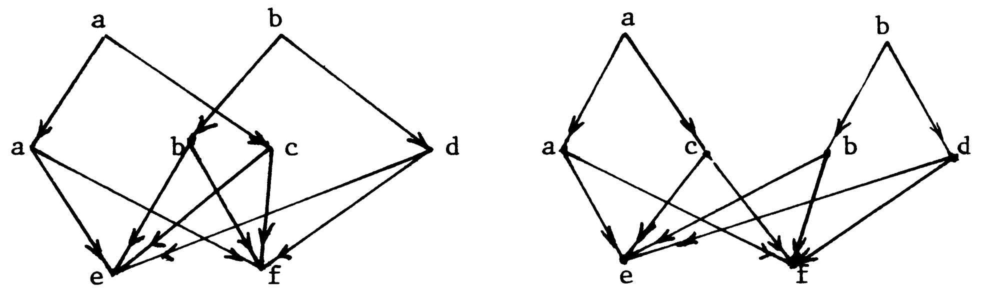
σ_1 de type $\langle a, e\ f \rangle$

σ_2 de type $\langle b, e\ f \rangle$

σ_3 de type $\langle c, e\ f\rangle$

σ_4 de type $\langle d, e\ f\rangle$

Considérons également les agencements des opérateurs conduisant aux treilles T_1 et T_2 visualisées par :



On s'assure que ces graphes vérifient bien les propriétés définitoires des treilles puisque a c, b d, a b, e f sont des suites totalement ordonnées.

Chaque treille représente un <u>schéma de programme</u> (sans boucle). Supposons qu'aux opérateurs de Σ soient associées des opérations. <u>L'évaluation de la treille</u> consiste à lui associer une multiopération. L'évaluation s'effectue en "remontant" la treille de "bas en haut" et en exécutant "en parallèle et simultanément" les opérations élémentaires qui composent la treille.

Aux treilles T_1 et T_2 précédentes, on associe donc les deux multiopérations $\underline{eva}(T_1)$ et $\underline{eva}(T_2)$ qui sont des applications de X^{ef} dans X^{ab}.

<u>REMARQUE</u> : On rappelle la notation :

Si $\mu = s_1 \ldots s_m$ alors $X^\mu = X^{s_1} \times \ldots \times X^{s_m}$.

Evaluons les deux treilles T_1 et T_2.

$$\underline{eva}(T_1) : X^{ef} \longrightarrow X^{abcd} \longrightarrow X^{ab}$$

$$\langle x_1, x_2\rangle \longmapsto \langle y_1, y_2, y_3, y_4\rangle \longmapsto \langle z_1, z_2\rangle$$

$$\underline{eva}(T_2) : X^{ef} \longrightarrow X^{acbd} \longrightarrow X^{ab}$$

$$\langle x_1, x_2\rangle \longmapsto \langle y_1, y_3, y_2, y_4\rangle \longmapsto \langle z'_1, z'_2\rangle$$

avec $y_i = \sigma_i^\bullet(x_1, x_2)$ ($i = 1, 2, 3, 4$)

$$z_1 = \sigma^{\bullet}(\sigma_1^{\bullet}(x_1, x_2), \sigma_3^{\bullet}(x_1, x_2)) = z_1'$$

$$z_2 = (\sigma')^{\bullet}(\sigma_2^{\bullet}(x_1, x_2), \sigma_4^{\bullet}(x_1, x_2)) = z_2'$$

Les deux évaluations $\underline{eva}(T_1)$ et $\underline{eva}(T_2)$ coïncident : aux deux treilles T_1 et T_2 est donc associée la même multiopération.

Nous en déduisons la relation d'équivalence :

"<u>deux treilles</u> T_1 <u>et</u> T_2 <u>sont équivalentes lorsque leurs évaluations coïncident</u>".

Les deux treilles T_1 et T_2 prises pour exemple correspondent à deux agencements, dans $T[\Sigma]$, c'est-à-dire aux deux multiopérateurs respectifs :

$$\varphi = (\sigma \circ J_1) \otimes (\sigma' \circ J_2) \circ (\sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_4)$$

$$\psi = (\sigma \circ J_3) \otimes (\sigma' \circ J_4) \circ (\sigma_1 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_4)$$

où J_1, J_2, J_3 et J_4 sont des S-coprojectifs définis par les applications sous-jacentes respectives $[2] \longrightarrow [4]$:

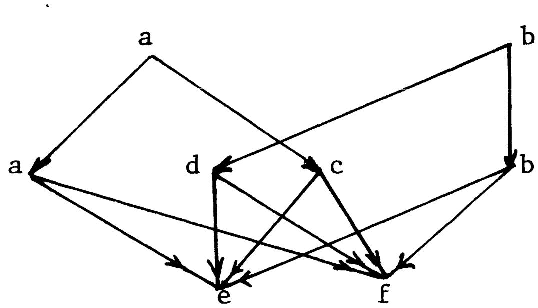
$$j_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} ; \; j_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} ; \; j_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} ; \; j_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Les évaluations sont identiques :

$$\varphi^{\bullet} = \psi^{\bullet} = \underline{eva}(T_1) = \underline{eva}(T_2)$$

Les treilles construites à partir de φ et de ψ sont donc équivalentes à T_1 et T_2.

Considérons maintenant le graphe suivant visualisé par :



Ce graphe est-il une treille engendrée par Σ ? La réponse est non puisque l'arbre de racine étiquetée b et dont la suite des terminaux est étiquetée $\langle$ d, b $\rangle$ n'est pas un arbre de Σ . Nous pouvons cependant considérer ce graphe comme une treille en considérant que l'arbre en question est l'arbre d'un opérateur converse de Σ (en fait l'arbre du converse $\check{\sigma}'$).

Avec cette convention, la treille T_3 précédente est donc équivalente à la treille représentative du multiopérateur suivant :

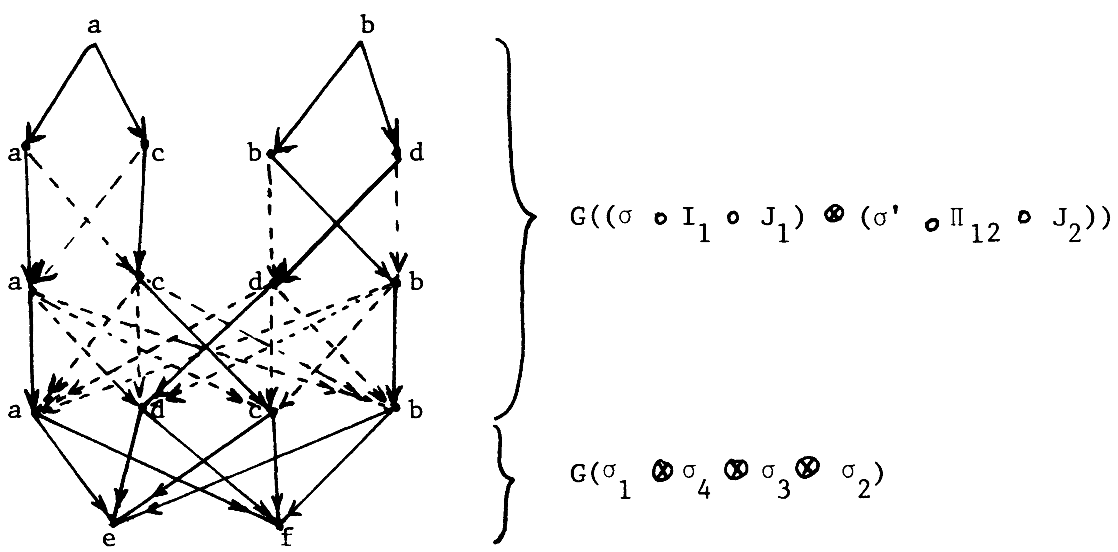
$$[((\sigma \circ I_1) \circ J_1) \otimes (\sigma' \circ \Pi_{12}) \circ J_2)] \circ (\sigma_1 \otimes \sigma_4 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_2)$$

où I_1, J_1, J_2 et Π_{12} sont des coprojectifs exprimés par les applications sous-jacentes :

I_1 : $[2] \longrightarrow [2]$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; Π_{12} : $[2] \longrightarrow [2]$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

J_1 : $[2] \longrightarrow [4]$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; J_2 : $[2] \longrightarrow [4]$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

La treille représentative de ce multiopérateur est visualisée par :



Cette treille n'est pas équivalente aux deux treilles T_1 et T_2 puisque si l'opérateur σ' n'est pas commutatif, alors en général :

$\underline{\text{eva}}(T_3) \neq \underline{\text{eva}}(T_1)$.

<u>REMARQUE</u> : Les algorithmes de manipulation des graphes représentatifs aux multiopérateurs ont été écrits par M. Cori dans sa thèse de 3ème Cycle

[COR-80]. Les structures manipulées sont appelées S-grillages.

8.7. Lorsqu'on "oublie" que chaque composante de la treille est un arbre élémentaire de Σ ou un S-coprojectif, nous avons une situation mathématique beaucoup plus simple puisque nous pouvons définir un foncteur $\underline{G}$ de la catégorie $\underline{\underline{T}}[\Sigma]$ dans la catégorie "semi-additive $\underline{\underline{T}}[S]$ des chemins sur l'alphabet S" considérée dans [DES-80] et qui sera présentée dans un prochain numéro de cette revue [DES-82]. Chaque multiopérateur σ de $\underline{\underline{T}}[\Sigma]\ (\mu, \nu)$ est représenté par une flèche de $\underline{\underline{T}}[S](\mu, \nu)$ décomposable par produit et coproduit. Chaque flèche de $\underline{\underline{T}}[S]$ est représentable à son tour par une matrice. En fait, une flèche de $\underline{\underline{T}}[S](\mu, \nu)$ est un biproduit :

Soit $\sigma : \mu = s_1 \ldots s_m \longrightarrow s'_1 \ldots s'_n = \nu$ on a alors :

$\underline{\underline{T}}[S](s_1 \ldots s_m, s'_1 \ldots s'_n) \simeq \underset{i,j}{\Sigma}\ \underline{\underline{T}}[S](s_i, s'_j)$ où $\underset{i,j}{\Sigma}$ est le biproduit itéré de monoïdes abéliens. Chaque composante σ_{i_j} de $\underline{\underline{T}}[S](s_i, s'_j)$ est une "somme" de chemins entre s_i et s'_j.

La situation est plus complexe lorsque l'on n'"oublie" pas que les composants de base sont des opérateurs élémentaires de Σ .

Il n'est alors plus possible de considérer un opérateur complexe (et naturellement un multiopérateur) comme étant "bien représenté" par ses seuls chemins puisque chaque composant élémentaire est un arbre indécomposable. Le graphe sans circuit où l'on "oublie" la nature des composants, qui est sous-jacent à une treille, est appelé <u>treillage</u> .

9. Les multiopérateurs sont utiles pour définir intrinsèquement des propriétés d'opérateurs.

9.1. L'expression de la <u>commutativité</u> de l'opérateur binaire σ s'effectuera à l'aide de l'identité formelle :

$$\boxed{\sigma \circ \mathbb{I}_{12} \equiv \sigma}$$

où Π_{12} est caractérisé par la bijection $\binom{1\ 2}{2\ 1}$.

L'expression de l'associativité de l'opérateur binaire σ s'effectuera à l'aide de l'identité formelle :

$$\boxed{\sigma \circ (J_1 \otimes (\sigma \circ J_{23})) \equiv \sigma \circ ((\sigma \circ J_{12}) \otimes J_3)}$$

où J_1, J_{23}, J_{12}, J_3 sont des coprojectifs caractérisés par les applications respectives :

$j_1 \ : [1] \text{———} [2] \ : \binom{1}{1}$

$j_{23} : [2] \text{———} [3] \ : \binom{1\ 2}{2\ 3}$

$j_{12} : [2] \text{———} [3] \ : \binom{1\ 2}{1\ 2}$

$j_3 \ : [1] \text{———} [3] \ : \binom{1}{3}$.

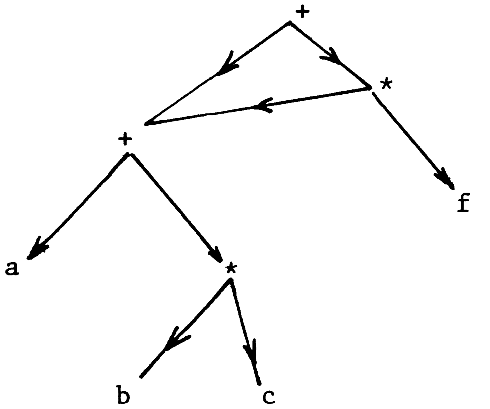
Ces propriétés sont formulées de façon intrinsèque sans faire appel aux données ou aux domaines, même sous forme de variables.

9.2. Le formalisme proposé est utile pour fonder un métalangage de description de la génération des codes qui interviennent dans la compilation des langages de programmation.

Par exemple, l'expression arithmétique avec des sous-expressions communes :

$a + b * c + (a + b * c) * f$

est décrite à l'aide du graphe sans circuit :



que nous décrivons par le multiopérateur :

$\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3 \circ \sigma_4$

avec :

$$\left|\begin{array}{l} \sigma_1 \equiv + \\ \sigma_2 \equiv J^2_1 \bullet * \\ \sigma_3 \equiv (+ \circ J^3_{12}) \otimes J^3_3 \\ \sigma_4 \equiv J^4_1 \otimes (* \circ J^4_{23}) \otimes J^4_4 \end{array}\right.$$

en sachant que + et * sont des opérateurs élémentaires caractérisés par

$$+ \equiv \langle \underline{+}, \langle \underline{n}, \; \underline{n}\,\underline{n} \rangle\rangle$$

$$* \equiv \langle \underline{*}, \langle \underline{n}, \; \underline{n}\,\underline{n} \rangle\rangle$$

où $\underline{n}$ désigne la sorte des entiers naturels et où $J^q_{p_1 \ldots p_r}$ est un co-projectif déterminé par l'application injective (avec $r \leqslant q$) :

$$j : [r] \longrightarrow [q] \; : \; \begin{pmatrix} 1 & \ldots & r \\ j(1) & \ldots & j(r) \end{pmatrix}$$

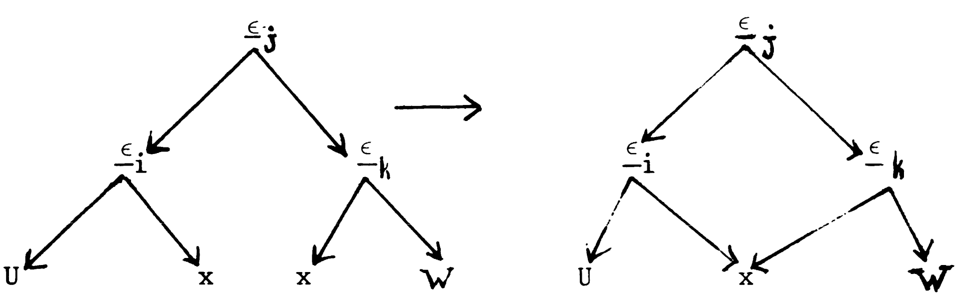
9.3. En linguistique, nous avons souvent à manier des formules où un terme est intriqué dans plusieurs relations [CULI/DES-82].

Considérons par exemple la formule métalinguistique suivante :

$$\langle \; U \; \underline{\epsilon}_i \; \langle \; x \; \rangle \; \underline{\epsilon}_k W \rangle$$

où le terme x est <u>intriqué</u> dans les deux relations de repérage suivantes : $\langle \; U \; \underline{\epsilon}_i \; x \; \rangle$ et $\langle \; x \; \underline{\epsilon}_k \; W \; \rangle$.

De façon plus précise, la formule précédente est obtenue à partir de la transformation suivante entre graphes (schéma d'intrication) :



La description de l'expression de droite s'effectue comme suit:

Supposons que $\underline{\epsilon}_i$, $\underline{\epsilon}_j$ et $\underline{\epsilon}_k$ soient des opérateurs binaires et U, x et V des opérandes (ou opérateurs o-aires). Le graphe de droite est une treille qui représente le multiopérateur σ :

$$\boxed{\sigma \equiv \underline{\epsilon}_j \circ [(\underline{\epsilon}_i \circ J_1) \otimes (\underline{\epsilon}_k \circ J_2)]}$$

où J_1 et J_2 sont des coprojectifs caractérisés par les applications :

j_1 : $[2] \longrightarrow [3]$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

j_2 : $[2] \longrightarrow [3]$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Un traitement informatique de ces agencements par intrication nécessite cette analyse mathématique et la mise en place des métalangages de description (voir [CULI,DES-82]).

BIBLIOGRAPHIE

[ADJ-77] COGUEN J.A., THATCHEF J.W., WAGNER E.G., WRIGHT J.B., "Initial Algebra Semantics and continous Algebras", Journal of the Association of Computing Machinery, (24) 1977.

[BAR/DES-71] BARBAULT M.C., DESCLES J.P., "Vers une formalisation des grammaires transformationnelles", Math. Sci. Hum., (34) 1971.

[BNA-68] BENABOU J., "Structures algébriques dans les catégories", Cahiers de topologie et géométrie différentielle, vol. X, (1) 1968.

[COR-80] CORI M., Structures hiérarchiques et opérateurs : manipulations et transformations algorithmiques, Thèse 3ème Cycle, Université Paris 7, 1980.

[CULI/DES-82] CULIOLI A., DESCLES J.P., "Traitement formel des langues naturelles"-I et II-, Math. Sci. Hum., 1982.

[CUR-68] CURRY H.B. et alii, Combinatory Logic -I et II-, North Holland, Amsterdam, 1968 et 1972.

[DES-80] DESCLES J.P., Opérateurs/opérations : méthodes intrinsèques en informatique fondamentale; applications aux bases de données et à la linguistique, Thèse, Université René Descartes, Paris, 1980.

[DES-81] DESCLES J.P., "De la notion d'opération à celle d'opérateur ou à la recherche de formalismes intrinsèques", Math. Sci. Hum., (76) 1981.

[DES-82] DESCLES J.P., "Graphes sans circuit et calcul linéaire", Math. Sci. Hum., (79) 1982.

[LAW-63] LAWVERE F.W., "Functorial Semantics of Algebraic Theories", Proc. Nat. Acad. Sc. USA, (50) 1963.