MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

J. P. DESCLES

De la notion d’opération à celle d’opérateur ou à la recherche de formalismes intrinsèques

Mathématiques et sciences humaines, tome 76 (1981), p. 5-32
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1981__76__5_0>

Math. Sci. hum. (*19*^{e} année, n°76, *1981*, p.5-32)

DE LA NOTION D'OPERATION A CELLE D'OPERATEUR
ou
A LA RECHERCHE DE FORMALISMES INTRINSEQUES

J.P. DESCLES*

Plusieurs situations invitent à définir des opérations portant sur des opérateurs indépendamment des objets sur lesquels ceux-ci opèrent.
Cette situation intervient, certes, en informatique mais aussi en linguistique (et peut-être dans d'autres domaines). Pour la première discipline, citons la définition des schémas de programme, l'axiomatique des structures de données, la transformation de programmes, la modélisation algébrique des bases de données ; pour la seconde, la construction de systèmes métalinguistiques de représentations des données linguistiques, l'engendrement d'une famille de paraphrases, les déformations grammaticales d'un énoncé par programme informatique, la construction des catégories grammaticales au moyen d'opérations généralisables à l'analyse de langues non apparentées génétiquement.

Est-il possible de proposer des techniques algébriques propres à saisir et à exploiter cette notion "d'indépendance par rapport aux données" ?
Pour répondre à cette question il nous a paru utile de reconstruire la façon dont s'établit historiquement une distinction de plus en plus nette entre opération et opérateur.

Au XVI^e siècle, dès son origine, le langage algébrique a su se doter d'une notation qui a réussi à abstraire les opérations des objets auxquels elles s'appliquent(ou sur lesquels elles portent) et ce pour en faire des objets propres de la pensée. Ce langage est constitué de systèmes symboliques qui prennent en charge des êtres algébriques - nombres , inconnues, symboles littéraux ... - puis , en généralisant, des êtres qui

* Université de Paris-VII, UER de Mathématiques, 2 place Jussieu 75221 Paris Cedex 05. Je remercie A. Lentin qui a relu le manuscrit avec soin en l'améliorant considérablement avec toute la culture qu'on lui connait.

désignent des objets géométriques - vecteurs, transformations, tenseurs ... - des entités logiques - noms, propositions, prédicats, variables ... -. Ces systèmes s'organisent en une véritable "écriture conceptuelle" (pour re-reprendre l'expression *Begriffsschrift* de G. Frege) où les concepts sont intégrés dans l'écriture manipulatoire présentée parfois sous la forme d'un Calcul formel et significatif (Calcul différentiel et intégral, Calcul des propositions, des prédicats, des modalités...) que l'on désigne souvent sous le nom de langage formalisé (langages de premier ordre, des catégories, des diagrammes, des graphes...). Lorsque les notations sont au point, la pensée se dégage du souci de vérifier, à chaque pas de calcul, la signification première des transformations formelles opérées sur les agencements symboliques qui représentent des êtres mathématiques (algébriques, géométriques, logiques ...). En devenant formelles, les réécritures laissent apparaître des types d'opérations appréhendées à partir d'opérations plus concrètes ; l'examen du mécanisme formel mis en jeu dans l'opération dégage un nouvel objet symbolique plus abstrait ; c'est ce qui est souvent désigné sous le vocable d'opérateur. Celui-ci agit sur une opérande pour produire un résultat. Alors que l'opération est un concept qui vise à saisir le processus opératoire de transformation de l'opérande, l'opérateur se présente comme étant détachable de l'opérande et du processus opératoire qu'il engendre. Il peut être pensé "en soi" et pour lui-même ; il est définissable intrinsèquement par ses seules latitudes combinatoires et ses possibilités, ou contraintes, d'agencement avec d'autres opérateurs, indépendamment des actions que ces opérateurs déclenchent.

A. Prenons quelques exemples mathématiques.

(a) Désignons par X et Y deux espaces vectoriels sur un même corps. L'ensemble L(X, Y) des morphismes de X vers Y est structuré en espace vectoriel. Chaque élément de L(X, Y) peut être interprété comme un opérateur linéaire qui opère sur des objets (vecteurs) pour construire d'autres objets (vecteurs) . Ces opérateurs linéaires sont pensés indépendamment des objets sur lesquels ils opèrent ; ils sont composables entre eux (addition, multiplication par un scalaire, composition, multiplication tensorielle ...). A certains opérateurs on sait associer d'autres opérateurs : l'inverse, le transposé, l'adjoint ... ; rechercher le spectre de l'opérateur ou une décomposition canonique (par exemple de Jordan)...

(b) Désignons maintenant par E un ensemble de fonctions numériques $f, g, \ldots$ d'une variable t appartenant à un ensemble X. Pour tout f de E, on suppose que l'intégrale, désignée par $\mu(f)$, est définie. On sait que E peut être structuré en espace vectoriel. Par suite, $\mu(f)$ est la valeur d'une forme linéaire μ sur E.

Définissons une semi-norme sur E par :

$$// f //_p = (\mu(f)^p)^{\frac{1}{p}}$$

Désignons par $H_1{}^p(X)$ l'ensemble des fonctions numériques à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ qui sont "presque partout" limites de suites de Cauchy de l'espace E muni de la semi-norme précédente. $H^p(X)$ désigne l'espace quotient de $H_1{}^p(X)$ par la relation d'équivalence : " f est identique à g presque partout".

Il est bien connu que l'espace $H^2(X)$ muni du "produit scalaire", noté / , défini par :

$$f / g = \mu(fg)$$

et de la "norme" définie par :

$$(f / f)^{\frac{1}{2}}$$

est un <u>espace de Hilbert</u>. La fonction g étant fixée, f étant une fonction quelconque de $H_1^2(X)$; on en déduit que la <u>forme linéaire</u>

$$f \longmapsto \mu(fg)$$

est continue sur $H_1^2(X)$, en vertu d'un théorème classique des espaces fonctionnels. Réciproquement, $H^2(X)$ étant un espace de Hilbert, on sait que <u>toute fonction</u> g de $H_1^2(X)$ définit une <u>forme linéaire continue</u> sur $H^2(X)$ qui s'écrit comme ci-dessus.

Il s'ensuit que μ apparaît comme opérateur d'intégration ayant pour opérandes les fonctions f de $H^2(X)$. L'action de l'opérateur μ sur son opérande construit une valeur qui représente "l'intégrale de f" . De même, de chaque fonction de g de H_1^2 (X) , on déduit aussitôt un opérateur, ayant pour domaine $H^2(X)$, tel que à chaque fonction f, on associe une valeur définie par la forme linéaire μ (fg) qui se trouve être le "produit scalaire" constitutif de l'espace de Hilbert $H^2(X)$.

Plus généralement sur les espaces de Hilbert on a pu définir différents opérateurs dont le fonctionnement est plus ou moins simple*.

(c) Il est devenu très fréquent d'utiliser le terme d'opérateur, aussi bien en analyse que dans la théorie des équations aux dérivées partielles, pour désigner une opération (formelle) dans laquelle on sait isoler une opérande, un résultat et une transformetion formelle, ce qui permet d'oublier la signification originelle de la transformation opérée. On utilise ainsi les opérateurs "gradient", "rotationnel", "laplacien" ... La plupart de ces opérateurs se prêtent à des combinaisons formelles régies par des règles algébriques strictes. Un exemple caractéristique est fourni par l'opérateur ∇ ("nabla") défini formellement (pour la dimension 3) par :

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

Si f(x, y, z) est une fonction scalaire différentiable et définie sur un certain domaine, alors ∇ est un opérateur qui, en agissant sur f(x, y, z), construit un nouvel objet (ce dernier, on le sait, a une interprétation mathématique et physique dans un champ) ; cet objet est déterminé par l'expression :

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

---

* Voir par exemple Arlen Brown et Carl Pearcy Introduction to Operator Theory I. Elements of Functional Analysis - Springer 1977.

Rappelons quelques règles formelles relatives à ∇

1. $\nabla (f + g) = \nabla f + \nabla g$
2. $\nabla .(U + V) = \nabla . U + \nabla . V$
3. $\nabla \times (U + V) = \nabla \times U + \nabla \times V$
4. $\nabla .(fU) = (\nabla f).U + f (\nabla . U)$
5. $\nabla \times (U \times V) = (V.\nabla) U - V(\nabla . U) - (U.\nabla)V + U(\nabla . V)$
6. $\nabla .(\nabla f) = \nabla^2 f \equiv \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

où f et g sont des fonctions scalaires différentiables sur un domaine;

U et V sont des fonctions vectorielles différentiables sur un domaine;

. et x désignent respectivement le "produit scalaire" et le "produit vectoriel".

(∇^2 est le "laplacien" désigné plus souvent par Δ)

On utilise aussi des opérateurs comme ceux de Fredholm et de Volterra pour ne citer que ceux-là.

Depuis plus d'un siècle les mathématiciens étudient également des équations fonctionnelles (scalaires et vectorielles) de la forme :

$$A . \varphi = f$$

où A est un opérateur différentiel linéaire ayant pour opérande une fonction φ inconnue, la fonction f étant donnée. En Mécanique ou en Physique, on a dû résoudre des équations du type précédent, par exemple : l'équation de Laplace (l'opérateur utilisé est le "laplacien" Δ) ou l'équation des ondes (l'opérateur est symbolisé par $\square$) ou encore l'équation de la chaleur...

Très souvent, on essaie de ramener des problèmes d'analyse fonctionnelle à des problèmes de nature algébrique. De façon très schématique, le problème de l'équation $A . \varphi = f$ est considéré comme une extension à certains espaces fonctionnels des problèmes posés par l'algèbre linéaire élémentaire (dans les espaces de dimension finie) : on étudie l'image et le noyau d'un certain opérateur linéaire et, lorsque cela est possible, on détermine son inverse. Mais, alors que dans l'al - gèbre linéaire classique un opérateur et son inverse sont de même nature, il semble bien que, en analyse fonctionnelle, un opérateur différentiel et l'opérateur intégral qui l'inverse aient des propriétés très différentes. On a pu cependant définir une classe d'opérateurs "quasi - locaux" qui englobe les opérateurs différentiels et certains opérateurs intégraux, ce sont les opérateurs pseudo-différentiels qui jouent un très grand rôle dans la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires (en particulier les opérateurs de Lax - Maslov) (*).

(d) Evoquons plus longuement un autre exemple puisqu'il présente un intérêt épistémologique pour notre sujet : c'est l'exemple du Calcul Opérationnel fondé par Oliver Heaviside (1892) qui a cherché à ramener analogiquement les opérations transcendantes de différentiation et d'intégration à des opérateurs rendus autonomes car détachés de leurs opérandes. Ces opérateurs sont pensés et traités comme des êtres algébriques composables entre eux; ils sont intégrés dans des polynomes, des séries formelles et liés par certaines identités formelles. On définit sur les opérateurs du Calcul Opérationnel diverses opérations, indépendamment de l'action et de la signification première des opérateurs. L'autonomie de ces opérateurs a eu historiquement une valeur heuristique considérable et le processus de "récupération par la mathématique correcte" a été long à se stabiliser comme le montre l'histoire encore récente (que nous allons retracer ci-dessous brièvement) qui nous montre un esprit pionnier qui s'aventure sur un terrain peu solide et, ensuite, la mathématique apprend à renforcer et à justifier les manipulations purement formelles qui étaient considérées en leur temps comme suspectes (**), voire interdites.

(*) Jean Dieudonné : Eléments d'analyse, t.7, Gauthier-Villars, 1978

(**) La physique mathématique procède dans de nombreux cas de la même façon. Pour "expliquer" un phénomène, on applique un théorème de façon erronée (par exemple, aux limites ou sur les bords) alors que la démonstration mathématique utilisée ne légitime pas de tels emplois.

Comment procédait Heaviside ? Il utilise un opérateur différentiel $p = \frac{d}{dt}$. L'action de p sur une fonction f donne pour résultat la dérivée f' , d'où l'identité formelle (fondamentale dans le Calcul Opérationnel) :

$$(o) \qquad pf(t) = \frac{d}{dt} f(t) = f'(t)$$

et les autres identités qui s'en déduisent :

$$(o') \qquad p^2 f(t) = p (p (f (t)) = p f' (t) = f''(t)$$

$$(o^n) \qquad p^n f(t) = p^{n-1}(p f (t)) = f^{(n)}(t)$$

Heaviside invente une méthode qui résout par des méthodes algébriques les équations différentielles. Considérons par exemple, l'équation :

$$(1) \qquad y (t) + y' (t) = t^2$$

que nous réécrivons formellement :

$$(2) \qquad y + p y = t^2$$

Puisque p est "analogue" à une quantité algébrique , nous en déduisons la solution formelle :

$$(3) \qquad y = \frac{1}{1 + p} t^2$$

En introduisant formellement la série géométrique et en supposant légitime la distributivité, nous avons le développement :

$$(4) \qquad y = t^2 - pt^2 + p^2t^2 - p^3t^2 + \ldots$$

Evaluons l'action des opérateurs p, p^2, p^3 etc... sur leurs opérandes t^2, nous obtenons, avec la méthode de Heaviside, une solution de l'équation (1) :

$$(5) \qquad y (t) = t^2 - 2t + 2$$

La signification de l'opérateur p n'est pas intervenue dans la manipulation qui nous a conduit à une solution, par des voies algébriques (mise en facteurs, développement formel sans se soucier du rayon de convergence pour lequel un tel développement était légitime).

Certaines manipulations algébriques conduisent à des résultats faux. Ainsi, c étant une constante, il n'est pas licite de diviser par c l'équation $p\,c = o$, dès que la constante est non nulle puisque nous en tirerions aussitôt : $o \neq c = o$. La métode peut fournir aussi des solutions différentes. Reprenons le développement de la série géométrique en y substituant cette fois-ci $-p$, nous avons :

$$(4') \qquad y = \frac{1}{p}t^2 - \frac{1}{p^2}t^2 + \frac{1}{p^3}t^2$$

Interprétons l'opérateur $\frac{1}{p}$ comme un <u>opérateur d'intégration</u> (pensé comme l'opérateur inverse de l'opérateur p de différentiation) . L'opérateur $\frac{1}{p^n}$ est une suite d'intégration (n fois). Intégrons de o à t , nous obtenons une autre solution de l'équation (1) :

$$(5') \qquad y\,(t) = t^2 - 2t + 2 - 2e^{-t}$$

(en utilisant le développement en série de la fonction exponentielle).

La méthode conduit à des résultats différents selon les manipulations retenues et effectuées sur la même solution formelle.

L'opérateur différentiel p vérifie des relations algébriques comme :

$$p\,(c\,f) = c\,p\,f \qquad (\text{ c étant une constante})$$

$$p\,(f + g) = pf + pg$$

$$p^n\,(p^m f) = p^{n+m} f$$

ce qui rend le Calcul Opérationnel simple et utile pour résoudre de nombreux problèmes techniques (en physique et en ingénérie).

L'habilité et l'intuition de Heaviside empêchait cet ingénieur de s'égarrer dans ses calculs ; si quelqu'un lui demandait pourquoi son Calcul paraissait efficace, à défaut d'être justifié, il répondait : "Refuserais-je un bon repas pour la seule raison que je ne comprends pas tout à fait le processus de la digestion ?" Il n'en demeurait pas moins que le

Calcul Opérationnel était un outil d'ingénieur qui restait sans fondement mathématique.

A partir de 1910, Bromwich, Carson, Paul Lévy, Doetsch pensent à utiliser la "transformation de Laplace" (dans le domaine complexe) pour essayer de justifier les règles de Heaviside. Plaçons-nous dans un domaine réel ; f (t) désigne une fonction numérique d'une variable réelle définie pour les valeurs positives de t. On sait que la transformation de Laplace est définie par :

$$\varphi(p) = L\,[f\,(t)] = \int_0^\infty e^{-pt}\, f\,(t)\, d\,t$$

Nous avons l'identité formelle suivante :

$$p\,L\,[f\,(t)] = L\,[f'\,(t)] + f\,(+o) \tag{6}$$

obtenue en intégrant par parties $L\,[f'(t)]$ et en calculant la limite de $e^{-pt}\,f\,(t)$ lorsque t tend vers l'infini.

L'expression (6) présente la propriété opérationnelle de la transformation de Laplace L : l'image de la différentiation d'une fonction est ramenée à une multiplication algébrique sur la transformée de cette fonction, ce qui nous permet - et ceci était l'ambition de Heaviside - de remplacer l'opération de différentiation par un simple opérateur algébrique. En comparant cependant (6) à (o), on s'aperçoit que la transformation de Laplace ne réalise pas tout à fait le programme du Calcul Opérationnel puisque la correspondance établie est valide non pas entre la fonction et sa dérivée mais seulement sur l'espace des transformées de Laplace, avec en plus une constante correctrice. De plus, (6) n'est pas toujours valide. L'identité formelle (6) n'est pas correcte quand f (t) a des discontinuités Pour démontrer (6), il faut que la fonction f (t) soit continue, et d'ordre $e^{\alpha t}$ quand t tend vers l'infini. De plus, la dérivée f' (t) doit être continue par morceaux. Si ces conditions sont remplies, alors quand $p > \alpha$, la transformée $L\,[f'(t)]$ existe et (6) est valide.

La transformation de Laplace n'étant pas totalement adéquate, il a été proposé d'autres méthodes pour fonder exactement le Calcul Opérationnel. C'est J.Mikusinski qui en partant du produit de convolution :

$$(7) \qquad f * g = \int_0^t f(t-\tau)\ g(\tau)d\tau$$

arriva au Calcul Opérationnel par une voie algébrique directe. Ceci lui a permis de justifier les méthodes algébriques de ce Calcul et d'aboutir à une unicité de certaines solutions. Quelques défauts superficiels du produit de convolution ont pu être évités, en définissant, à la suite de M.Rajewski, la multiplication par (*) :

$$(8) \qquad f \cdot g = \frac{d}{dt} \int_0^t f(t-\tau)\ g\ (\tau)\ d\tau$$

En effet, plutôt que de prendre comme opérateur de base du Calcul l'opérateur de différentiation, on prend l'opérateur d'intégration, noté $\frac{1}{p}$, avec la définition suivante :

$$(9) \qquad \frac{1}{p}\ g\ (t) = \int_0^t g\ (\tau)\ d\tau$$

où $g(t)$ est une fonction continue pour t ne prenant jamais des valeurs négatives. L'opérateur $\frac{1}{p}$ transforme donc une fonction continue en son intégrale (de o à t) qui est aussi une fonction continue. Nous avons des propriétés de $\frac{1}{p}$ comme :

$$(10) \qquad \frac{1}{p^n}\ g(t) = \frac{1}{p}\ (\frac{1}{p^{n-1}}\ g(t))$$

et l'on peut montrer facilement que :

$$(11) \qquad \frac{1}{p^n}\ g(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{(t-\tau)^n}{n!}\ g(\tau)\ d\tau \qquad (n \geq 1)$$

En prenant $g(t) = 1$, nous obtenons :

$$\frac{1}{p^n} \cdot 1 = \frac{t^n}{n!}$$

En remplaçant la fonction $\frac{t^n}{n!}$ par la fonction $f(t)$, et en reportant dans (11), nous obtenons :

$$(12) \qquad f(t) \cdot g(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t f(t-\tau)\ g(\tau)\ dt$$

d'où le produit (8) qui est constitutif du Calcul Opérationnel.

(*) Voir L.Berg Introduction to the operational calculus, North-Holland, 1967.

Le Calcul Opérationnel utilise abondamment un autre "opérateur symbolique" qui permet de résoudre de très nombreux problèmes techniques et physiques. Introduisons la <u>fonction d'impulsion</u> défini ainsi :

(13) $$I(\varepsilon, t-t_o) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{pour } t_o < t < t_o + \varepsilon \\ o & \text{pour } t < t_o \text{ et } t > t_o + \varepsilon \end{cases}$$

Cette fonction présente une discontinuité en t_o puisque en $t_o - o$, elle est égale à o et, en $t_o + o$, elle est égale à $\frac{1}{\varepsilon}$. Remarquons que nous avons :

(13') $$\lim_{\varepsilon \to o} I(\varepsilon, t - t_o) = o$$

(13'') $$\lim_{\varepsilon \to o} \int_{-\infty}^{+\infty} I(\varepsilon, t - t_o)\, dt = 1$$

(13''') $$\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\varepsilon \to o} I(\varepsilon, t - t_o)\, dt = o \quad \text{d'après (13')}$$

Soit $f(t)$ une fonction définie pour tout t et <u>continue</u> sur un intervalle $t_o \leq t \leq t_o + k$. D'après le théorème de la moyenne, puisque $f(t)$ est continue, pour ε tel que $o < \varepsilon < k$, nous avons, avec $o < \theta < 1$:

(14) $$\int_{-\infty}^{+\infty} I(\varepsilon, t - t_o)\, f(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_o}^{t_o+\varepsilon} f(t)dt = f(t_o + \theta\varepsilon)$$

Nous en déduisons la propriété (dite du <u>tamis</u>) :

(15) $$\lim_{\varepsilon \to o} \int_{-\infty}^{+\infty} I(\varepsilon, t - t_o)\, f(t)dt = f(t_o) \quad (\varepsilon > o)$$

Par passage à la limite, $I(\varepsilon, t - t_o)$ sert à sélectionner une valeur $f(t_o)$. Introduisons un <u>opérateur symbolique</u> (ayant pour opérande, une fonction $f(t)$) et servant à sélectionner formellement une valeur déterminée prise par l'opérande. Nous <u>écrivons formellement</u> :

(16) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_o)\, f(t)\, dt = f(t_o)$$

En remplaçant $\delta\ (t - t_o)$ par $I\ (\varepsilon,\ t - t_o)$ "l'opérateur symbolique" est analogue à un opérateur d'intégration dont l'action sur son opérande $f(t)$ conduit à un résultat qui est approximativement $f(t_o)$ quand ε est petit.

Considérons $f(t) = 1$. Nous déduisons de (16):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\ t - t_o)\ dt = 1$$

qui se trouve être la forme symbolique de (14'').

De l'opérateur symbolique, on extraît un symbole de "fonction" appelée la "fonction" delta de Dirac qui possède en particulier la propriété d'être partout nulle sauf en $t = t_o$ où elle est infinie. On interprète $\delta\ (\ t - t_o)$ comme une "fonction d'impulsion" en t_o , elle se trouve être la "dérivée" de la fonction discontinue en t_o, dite "échelon-unité" $\Delta\ (\ t - t_o)$ et définie par

$$\Delta\ (\ t - t_o) = \begin{cases} o \text{ pour } & t < t_o \\ 1 \text{ pour } & t > t_o \end{cases}$$

La "fonction" $\delta(\ t - t_o)$ n'est cependant pas une fonction; ce n'est pas la limite de la fonction $I\ (\ \varepsilon,\ t - t_o)$ quand ε tend vers o puisque cette limite est une fonction qui est partout nulle, excepté en $t = t_o$ et dont l'intégrale est nulle (d'après (13''')). Quand ε est petit, $\delta\ (\ t - t_o)$ est remplaçable par la fonction $I\ (\ \varepsilon,\ t - t_o)$ qui approxime l'effet de $\delta\ (\ t - t_o)$. On sait que la "fonction" delta a été pensée comme une "fonction généralisée" par la théorie des distributions qui a réussi à donner une justification mathématique aux méthodes symboliques qui l'utilisaient. Le Calcul Opérationnel fondé sur le produit de convolution a pu cependant fournir une base mathématique à la "fonction" $\delta\ (\ t - t_o)$, sans pour cela faire appel à la théorie des distributions.

Pour conclure cet exemple, remarquons que l'autonomie donnée aux divers opérateurs du Calcul Opérationnel a permis de les traiter comme des êtres algébriques composables avec d'autres êtres. Cette autonomie permet de concevoir un langage indépendant dans lequel les calculs effectués restent indépendants de la signification mathématique première qui a été attribuée aux êtres manipulés. Le Calcul Opérationnel, outil d'ingénieur et de physicien, n'a été "justifié" que très récemment. Ceci rappelle l'analyse des infiniements petits de Leibniz que l'Analyse non standard(*) repense actuellement en proposant une justification aux calculs formels d'il y a deux siècles.

B. Les manuels mathématiques actuels présentent la notion d'opération à partir du concept de fonction défini par un graphe fonctionnel (donc par un ensemble de couples qui vérifient le schéma fonctionnel(**)) suivant en cela les <u>Eléments</u> de N.Bourbaki (***) ou encore en se plaçant d'emblée dans le cadre fondationnel de la théorie des ensembles de Zermelo - Fraenkel (****). Cependant, la présentation ensembliste ne fait pas toujours bien comprendre le fonctionnement opératoire mis en jeu par le processus de transformation (d'un objet en un autre) et ne permet pas d'abstraire un opérateur formel appréhendable à partir de différentes opérations (on se reportera aux exemples mathématiques de la partie A). Il n'est pas question de nous aventurer sur un terrain psycho-pédagogique mais nous voudrions mentionner que notre pratique enseignante des mathématiques nous a fourni l'occasion de remarquer que, très souvent, la présentation ensembliste du concept d'opération restait un obstacle parfois infranchissable(avec la notion - redoutable - de variable) tout particulièrement pour les étudiants en sciences humaines. En revanche, le langage des objets et des flèches s'avère beaucoup plus proche d'une intuition opératoire ancrée dans le substrat des sujets. Selon nous, le parti-pris ensembliste a une faible portée cognitive car l'acquisition et la construction des catégories linguistiques ou logiques ne s'effectuent certainement pas à la suite d'une conceptualisation extensionnelle mais fait plutôt appel à des mécanismes

---

(*) A.Robinson, <u>Non-standard Analysis</u>, Amsterdam, Noord-Hollandsche Vitgeversmij, 1968.

(**) f est une application de E dans F signifie que:

(i) $f \subset E \times F$; (ii) $\forall x\ [\ x \in E \Rightarrow \exists y\ [\ y \in F$ <u>et</u> $\langle x,y\rangle \in f]$

(iii) $\forall x\ \forall y\ \forall z\ \ [\langle x,y\rangle \in f$ <u>et</u> $\langle x,y'\rangle \in f \Rightarrow\ y = y']$. La règle (iii) constitue le schéma fonctionnel.

(***) <u>Théorie des ensembles</u>, Hermann, E.II.13

(****) J.L.Krivine : <u>Théorie axiomatique des ensembles</u> , P.U.F., 1969 (p.21) de nature intensionnelle que l'on ne sait pas encore très bien, du moins à notre connaissance, caractériser (*).

Il existe d'autres approches qui fondent l'édifice mathématique sans accorder une primauté absolue à la notion d'ensemble.

Une telle attitude est implicite dans l'article "le calcul fonctionnel" (de S. Pincherle, de Bologne) paru en 1912 dans l'Encyclopédie des sciences pures et appliquées (**) qui commence ainsi :

"Dans la théorie générale des opérations il se présente trois sortes d'éléments : les objets sur lesquels on opère, les opérations que l'on exécute sur ces objets, enfin les résultats que l'on obtient par l'exécution de ces opérations. Dans l'arithmétique particulière ou générale, les objets et les résultats sont des nombres et les opérations sont indiquées par des signes spéciaux; dans une théorie plus générale, on représente ordinairement les opérations par des lettres que l'on nomme symboles; la théorie des groupes de substitutions nous en fournit un exemple".

Ultérieurement, M.Schönfinkel et J. Von Neumann ont su concevoir des systèmes fondationnels cohérents où la notion d'application est primitive et la notion d'ensemble dérivée.

M. Schönfinkel (1924) (***) a proposé un symbolisme algébrique dans lequel toute opération est ramenée à une succession d'applications (de fonctions à un argument). La notion d'application est primitive dans le système; chaque application a pour domaine et co-domaine toutes les fonctions si bien qu'une fonction peut être argument d'une fonction, y compris d'elle-même (****). Ce symbolisme permet d'entrevoir un calcul "sans variables" (liées)

(*) D.Gallin Intensional and Higher-Order Modal Logic, North-Holland, 1975

(**) Tome II, vol. 5, Fasc. 1. Paris, Gauthier-Villars; Leipzig, B.G.Teubner, 1912.

(***) Voir "On the building blocks of mathematical logic" in Jean Von Heijenoort. From Frege to Gödel, A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931, Harvard University Press, 1971.

(****) C'est l'exigence de l'auto-applicabilité : f(f). On sait que l'auto-applicabilité n'engendre pas obligatoirement une contradiction (paradoxe de Russell). Il suffit de se reporter à l'analyse mathématique de ce paradoxe dans J.B.Rosser Logic for Mathematicians, Mc. Graw - Hill, 1952 (p.202) pour s'en convaincre.

et de ramener la notion de classe à une sorte spéciale de fonctions (ce sont les fonctions propositionnelles qui ont pour co-domaine les "valeurs de vérité", considérées comme des fonctions particulières). Schönfinkel renouait en cela (par-dessus B.Russell et les Principia Mathematica) avec une des grandes idées de G.Frege (*).

Le programme de Schönfinkel a été complètement réalisé (avec des limitations que l'on comprend mieux maintenant) par la logique combinatoire de H.B.Curry (**). Les axiomes de Zermelo-Fraenkel de la théorie des ensembles ont pu être formulés dans ce cadre logique: les notions de classe et d'ensemble sont définies à partir de la notion d'application d'une fonction (ou opérateur) à un argument (***).

Dans le même état d'esprit F.B.Fitch (****) dérive la relation " b est élément de la classe a" (ou encore: "l'élément b a l'attribut a") de l'application de a à l'objet b : la fonction a peut être interprêtée comme un attribut (une propriété) ou comme une classe. La notation "ab" désigne le résultat de l'application de a à b , d'où il résulte que la relation binaire d'attribution (de a à l'objet b) est constituée au moyen de l'opérateur (ou fonction) unaire a. Fitch engendre le système dit des Q-fonctions dont il a démontré la consistance et la non-contradiction (*****).

Quant à J. Von Neumann (1925), il s'appuie lui aussi sur les notions primitives d'application et de fonction pour proposer une axiomati-

---

(*) Begriffsschrift, a formula language, modeled upon that arithmetic, for pure thought" (1879) in J. van Heijenoort o.c.
Grundgesetze der Arithmetik (1893) (voir 1, 2, 3, 4) (The Basic Laws of Arithmetic, exposition of the system, University of California Press, 1967) Remarquons que pour G.Frege, la notion de prédicat est fondamentale et apparaît comme un cas particulier de la notion de fonction.

(**) H.B.Curry et alii, Combinatory Logic, t.1 et t.2, North Holland, 1958 et 1972.

(***) Edward J. Cogan, A formalization of the theory of sets from the point of view of combinatory logic (thesis, The Pennsylv. State Univ., 1955), Z.Math. Logik Grundlagen Math. 1, 1955.

(****) Elements of combinatory Logic, Yale Univ. Press, 1974

(*****) "The System CΔ of Combinatory Logic". Journal of Symbolic Logic,23,1958 que de la théorie des ensembles (*) qui s'inspire des idées fonctionnalistes de Frege. J.. Von Neumann distingue trois sortes d'objets: une première sorte, les arguments (primitifs); une seconde sorte, les fonctions caractéristiques des classes ; les objets de la troisième sorte sont à la fois des objets de la première sorte et de la seconde, ce sont les fonctions caractéristiques d'ensembles. Von Neumann axiomatise ainsi non pas directement la notion d'ensemble mais celle de "fonction" la seconde incluant la première et conduisant à un modèle beaucoup plus intuitif. Cette axiomatique se situe donc entre l'axiomatique de Zermelo-Fraenkel et celles qui sont issues de la logique combinatoire. On sait que la théorie de Von Neumann a été simplifiée, revue et étendue par R.M. Robinson (1937), Bernays (1937-54, 58) et Gödel (1940) pour être transformée en un système axiomatique d'ensemble, connu sous le nom de système de Von Neumann - Bernays - Gödel (**). C'est dans ce système que K.Gödel (1940) a produit son célèbre travail sur la non-contradiction de l'hypothèse généralisée du continu, reléguant dans l'oubli la toute première théorie de Von Neumann.

Les idées de Frege, Schönfinkel, Von Neumann font de <u>l'application</u> une notion primitive, que l'on désigne par : [,] (dans la notation de Von Neumann) ; c'est un <u>opérateur abstrait</u> qui, lorsqu'il agit, fait passer de la donnée de f (fonction ou opérateur) et de x (argument compatible avec f) à la valeur notée [f, x] (ou encore [fx] ; chez Schönfinkel : 'fx') qui représente "la valeur de la fonction f pour l'argument x". C'est cette opération particulière qui est appelée "application de f à x" ou "valuation de f pour x " (***). L'application ainsi définie, il devient possible de "fonctionnaliser" des objets tout à fait arbitraires d'où le nom d'"objet" ou de "chose" (Ding, chez Von Neumann) dégageant ainsi le caractère abstrait de l'application, les arguments tirant leurs interprétations de leurs places dans l'agencement formel. Si l'on écrit z = [x, y] pour signifier que l'objet est la valeur de l'ap-

---

(*) "Eine Axiomatisierung der Mengenlehre" traduit en anglais : "An axiomatization of set theory", <u>in</u> J. van Heijnoort, o.c.

(**) Voir V.Orman Quine : <u>Set Theory and its Logic</u>, Harvard Univers. Press, 1963 ; William S. Hatcher, <u>Foundations of Mathematics</u>, Saunders Company, 1968.

(***) Nous préférons présenter ceci par : $\dfrac{f \qquad\qquad x}{[f,\ x]}$ pour distinguer : opérateur (ou fonction) f , argument x et résultat de la valuation.

plication [,] aux deux objet x et y (*), l'objet x joue alors le rôle d'une fonction (ou d'un opérateur), y le rôle d'un argument pour x, et z le rôle du résultat obtenu par la valuation (**).

La recherche d'une certaine primauté de la notion de l'application (et de la fonction) sur celle d'ensemble est envisagée de nouveau aujourd'hui par la théorie des topoi (***) (de Lawvere et Tierney) et par les mathématiciens intuitionistes. De plus, les points de vue de Frege -Schönfinkel- Von Neumann semblent beaucoup plus pertinents pour fonder l'informatique par les mathématiques. Ainsi, l'emploi de l'opérateur applicatif de Backus (****) n'est autre que "l'application" [,] de Von Neumann . On connait également les méfaits de la notion de variable dans un programme ("effet de bord" par exemple) pour se rendre compte qu'une telle notion doit être repensée pour s'adapter aux réels besoins de l'informatique. Ce n'est pas un effet du hasard si l'on voit apparaître actuellement de nom-

---

(*)Ce point de vue est développé dans A. Chauvin Théorie des objets et théorie des ensembles, thèse de doct. d'état, Université de Clermont Ferrand,1974.

(**) Du point de vue d'une théorie fondationnelle de la linguistique, il est clair que les "notions primitives" ne sont catégorisées ni en "nom", ni en "prédicats" (d'où notre concept de "prédicable"). Il est possible d'utiliser ce cadre logique pour montrer comment techniquement on dérive par des opérations appropriées, d'un même prédicable abstrait tel objet ayant un fonctionnement prédicatif ou tel objet jouant un rôle d'argument dans la relation prédicative. Le schéma $\xi_1 = [\pi, \xi_0]$ peut être rapproché du concept technique de "schéma de lexis" $<\xi_0, \xi_1, \pi>$ du linguiste A. Culioli (qui se réfère aux recherche des Stoïciens et à la "lexis" réactualisés par le Dictionnaire de Lalande). Par ailleurs, on sait que S.K. Shaumyan dans sa "grammaire applicationnelle" utilise la logique combinatoire fondée sur l'opération primitive d'application [f,x], f étant un prédicat et x un objet argument, la valeur [f,x] étant soit un prédicat, soit une proposition selon l'arité du prédicat f.

(***) F.W.Lawvere (éditeur)Toposes, Algebraic Geometry and Logic,Lecture Notes in Mathematics 274, 1972.

(****)Voir John Backus : "Can programming be liberated from the Von Neumann style ? A functional Style and Its Algebra of Programs. Communications of the ACM, Aug,1978, Vol. 21, N° 8.

breux modèles sémantiques des langages de programmation qui utilisent abondamment la logique combinatoire. En effet, la notion d'ensemble n'est sans doute pas une "réalité informatique". De même, les fondements de la linguistique exigent des concepts non extensionnels ; la logique combinatoire semble être un instrument formel beaucoup plus approprié que la théorie des classes et cela en dépit des travaux de B.Russell et de ses continuateurs dans l'actuelle "théorie des actes de langage" de la philosophie (Austin, Searle, ... pour ne citer que ces auteurs).

C. La notion d'opérateur peut-elle être appréhendée à partir de la notion d'opération ? Pourquoi établir une telle distinction ? Quelles en sont les motivations ?

Nous allons proposer trois modes de définition de l'opération (*). Seul le dernier mode laissera apparaître la notion d'opérateur et nous verrons qu'un même opérateur se concrétise en diverses opérations qui dépendent des domaines, co-domaines et processus opératoires retenus. La présentation qui suit est non formelle et, de ce fait, elle sacrifie la rigueur au profit de l'intuition.

Premier mode de définition : les opérations sont définies de façon extrinsèque en liaison avec les objets sur lesquelles elles opèrent.

On utilise des noms pour désigner des objets sur lesquels on désire opérer. L'opération est désignée par un symbole opératoire mais la définition elle-même de l'opération est rapportée aux objets qui peuvent rester relativement indéterminés et être présentés sous forme de constantes, d'inconnues ou de variables.

Dans une opération concrète comme :

' $1 + 1$ ' ou '$\text{Log}_2\ 7$' ou ' $3 \times [1, 2, 4]$ '

on opère directement sur des objets (nombres, vecteurs,...) désignés par des symboles représentatifs insérés dans l'expression symbolique de l'opé-

(*) Nous avons utilisé les réflexions de J.Ladrière parues dans son article "Le symbolisme comme domaine opératoire" (1963) in L'articulation du sens, Aubier Montaigne, 1970.

ration qui, ainsi, peut être effectuée. Les symboles désignateurs d'objets ne sont que des présentations d'objets idéaux et ces modes de présentation sont une nécessité dès que l'on veut écrire et comprendre le fonctionnement de l'opération appréhendée à travers les objets représentés et non pensée "en soi" et pour elle-même.

L'expression symbolique qui désigne une opération à effectuer fait parfois intervenir des <u>êtres indéterminés</u> qui recevront une certaine détermination lorsque l'opération sera effectuée. Considérons par exemple l'équation :

$$c\,x - a\,b = o$$

Résoudre celle-ci, c'est, après réécriture, poser :

$$x = \frac{a\,b}{c}$$

où le membre de gauche de l'égalité conditionnelle est une <u>quantité inconnue</u> (désignée par le symbole x) que l'on <u>identifie</u> à une expression formelle (le membre de droite) qui désigne une opération à effectuer. Lever l'indétermination de x , c'est effectuer l'opération de façon à identifier x avec le résultat obtenu. La levée de l'indétermination (c'est-à-dire trouver une solution à l'équation) passe par l'effectuation d'une opération concrète où les objets sont parfaitement déterminés (ou déterminables).

Certaines expressions mathématiques font intervenir différentes sortes de symboles, notamment des symboles métalinguistiques (parenthèses, chevrons...), des symboles linguistiques comme des symboles opératoires et non-opératoires. Parmi ces derniers , il faut ranger les constantes ; certains symboles désignent de façon indéterminée des objets qui appartiennent en général à une classe déterminée. Ces derniers symboles sont appelés <u>variables</u>. Au sens où nous l'entendons ici, une variable est donc "le nom d'un objet quelconque d'une classe déterminée d'objets" (cette classe est appelée <u>domaine de la variable</u>). A l'occurrence d'une variable (dans l'expression symbolique d'une opération) on peut substituer un objet déterminé (ou déterminable) du domaine de la variable. Ayant substitué des objets déterminés à toutes les occurrences des variables, on obtient alors une opération concrète que l'on peut effectuer. L'algèbre abstraite utilise ce type d'opérations définies au moyen d'objets symboliques quelconques représentés par des variables, ce qui rend possible la formulation de propriétés générales de l'opération étudiée, indépendamment de tel ou tel objet particulier. Ainsi, la commutativité de l'addition des entiers naturels est exprimée à l'aide d'une quantification (universelle) d'une expression avec variables :

$$(1) \quad \forall x \, \forall y \; (x \in \mathbb{N} , y \in \mathbb{N}) : \; x + y = y + x$$

La proposition précédente fait intervenir : le symbole opératoire + ; des variables x et y (et leur domaine $\mathbb{N}$) ; des expresions dont on identifie les résultats ; une double quantification universelle. Pour que l'expression ait un sens, il faut qu'il y ait "accord" entre les quantificateurs $\forall x$ et $\forall y$ et les occurrences de x et y des variables (problème de liaison) , dans les sous-expressions qui représentent des opérations.

Une opération, même si elle est exprimée à l'aide de variables, n'en est pas moins rapportée, pour sa définition, à des objets déterminés ou indéterminés. Dans ce cas, on comprend pourquoi la notion d'opération peut être ramenée au concept de fonction définie par son graphe applicationnel. Si l'ensemble est non-fini , on utilise obligatoirement des variables pour exprimer l'opération La distinction opérateur / opération n'a pas à être explicitée. Dans certains contextes, l'emploi de ces termes est plutôt affaire de style. Dans certains cas cependant (voir nos exemples en A), l'usage tend à fixer des règles impératives (ainsi en algèbre linéaire, dans les équations aux dérivées partielles ...). Cependant, dans la plupart des cas on passe très facilement d'une notion à une autre. Ainsi, dans un groupe à opérateurs , on définit les <u>opérations externes</u> (au groupe G) par la donnée d'un ensemble Ω d'<u>opérateurs</u> et d'une application de Hom (Ω x G , G) . En vertu de l'exponentiation dans les ensembles, on a la bijection :

$$\mathrm{Hom}\ (\Omega \times G, G) \simeq \mathrm{Hom}\ (\Omega, \mathrm{Hom}\ (G, G))$$

entre les opérations externes et les applications qui font correspondre à tout opérateur de Ω une transformation de G en lui-même.

Deuxième mode de définition : les opérations sont étudiées "en soi" et définies par leurs mécanismes opératoires.

Il a été remarqué que la notation ' f(x)' était ambiguë puisqu'elle ne distingue pas la fonction elle-même de sa valeur. En outre, lorsque la fonction est une opération, la notion n'exprime pas nettement la différence qu'il y a entre l'expression formelle obtenue par un agencement de symboles opératoires et d'arguments d'une part, et le résultat obtenu après l'exécution de l'opération, d'autre part. D'un côté, on a un programme destiné à transformer des données, de l'autre côté, un résultat construit par le programme qui "tourne" sur des données spécifiées. Toute analyse linguistique d'une phrase montre qu'il y a des agencements de termes linguistiques (parfois transductés en agencements de termes formels d'un système de représentations métalinguistiques) et des significations déductibles des agencements apparus dans la phrase. Cette différence entre agencement et exécution est une façon de caractériser le syntaxique et le sémantique tout en montrant leur interdépendance.

La λ-notation de A.Church (*) cherche à saisir l'opération non plus par son graphe fonctionnel mais par son mécanisme opératoire dûment explicité. Un processus d'abstraction réitérable éventuellement extrait d'une expression formelle le mécanisme opératoire qu'elle exprime: si F (x) est une expression formelle où x présente des occurrences , alors la λ-notation :

$$(\lambda x \;.\; F (x))$$

(*) The Calculi of Lambda - Conversion , Princeton Univers. Press, 1941

La λ-notation est déjà embryonnaire chez G.Frege (Grundgesetze der Arithmetik). Ceci apparaît, chez lui, sous la forme :

$$\grave{\varepsilon} (\ldots \grave{\varepsilon} \ldots)$$

ce qui, en λ-notation, devient:

$$\lambda x (\ldots x \ldots)$$

à condition toutefois de restreindre le λ-calcul à être un calcul de classes (d'après le principe d'abstraction de Frege). Ainsi :

$$\grave{\varepsilon} (\varepsilon + 7)$$

est un nom qui désigne une classe contenant les couples < 0, 7 >, < 1, 8 >, < 2, 9 > ..., c'est-à-dire, en utilisant la notation plus classique de Russell (en termes de classes) :

$$\hat{y} \hat{x} (y = \ldots x \ldots)$$

la classe des couples <x, y> où y est la valeur de la fonction $\lambda\xi.(\xi + 7)$ pour l'argument x .

exprime le mécanisme opératoire de F (x) tel que si on substitue à chaque occurrence de x dans F (x) une valeur déterminée a , on obtient alors une expression opératoire qui peut être exécutée, dans certains cas.

Le mécanisme opératoire et la substitution permettent de se rapprocher d'une opération concrète exécutable.

Le cas échéant, deux λ-expressions vont se différencier par leurs 'histoires constitutives' respectives ; ainsi, les λ-expressions :

$$(\lambda y . (\lambda x . x + y)) \quad \text{et} \quad (\lambda x . (\lambda y . x + y))$$

représentent deux opérations distinctes.

La λ-notation participe à la désambiguïsation complète de la notation classique puisque l'on sait exprimer par des écritures différentes :

1°) le mécanisme opératoire représenté par une λ-expression ;

2°) l'argument sur lequel opère l'opération ;

3°) l'expression formelle obtenue en agençant une λ-expression avec son argument (qui dans certains cas pourra être une λ-expression);

4°) le résultat obtenu après exécution de l'opération.

Il faut cependant préciser le processus de substitution préalable à toute exécution et introduire une règle de réduction, ce qu'accomplit la théorie du λ-calcul de Church qui, en partant d'atomes, construit par récurrence toutes les λ-expressions au moyen de l'opération formelle d'agencement par juxtaposition (de λ-expressions) et du processus d'abstraction. Nous avons alors :

A et D étant deux λ-expressions, la λ-expression

(2) $((\lambda x . A) D)$

désigne l'opération à effectuer où :

$\lambda x . A$ représente le mécanisme opératoire ;

D désigne l'argument de l'opération.

Le processus de substitution (que nous ne détaillerons pas) consiste à remplacer chaque occurrence de x dans la sous-expression A de la λ-expression λx . A (moyennant certaines contraintes et précautions) par une autre λ-expression D . L'expression :

(3) $[\, D \,/\, x \,]\, A$

désigne le résultat de ce remplacement, quand il est licite. Si cette dernière expression ne contient plus de variables alors $[\, B \,/\, x \,]\, A$ désigne une opération concrète et de ce fait exécutable.

Introduisons la λ- β- réduction de Curry comme une relation entre "l'opération à effectuer" (ou redex) et l'expression qui représente "l'opération effectuable" (ou contractum) :

(4) $((\, \lambda x \,.\, A \,)\, D \,) \rhd [\, D \,/\, x \,]\, A.$

La λ-notation et la λ- β- réduction nous permettent maintenant de noter différemment : le mécanisme opératoire, l'opération à effectuer obtenue par un agencement formel (par juxtaposition) et l'opération effectuable (mettant en jeu le processus de substitution).

Ainsi, si f (x) est une fonction numérique dont le mécanisme opératoire est parfaitement déterminé (par exemple, $\lambda x \,.\, x^2$) on peut alors poser, pour un argument a donné :

(5) $((\, \lambda x \,.\, f\,(x))\; a \,) \rhd [\, a \,/\, x \,]\, f\,(x) \equiv f\,(a)$

Remarquons qu'un mécanisme opératoire représenté par une λ-expression est défini en faisant appel à des variables qui indiquent des places dans le schéma opératoire où l'on peut insérer des objets pour tenter de se ramener à une opération concrète. Les variables utilisées sont des variables formelles (au sens de H.B.Curry) qui n'ont pas le même statut qu'en algèbre abstraite. Ces variables sont libres ou liées selon qu'elles ne tombent pas ou tombent sous la portée du processus d'abstraction puisque λx établit un lien entre toutes les occurrences de la variable x dans la λ-expression qui se trouve sous la portée de l'abstracteur. La définition de l'opération saisie par la λ-notation reste encore, de ce fait, partiellement extrinsèque puisque l'écriture même fait intervenir les "places d'objets". Il n'est donc pas pensable d'en extraire un opérateur qui serait défini intrinsèquement par ses seules propriétés formelles où n'interviendraient pas les données ou les places de ces données. En effet, dès que domaines et co-domaines sont précisés, opérateur et opération apparaissent dans une relation duale : à chaque opération représentée par une λ- expression, est associée biunivoquement un opérateur qui, réciproquement, se concrétise immédiatement dans l'opération qui lui est associée.

Troisième mode de définition : les opérations sont définies intrinsèquement indépendamment des objets sur lesquels elles opèrent.

Dans ce mode de définition, nous avons une véritable caractésation intrinsèque qui ne fait pas référence aux objets ce qui permet d'appréhender l'opération dans toutes ses latitudes combinatoires avec les autres opérations.

Le point de vue de "l'opératoire pur" évoque immédiatement la logique combinatoire où les combinateurs sont des opérateurs abstraits définis uniquement par leurs propriétés formelles et non par leurs interprétations. Certains combinateurs sont définis par voie axiomatique, les autres sont définis explicitement en fonction de ceux-là. Ainsi, on peut prendre pour combinateurs de base $\underline{I}$, $\underline{K}$, $\underline{S}$, et on exprime ensuite $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{W}$, $\underline{\Phi}$ en fonction des premiers (*) . Toutes les expressions combinatoires sont construites par récurrence à partir d'atomes (les combinateurs de base sont des atomes ; d'autres atomes peuvent être des variables formelles et un certain membre de fonctions élémentaires).

La plupart des combinateurs (expression combinatoire où n'apparaissent que des combinateurs de base ou des combinateurs exprimables en combinateurs de base) ont une "représentation abstractive" exprimée sous forme d'une λ-expression (**). Un combinateur peut être considéré comme un opérateur dont l'action sur une expression combinatoire consiste à construire une autre expression combinatoire (par réduction).

(*) Par exemple, $\underline{W} = \underline{SS}\,(\,\underline{KI}\,)$

(**) Par exemple : $\underline{I} = \lambda x\,.\,x$; $\underline{B} = \lambda xyz\,.\,x(yz)$

$\underline{K} = \lambda xy\,.\,x$; $\underline{W} = \lambda xy\,.\,xyy$

$\underline{S} = \lambda xyz\,.\,xz\,(\,yz\,)$

L'action d'un combinateur sur une expression combinatoire quelconque est régie par un schéma de réduction. Ainsi, pour le combinateur I , nous avons (*) :

(6) $\underline{I}\ A \rhd A$

L'interprétation "classique" de la "logique combinatoire pure" consiste à considérer chaque expression combinatoire comme un opérateur auquel on associe biunivoquement une opération dont le domaine et le co-domaine sont l'ensemble de toutes les expressions combinatoires. Ainsi, si A et D sont deux expressions combinatoires, alors (A D) est une expression combinatoire où l'on interprète A comme un opérateur, D comme une opérande, (A D) comme l'expression formelle obtenue en agençant opérateur et opérande (**). Lorsque les atomes (constantes ou variables) sont interprétés comme des fonctions unaires composables entre elles sans restrictions et ayant pour domaine et co-domaines toutes les fonctions unaires (***) on montre que toute expression combinatoire est aussi interprétable comme une fonction dont l'action sur ses arguments conduit, par réduction, à la valeur de la fonction pour ses arguments. Les schémas de réduction s'interprètent comme des schémas de relation entre un redex (une opération à effectuer consistant à faire agir le combinateur ou la fonction) et le contractum (qui se trouve être le résultat de l'opération à effectuer) (****)

Une propriété d'une fonction est exprimable en logique combinatoire de façon intrinsèque. Considérons par exemple l'expression combinatoire suivante :

(*) De même : $\underline{S}\ A\ D\ E \rhd A\ E\ (D\ E)$; $\underline{B}\ A\ D\ E \rhd A\ (D\ E)$

(**) L'expression combinatoire (A D) signifie que l'on "applique" A (l'opérateur) à son opérande D . En effet, l'opération "d'application" est une opération primitive en logique combinatoire. C'est une opération binaire.

(***) Ce sont les Q-fonctions de F.B.Fitch, Elements of Combinatory Logic

(****) Signalons une interprétation informatique de la logique combinatoire J.E.Stoy Denatotional Semantics (the Scott-Strachey Approach to Programming Langage theory), the MIT press, 1977.

(7) $\qquad$ f x y

où x et y sont des variables et où f est une fonction binaire (*). Dire que cette fonction est commutattive, c'est écrire une réduction en faisant intervenir le combinateur $\underline{C}$ ("permutateur élémentaire") :

(8) $\qquad \underline{C}\ f\ x\ y \geq f\ y\ x$

Asserter la commutativité de f , c'est identifier deux expressions combinatoires :

(9) $\qquad \boxed{\underline{C}\ f\ =\ f}$

de façon que leurs actions sur les mêmes données conduisent aux mêmes résultats, c'est-à-dire que l'on a l'implication :

(10) $\qquad (\underline{C}\ f = f) \Rightarrow (\underline{C}\ f\ x\ y = f\ x\ y)$

Les actions de $\underline{C}$ f et de f sur un même couple < x, y > de données conduisent aux résultats respectifs qui sont identifiés :

$$\underline{C}\ f\ x\ y \geq f\ y\ x \geq f^{\bullet}(\ y,\ x\ )$$

$$f\ x\ y \geq f^{\bullet}(\ x,\ y\ )$$

en vertu de (8) et en désignant par f•(u, v) le résultat de l'action de la fonction f sur u et v, ce résultat étant une réduction de l'expression combinatoire f u v. Telle est la signification de la relation entre les deux expressions combinatoires de (9). Cette relation exprime la commutativité de f, "sans faire intervenir de variables" ; aussi dirons-nous que cette relation est intrinsèque (on comparera cette relation à la proposition qui exprimait tout à l'heure la commutativité de l'addition dans les entiers).

Pouvons-nous exprimer toutes les propriétés d'opération dans le cadre de la logique combinatoire ? Comment procéder, par exemple, pour exprimer l'associativité d'une opération ? On y arriverait très probable-

(*) L'expression, d'après son histoire constitutive, devrait s'écrire plus justement : (f x) y. Toute fonction binaire est ramenée à une succession de fonctions unaires.

ment à écrire cette propriété par des moyens purement intrinsèques bien que les agencements symboliques auxquels on arriverait dans ce système logique, n'auraient guère de prise sur l'intuition. C'est là une des difficultés (reconnues) de la logique combinatoire qui reste, dans de nombreux cas, très éloignée de nos habitudes de concevoir et d'organiser nos écritures algébriques et logiques.

La question se pose alors de savoir si l'on peut construire un formalisme algébrique qui serait utilisé pour formuler les propriétés intrinsèques des opérateurs par des écritures plus naturelles et plus proches de nos habitudes.

Nous n'aborderons pas dans cet article ce sujet (*) qui sera traité dans une autre publication.

Pour conclure, nous aimerions évoquer un problème que les pages précédentes soulèvent : la distinction opérateur /opération et son corrélat "l'indépendance" s'inscrivent dans une interrogation plus vaste qui touche à la nature mathématique et cognitive du "logico-algébrique". En effet, ce terme est employé de plus en plus dans les Sciences Humaines et dans leurs épistémologies. Or, il n'est pas évident que les deux univers concernés, le logique et l'algèbrique, fassent appel aux même processus opératoires. En effet, nous avons été amenés (**) à proposer des techniques et formalismes algébriques qui séparent nettement l'espace des opérateurs de celui des opérations et des données. Ces formalismes sont hérités des travaux de F.W.Lawvere (***) et de J. Benabou (****). Toutefois, les techniques que nous avons proposées sont plus effectives que les caractérisations catégoriques de Lawvere et Benabou. Le formalisme algébrique mis en place

---

(*) Voir J.P. Descles : Opérateur/opération : Méthodes intrinsèques en informatique fondamentale. Applications aux bases de données et à la linguistique , thése d'état en Mathématiques, Université René Descartes, 1980.

(**) Ibidem

(***) Fonctional Semantics of Algebraic Theories, Proc. Nat. Acad. Sci. , USA 50, 1963.

(****)Structures Algébriques dans les catégories, Cahiers de Topologie et Géométrie diférentielle, Vol X, 1, 1968.
Les T-algèbres sont utilisées actuellement dans les études fondatrices de l'informatique, sur ce sujet voir par exemple la série des rapports ADJ de Cog en, Thatcher, Wagner et Wright : I.B.M. Research Reports 1976-1981.

s'avère être d'un niveau analogue à celui de la logique combinatoire du moins en ce qui concerne son caractère opératoire (troisième niveau dans l'article qui précède) : les opérations sont définies intrinsèquement, indépendamment des objets manipulés. Il existe quelques procédures de traduction entre le formalisme algébrique et la logique combinatoire. Mais, pourtant, certains concepts spécifiquement "logiques" comme le combinateur paradoxal Y de Curry, qui intervient dans la formulation du point fixe (*) ne se traduit pas de façon naturelle, du moins à notre connaissance , dans les formalismes algébriques; de même, une notion aussi simple que celle de l'associativité d'un opérateur s'exprime en logique combinatoire par des expressions qui s'éloignent considérablement de la connaissance intuitive et pratique que nous en avons. D'où la question : y a-t-il des concepts logiques et des concepts algébriques qui se laisseraient appréhender par des processus opératoires spécifiques ?
Cette question sera approfondie dans un article ultérieur.

(*)H.B. Curry : Combinatory Logic I, o.c.p.178.
On sait que le point fixe intervient dans l'analyse sémantique des langages de programmation (cf. J.E Stoy : Denotational Semantics, o.c.).
Le combinateur paradoxal Y de Curry a été mis en évidence par ce dernier lorsqu'il a soumis à l'analyse "logique" le fameux paradoxe de Russell. Cette analyse et l'analyse de la substitution ont été les motivations originelles de la logique combinatoire.