

B. LECOUTRE

**Extensions de l'analyse de la variance : l'analyse  
bayésienne des comparaisons**

*Mathématiques et sciences humaines*, tome 75 (1981), p. 49-69

[http://www.numdam.org/item?id=MSH\\_1981\\_\\_75\\_\\_49\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSH_1981__75__49_0)

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

EXTENSIONS DE L'ANALYSE DE LA VARIANCE :  
L'ANALYSE BAYESIENNE DES COMPARAISONS

B. LECOUTRE \*

AVANT-PROPOS

Sur le plan conceptuel les méthodes d'inférence bayésienne semblent susciter depuis quelques années un intérêt croissant, comme en témoigne notamment une série d'articles récemment parus dans la *Revue de Statistique Appliquée*.\*\*

Par ailleurs les difficultés techniques ne peuvent aujourd'hui que s'estomper grâce au progrès des instruments informatiques.

Il semble donc désormais, non seulement souhaitable, mais possible, d'envisager l'utilisation de méthodes d'inférence bayésiennes dans les situations les plus usuelles de traitement de données, même dans les situations qui, par leur structure complexe de recueil des données, relèvent traditionnellement de l'analyse de la variance.

On sait que nous avons entrepris de refondre l'ensemble des méthodes d'analyse statistique des données expérimentales et en particulier d'analyse de la variance, à partir d'une formalisation algébrique, linéaire et ensembliste.

Cet article et le prochain (Lecoutre et Rouanet [12]) appartiennent aux prolongements bayésiens de cette entreprise. Ces prolongements sont rendus praticables grâce aux deux idées suivantes : 1) la formalisation algébrique permet de dégager un certain nombre de structures qui interviennent à titre de composants de la plupart des plans usuels ; 2) l'idée d'inférence spécifique permet, à l'intérieur de chaque situation d'appliquer les procédures bayésiennes standard pour les structures qui interviennent dans cette situation.

---

\* Laboratoire de Psychologie (ERA 235), Université Paris-VIII et Groupe Mathématiques et Psychologie, Université René Descartes.

\*\* notamment les articles suivants : dans le vol.26 (1978), G. Morlat ; A. Vessereau ; dans le vol.27 (1979), J. Ringler ; dans le vol.28 (1980), M. Dumas ; A. Vessereau ; dans le vol. 29 (1981), G. Brunshwig.

Le premier article fournit une présentation d'ensemble de la thèse de B. Lecoutre [8], consacrée aux extensions bayésiennes de l'analyse de la variance. Le second article est consacré plus spécialement à deux structures qui interviennent constamment en analyse de la variance, univariée et multivariée.

H. ROUANET \*

## 1. INTRODUCTION

*L'analyse de la variance*, dans ses formulations classiques (Fisher [4] et [5]; Scheffé [22]), apporte indéniablement un certain nombre de réponses aux problèmes posés par l'analyse des données expérimentales, en particulier par la prise en compte explicite du plan d'expérience et par sa visée inductive. Cependant, dès que l'on cherche à approfondir l'approche traditionnelle, un certain nombre de difficultés surgissent : d'abord la panoplie des plans d'analyse ressemble à un véritable dédale, dans lequel on ne chemine qu'au prix de complications extrêmes ; ensuite l'exposé des procédures, s'appuyant sur l'utilisation du calcul matriciel, masque très souvent les structures mathématiques sous-jacentes ; enfin, en ce qui concerne plus particulièrement la portée de la méthode, les développements, soit se limitent à la conception traditionnelle des tests de signification, soit, dans le cadre bayésien, apparaissent d'une complexité assez rebutante dès qu'il s'agit de dépasser les cas les plus élémentaires (comparaison de deux moyennes).

A l'examen, le remède à ces difficultés apparaît résider dans le recours explicite à la *formalisation algébrique*, absent des formulations classiques, qui permet de dégager et d'explicitier les structures mathématiques fondamentales, et, en conséquence, de réduire d'une manière considérable la diversité des cas. Si, à la formalisation abstraite, on ajoute un principe essentiel, le principe d'*inférence spécifique*, on parvient tout simplement au résultat que les solutions vont pouvoir être *calquées* sur les solutions du problème de l'inférence sur une moyenne, sous le modèle normal. Cette nouvelle approche de l'analyse de la variance conduit à ce que nous appelons *l'analyse bayésienne des comparaisons*.

1) La *formalisation algébrique, linéaire et ensembliste*, issue des travaux théoriques de Rouanet et Lépine (cf. [19] pour une introduction d'ensemble) constitue la clef de l'analyse bayésienne des comparaisons : on formalise et on généralise ainsi toutes les notions fondamentales de l'analyse de la variance : contraste, comparaison, somme-des-carrés, facteur, plan ... Nous ferons en 2. un bref rappel de cette formalisation.

---

\*Groupe Mathématiques et Psychologie, Université René Descartes

2) Les notions d'*inférence spécifique* et, en découlant, de *structure statistique spécifique*, que nous présenterons en 3., fournissent un principe essentiel pour l'inférence. La notion d'inférence spécifique est à opposer à l'idée d'effectuer une inférence simultanée sur tous les paramètres d'un modèle général, relatif à un corps de données considéré comme une même "unité expérimentale" : même lorsque une telle inférence simultanée est techniquement envisageable, elle apparaît souvent largement arbitraire, dès lors qu'il faut, premièrement expliciter un modèle général pour un plan un tant soit peu complexe - nous pensons plus particulièrement ici au fameux "*General Linear Model*" souvent posé au début des analyses - et, deuxièmement, dans le cadre bayésien, choisir une distribution initiale relative à tous les paramètres de ce modèle.

Au contraire, une inférence spécifique, pour chaque comparaison à analyser, aura souvent un caractère raisonnable dans les situations courantes d'analyse de données, ceci d'autant plus qu'elle reposera sur une structure statistique spécifique, elle-même obtenue sous un *modèle spécifique*, mettant en jeu un petit nombre de paramètres, et beaucoup plus réaliste qu'un modèle général.

3) Nous proposerons pour l'analyse des comparaisons des procédures bayésiennes "standard", en ce sens qu'elles constituent des solutions de rechange directes aux tests de signification, dans tous les cas où ceux-ci sont insuffisants et/ou ne conduisent pas à des solutions techniques satisfaisantes. Nous résumerons en 4., 5. et 6. les solutions standard ainsi obtenues pour l'analyse de données numériques *univariées*, suivant une large classe de plans d'analyse.

Nous accorderons un intérêt tout particulier aux procédures *fiducio-bayésiennes*, qui peuvent être obtenues, soit directement à la fois dans le cadre bayésien *non-informatif*, introduit par Jeffreys (notamment Jeffreys [7]), et dans le cadre *fiduciaire* (notamment Fisher [4] et [6]), soit encore comme limite de procédures bayésiennes *au sens strict*, ce qui leur confère le statut de distributions de référence (cf. Lecoutre et Rouanet [12]). Ces procédures présentent un grand intérêt, puisqu'elles constituent une extension directe du test de signification (qui est lui-même une inférence spécifique) et qu'on peut les regarder comme exprimant l'information apportée par les données, en écartant toute information étrangère à ces données (on sait que ces procédures ont été conçues pour chercher à exprimer un état initial d'ignorance vis-à-vis des paramètres).

Nous proposerons également des procédures *bayésiennes (au sens strict)*, dans lesquelles la distribution initiale ("a priori") sera une distribution du même type que la distribution fiducio-bayésienne (distribution *conjuguée*) ; la distribution finale ("a posteriori") sera encore une distribution du même type.

En pratique, il sera éclairant de regarder cette contrainte sur le choix de la distribution initiale comme l'expression du fait que cette distribution représente une information équivalente à celle qui serait apportée par une certaine expérience (avec comme cas particulier une expérience antérieure). Enfin, étant donné le petit nombre de paramètres intervenant dans l'inférence spécifique, il sera toujours envisageable, dans un cas particulier, de "traiter" une distribution initiale *quelconque* sur ces paramètres.

L'analyse bayésienne des comparaisons sera illustrée en 7. par un exemple à valeur générale.

## 2. RAPPEL DES FONDEMENTS ALGÈBRIQUES

### 2.1. Structures linéaires

La notion formalisée de *comparaison*, qui est au centre de la formalisation linéaire (Rouanet et Lépine [18]), peut être regardée comme une extension de la notion classique de *source de variation*.

Il suffira ici de rappeler, qu'étant donné un *protocole numérique* (ici une *variable numérique*) de support fini  $J$ , on définit : un *contraste* sur  $J$  comme une mesure sur  $J$  de masse totale nulle ; une *comparaison* sur  $J$  comme un sous-espace de contrastes dans l'espace vectoriel des mesures, la dimension de ce sous-espace étant appelée le *nombre de degrés de liberté* de la comparaison.

Le support  $J$  étant muni d'une pondération  $(n_j)_{j \in J}$ , appelée *mesure fondamentale* sur  $J$ , l'espace des protocoles (ou variables) sur  $J$  et l'espace (dual) des mesures sur  $J$  se correspondent par l'isomorphisme qui, à une mesure donnée  $(u_j)_{j \in J}$ , associe sa densité par rapport à la mesure fondamentale, c'est-à-dire la variable  $(u^j)_{j \in J}$  où  $u^j = \frac{u_j}{n_j}$ .

L'espace des protocoles de support  $J$  est muni du produit scalaire canoniquement associé à la mesure fondamentale, c'est-à-dire le produit scalaire qui, à tout couple  $(x^j)_{j \in J}$  et  $(y^j)_{j \in J}$  associe le scalaire  $\sum_{j \in J} n_j x^j y^j$ .

On définit alors la *somme-des-carrés* (ou *inertie*) d'un protocole associée à une comparaison comme le carré de la norme de la projection sur l'image de cette comparaison par l'isomorphisme précédent. Le *carré-moyen* est le rapport de la somme des carrés au nombre de degrés de liberté de la comparaison.

## 2.2. Structures ensemblistes

La formalisation ensembliste conduit à des définitions rigoureuses des notions de *facteur* et de *plan*, que nous utiliserons ici sans les rappeler (cf. Lépine [13] et [14]).

Nous appellerons *plan d'analyse* un *plan du protocole à analyser* défini comme le composé d'une famille de *facteurs élémentaires*, pour lequel chacun des facteurs élémentaires a été caractérisé (distinction méthodologique) : soit comme un *facteur de groupe* (qui, dans la probabilisation, deviendra un *facteur aléatoire*), c'est-à-dire un facteur dont les modalités seront toujours traitées de façon symétrique (cf. Rouanet et Lépine [17]) ; soit comme un *facteur systématique*, c'est-à-dire un facteur aux modalités spécifiques duquel on s'intéresse en principe.

Nous envisagerons une large classe de plans d'analyse, incluant des *plans à un facteur de groupe* et des *plans à deux facteurs de groupe*.

(1) Les plans à un facteur de groupe, sont, dans le langage formalisé utilisé, des plans du type  $\underline{A} \langle G \rangle * T$  (on lira "A, facteur de groupe, emboîté dans G croisé avec T"), avec comme cas particuliers des plans  $\underline{A} \langle G \rangle$  et  $\underline{A} * T$ . Un exemple typique d'un tel plan est, en psychologie, le cas où A est un facteur (de groupe) *Sujets*, G un facteur systématique *Groupes* et T un facteur systématique *Traitements*, G et T pouvant être chacun les composés (quelconques) de plusieurs facteurs élémentaires ; pour chaque sujet a, affecté s'il y a lieu au groupe g, on a une observation pour chaque (s'il y a lieu) traitement t. Le type de plans  $\underline{A} \langle G \rangle$  correspond ainsi à la structure dite des "groupes indépendants" et le type de plans  $\underline{A} * T$  à la structure dite des "groupes appareillés", le type de plans  $\underline{A} \langle G \rangle * T$  combinant ces deux structures.

(2) Les plans à deux facteurs de groupe sont des plans du type  $\underline{B} \langle \underline{A} \langle G \rangle * T \rangle$  ("B, facteur de groupe, emboîté dans  $\underline{A} \langle G \rangle * T$ ", où  $\underline{A} \langle G \rangle * T$  se lit comme précédemment), avec comme cas particuliers des plans  $\underline{B} \langle \underline{A} \langle G \rangle \rangle$  et  $\underline{B} \langle \underline{A} * T \rangle$ . Un exemple typique est le cas où, pour chaque sujet a (affecté s'il y a lieu au groupe g) on dispose de plusieurs observations pour chaque (s'il y a lieu) traitement t, d'où l'introduction d'un second facteur de groupe B, *Répétitions*.

## 3. L'ANALYSE SPECIFIQUE D'UN CONTRASTE D'UNE COMPARAISON

### 3.1. Caractérisation numérique de l'effet associé à un contraste, à une comparaison

L'effet peut être défini au niveau descriptif - nous parlerons de *l'effet observé* - ou au niveau inductif - nous parlerons ici de *l'effet théorique*, mais nous pourrions encore dire, suivant les situations, *effet vrai*, *effet parent* ou

effet dans la population. La caractérisation numérique de l'effet observé se fera à partir des moyennes observées, et celle de l'effet théorique à partir de moyennes, elles-mêmes qualifiées de théoriques, qui seront des paramètres du modèle d'échantillonnage.

Formellement, nous distinguerons le cas de l'effet associé à un contraste et le cas de l'effet associé à une comparaison (à  $m$  degrés de liberté).

1) Dans le premier cas, la caractérisation numérique de l'effet est assez naturelle : c'est par exemple une différence de moyennes, une différence de différences de moyennes, la pente d'une droite de régression, etc. Formellement l'effet observé associé à un contraste (ou, simplement, l'effet observé du contraste) sur un support  $J$  est défini comme  $d = \sum_{j \in J} c_j x^j$ , où les  $c_j$  sont les coefficients du contraste et les  $x^j$  les moyennes observées associées à chaque modalité  $j$ . De même l'effet théorique associé au contraste (l'effet théorique du contraste) est défini comme  $\delta = \sum_{j \in J} c_j \mu^j$  où les  $\mu^j$  sont cette fois des paramètres (moyennes théoriques) associées à chaque modalité  $j$ .

2) Dans le second cas, la caractérisation numérique de l'effet associé à une comparaison à plusieurs degrés de liberté n'est qu'un résumé de cet effet ; c'est pourquoi nous parlerons dans ce cas d'indicateur de l'importance de l'effet, ou simplement d'importance de l'effet. Formellement, nous définissons l'importance de l'effet associé à une comparaison  $C$ , définie sur un support  $J$ , comme une quantité de la forme  $l^2 = b sc_C$  (ou encore sa racine carrée), où  $b$  est une constante dépendant des effectifs que l'on choisira de sorte que  $l$  puisse être regardé comme homogène à l'effet (en valeur absolue) d'un contraste, et  $sc_C$  est la somme-des-carrés associée à la comparaison  $C$ , calculée à partir des moyennes observées  $x^j$ . L'importance de l'effet théorique,  $\lambda^2$  (ou sa racine carrée), est définie de la même manière, à partir cette fois des paramètres  $\mu^j$ .

Si nous nous donnons une base (orthogonale) de la comparaison  $C$ , représentée par une matrice  $C$  telle que  $C'N_J^{-1}C = b I_m$ , où  $N_J$  est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les éléments  $n_j$  de la mesure fondamentale sur  $J$  ; en notant  $x^J$  et  $\mu^J$  respectivement les vecteurs colonnes des  $x^j$  et des  $\mu^j$ , nous pouvons alors définir  $d = C'x^J$  et  $\delta = C'\mu^J$  ( $d$  et  $\delta$  peuvent être considérés comme des "représentants" multinumériques de l'effet à  $m$  degrés de liberté) et nous avons alors les formules :

$$l^2 = d'd \quad \text{et} \quad \lambda^2 = \delta'\delta$$

qui sont déduites de la formule matricielle de la somme-des-carrés :

$$sc_C = x^{J'} C (C' N_J^{-1} C)^{-1} C' x^J \quad (\text{id. avec } \mu^J)$$

### 3.2. La notion d'inférence spécifique

L'analyse bayésienne d'une comparaison consistera en une inférence spécifique sur le paramètre numérique,  $\delta$  ou  $\lambda^2$  caractérisant l'effet théorique. Cette inférence sera calquée sur le cas classique de l'inférence sur une moyenne sous le modèle normal. Or on sait que dans ce cas les solutions bayésiennes classiques (cf. Lindley [15]), comme d'ailleurs le test de signification, peuvent être directement déduites des distributions d'échantillonnage de la moyenne et de la variance-correctée : ces deux distributions sont indépendantes, la première étant une distribution normale, qui dépend de la moyenne et de la variance théoriques, la seconde étant une distribution du khi-deux, qui dépend seulement de la variance théorique. Nous rencontrons là la notion de *structure statistique spécifique "normale-khi-deux"*.

Les solutions pour l'inférence sur une moyenne s'appliquent immédiatement au cas de l'inférence sur l'effet d'un contraste ( $\delta$ ), dès lors que l'on a posé pour cette inférence la structure statistique spécifique "normale-khi-deux", la moyenne étant remplacée par la statistique "effet observé",  $d$ , et la variance-correctée par une certaine statistique  $s^2$ , homogène à une variance-correctée ou encore à un carré-moyen (1).

L'extension au cas de l'inférence sur l'importance de l'effet d'une comparaison ( $\lambda^2$ ) sera obtenue en posant la structure statistique spécifique "*multinormale-khi-deux*", la statistique numérique  $d$  étant remplacée par la statistique multinumérique  $d$  telle que nous l'avons définie en 3.1. (2). En ce qui concerne les développements formels, le cas précédent pourra donc être traité comme un cas particulier de celui-ci (avec  $m=1$ ) ; mais le paramètre numérique principal est  $\delta$  dans le premier cas et  $\lambda^2$  dans le second, ce qui, au plan conceptuel, correspond à des problèmes différents.

---

(1) Le problème du "calibrage" de  $s^2$  (et du paramètre correspondant  $\sigma^2$ ) n'est pas directement pertinent pour l'inférence sur le paramètre principal  $\delta$  ou  $\lambda^2$  et nous nous limiterons ici à prendre la statistique  $s^2$  égale à un carré-moyen. Pour des cas où l'inférence recherchée porte également sur  $\sigma^2$  ou encore sur le rapport  $\frac{\delta}{\sigma}$ , et où ce problème est abordé, voir Lecoutre [9] et [10].

(2) Un certain nombre de résultats (tests de signification et procédures fiducio-bayésiennes) peuvent, comme nous l'avons fait dans [8], être obtenus directement à partir de la structure statistique dérivée "*khi-deux non-centré - khi-deux*", relative aux distributions d'échantillonnage des statistiques  $\chi^2$  et  $s^2$ .



Les solutions précédentes s'appliqueront aux plans à un facteur de groupe. En ce qui concerne les plans à deux facteurs de groupe, la variance théorique a deux composantes additives, et il conviendra alors de poser la structure statistique spécifique "*multinormale* (avec le cas particulier *normale*)- *khi-deux* - *khi-deux*", obtenue en définissant une statistique supplémentaire,  $u^2$ , dont la distribution d'échantillonnage, indépendante des précédentes, est une distribution du khi-deux qui dépend seulement de l'une des composantes de la variance théorique. L'inférence est ainsi calquée sur le problème de l'inférence sur une moyenne, pour un plan  $\underline{B} < \underline{A} >$  (cf, dans le cadre bayésien non-informatif, les "*random effect models*" de Box et Tiao [1]).

### 3.3. Vers des solutions effectives

La mise en oeuvre du principe d'inférence spécifique dans le cadre de la formalisation algébrique permet de réduire à un très petit nombre les solutions générales (c'est-à-dire exprimées à partir de  $s^2$  et éventuellement  $u^2$ ) pour l'analyse bayésienne des comparaisons. Ces solutions générales seront présentées en 4..

Nous nous limiterons ici aux résultats concernant le paramètre numérique principal,  $\delta$  ou  $\lambda^2$ , c'est-à-dire portant sur la distribution marginale relative à ce paramètre ; on trouvera dans un prochain article une étude détaillée de la structure statistique "*multinormale - khi-deux*" (Lecoutre et Rouanet [12]), qui, pour les plans à un facteur de groupe, fournira des résultats complets (distributions conjointes, conditionnelles, concernant des paramètres dérivés).

Nous énoncerons en 5. les solutions particulières, c'est-à-dire le choix des statistiques  $s^2$  et éventuellement  $u^2$ , en fonction du plan d'analyse (à un ou à deux facteurs de groupe), en distinguant trois grands types de comparaisons. Dans chaque cas seront proposées différentes solutions, pouvant être regardées comme "plus ou moins spécifiques".

Enfin, nous donnerons en 6. la justification des solutions précédentes, en fournissant pour chaque solution particulière un modèle conduisant à cette solution. Ce modèle sera un *modèle spécifique*, dans la mesure où il est seulement spécifié au niveau d'un protocole dérivé : dans la démarche de l'analyse du contraste ou de la comparaison, c'est le protocole qui est jugé pertinent et qui constitue les données de base pour l'inférence spécifique. Le lien avec les méthodes classiques est assuré par le fait que ce modèle, au niveau du protocole dérivé considéré, est l'un des modèles de base usuels, normal ou multinormal.

## 4. SOLUTIONS GENERALES

4.1. Plans  $\underline{A} < G > * T$ 

Nous poserons pour ces plans la structure statistique spécifique "multinormale - khi-deux" :

$$\begin{aligned} d \perp s^2 / \delta, \sigma^2 \\ d / \delta, \sigma^2 \sim N_m(\delta, b \sigma^2 \mathbf{I}_m) \\ s^2 / \delta, \sigma^2 \sim \sigma^2 \frac{\chi_q^2}{q} \end{aligned}$$

Test de signification . On définit la statistique de test  $F = \frac{\lambda^2}{mbs^2}$

ou encore, lorsque  $m = 1$ ,  $t = \frac{d}{\sqrt{bs}}$  :

sous  $H_0$ ,  $\delta = 0$ ,  $F \sim F_{m,q}$  (distribution usuelle du F à m et q degrés de liberté)

ou lorsque  $m = 1$ ,  $t \sim t_q$  (distribution usuelle du t de Student à q degrés de liberté)

Nous désignerons par  $F_{obs}$  la valeur prise par la statistique F (lorsque  $m = 1$ , on a encore  $t_{obs}^2 = F_{obs}$ ).

Procédures fiducio-bayésiennes. On obtient les distributions fiducio-bayésiennes (que nous marquons d'un astérisque) :

. pour l'effet d'un contraste ( $m=1$ )

$\delta^* / d, s^2 \sim t_q(d, bs^2)$  distribution du t généralisé à q degrés de liberté (cf. annexe)

ce que l'on peut encore écrire

$\delta^* / d, s^2 \sim t_q(d, \frac{d^2}{F_{obs}})$  si  $d \neq 0$

. pour l'importance de l'effet de comparaison (m quelconque)

$\lambda^{2*} / d, s^2 \sim bs^2 \psi_{m,q}^2 \left( \frac{1^2}{bs^2} \right)$  distribution du psi-deux à m et q degrés de liberté (cf. annexe)

ce que l'on peut encore écrire

$\lambda^{2*} / d, s^2 \sim \frac{1^2}{mF_{obs}} \psi_{m,q}^2 (mF_{obs})$  si  $1^2 \neq 0$

Procédures bayésiennes "standard". Si on choisit pour  $(\delta, \sigma^2)$  une distribution initiale de la même forme que la distribution fiducio-bayésienne, caractérisée

par  $d_o, b_o, s_o^2$  et  $q_o$ , la distribution finale est encore du même type ; on l'obtient en remplaçant dans les expressions donnant les distributions fiducio-bayésiennes :

$$d \text{ par } d_1 = \frac{b_o d + b d_o}{b_o + b} \quad \text{ou} \quad l^2 \text{ par } l_1^2 = \left( \frac{b_o d + b d_o}{b_o + b} \right)^2 \quad \left( \frac{b_o d + b d_o}{b_o + b} \right)$$

$$b \text{ par } b_1 = \frac{b_o b}{b_o + b}$$

$$s^2 \text{ par } s_1^2 = \frac{q_o s_o^2 + q s^2 + \frac{(d_o - d)^2}{b_o + b}}{q_o + q + m}$$

$$q \text{ par } q_1 = q_o + q + m$$

#### 4.2. Plans $B < A < G > * T >$

Nous poserons pour ces plans la structure statistique spécifique "multinormale - khi-deux - khi-deux, avec contrainte" :

$$\begin{aligned} \underline{d} / \delta, \sigma^2, \eta^2 & \sim N_m(\delta, b\sigma^2 \mathbf{I}_m) \\ s^2 / \delta, \sigma^2, \eta^2 & \sim \sigma^2 \frac{\chi_q^2}{q} \\ u^2 / \delta, \sigma^2, \eta^2 & \sim \eta^2 \frac{\chi_p^2}{p} \end{aligned}$$

$$\text{contrainte} = \sigma^2 \geq \eta^2$$

Le principe suivi est de dériver d'abord les distributions finales, compte non-tenu de la contrainte (on utilise les résultats de la structure "multinormale - khi-deux", puis de "réviser" ces distributions en introduisant la contrainte  $\sigma^2 \geq \eta^2$  (cf. Lecoutre [8]).

Procédures fiducio-bayésiennes. On obtient les distributions fiducio-bayésiennes, données par leur densité :

. pour l'effet d'un contraste ( $m=1$ )

$$f^*(\delta/d, s^2, u^2) = \frac{1}{P(F_{q,p} < \frac{s^2}{u^2})} \int_0^1 f\left(\left[b \frac{pu^2 + qs^2 w}{(p+q)w}\right]^{\frac{1}{2}} t_{p+q} = \delta-d\right) f\left(\frac{u^2}{s^2} F_{q,p} = w\right) dw$$

. pour l'importance de l'effet d'une comparaison (m quelconque)

$$f^* (\lambda^2/d, s^2, u^2) = \frac{1}{P(F_{q,p} < \frac{s^2}{u^2})} \int_0^1 f(b \frac{pu^2+qs^2w}{(p+q)w} \psi_{m,p+q}^2 (\frac{l^2(p+q)w}{b(pu^2+qs^2)w}) = \lambda^2) \\ f(\frac{u^2}{s^2} F_{q,p} = w) dw$$

où  $t_{p+q}$ ,  $F_{q,p}$  et  $\psi_{m,p+q}^2$  désignent des variables de distributions respectives  $t_{p+q}$ ,  $F_{q,p}$  et  $\psi_{m,p+q}^2$ .

Procédures bayésiennes "standard" . Si on choisit pour  $(\delta, \sigma^2, \eta^2)$  une distribution initiale de la même forme que la distribution fiducio-bayésienne, caractérisée par  $d_0, b_0, s_0^2, q_0, u_0^2$  et  $p_0$ , la distribution finale est encore du même type ; on l'obtient en remplaçant dans les expressions donnant les distributions fiducio-bayésiennes :

$d$  ou  $l^2$ ,  $b$ ,  $s^2$ ,  $q$  par  $d_1$  ou  $l_1$ ,  $b_1$ ,  $s_1^2$ ,  $q_1$  définis précédemment pour les plans A <G>\*T

$$u^2 \text{ par } u_1^2 = \frac{p_0 u_0^2 + p u^2}{p_0 + p}$$

$$p \text{ par } p_1 = p_0 + p$$

## 5. SOLUTIONS PARTICULIERES

Nous envisageons les solutions particulières concernant trois types de comparaisons, ou de contrastes (dans ce cas la typologie se réfère à la comparaison engendrée par le contraste) :

- . comparaisons du type V/T1, comparaison sur G conditionnelle à une partie T1 de T (éventuellement la partie pleine ; nous désignerons par G1 le support<sup>(3)</sup> de la comparaison  $V(G1 \subset G)$  ;
- . comparaisons du type W/G1, comparaison sur T conditionnelle à une partie G1 de G (éventuellement la partie pleine) ; nous désignerons par T1 le support de la comparaison  $W(T1 \subset T)$  ;
- . comparaison du type V.W, comparaison d'interaction entre une comparaison V sur G et une comparaison W sur T ; nous désignerons par G1 et T1 les supports respectifs des comparaisons V et W ( $G1 \subset G$  et  $T1 \subset T$ ).

Dans chaque cas différentes solutions sont envisageables ; elles sont résumées ci-après.

(3)"Support de la comparaison" : sous-ensemble des éléments g de G pour lesquels il existe des contrastes dont le coefficient  $c_g$  est non nul.

## 5.1. Plans $\underline{A} \langle G \rangle * T$

### 5.1.1. Comparaisons $V/T1$

$s^2 = cm_{A(\tilde{G})/T1}$ , où  $G1 \subset \tilde{G} \subset G$ , carré-moyen associé à la comparaison "A à l'intérieur de  $\tilde{G}$  conditionnelle à T1"

$q = \sum_{g \in \tilde{G}} (n_g - 1)$ , où  $n_g$  est "l'effectif du groupe g" (nombre de modalités de A affectées à g)

et, dans le cas de l'effet d'un contraste :

$$b = \sum_{g \in G} \frac{v_g^2}{n_g \text{ card}(T1)}, \text{ carré de la norme du contraste.}$$

(Dans le cas de l'importance d'une comparaison, b est déterminé par la définition de  $1^2$ ).

### 5.1.2. Comparaisons $W/G1$ et $V.W$

$s^2 = cm_{A(\tilde{G}).C}$ , où  $G1 \subset \tilde{G} \subset G$  et C est une comparaison sur T dont W est une sous-comparaison, carré-moyen associé à la comparaison d'interaction entre la comparaison "A à l'intérieur de  $\tilde{G}$ " et la comparaison C.

$q = \sum_{g \in \tilde{G}} (n_g - 1) dl(C)$ , où  $dl(C)$  désigne le nombre de degrés de liberté de la comparaison C

et, dans le cas de l'effet d'un contraste :

$$b = \sum_{t \in T} \frac{w_t^2}{\sum_{g \in G1} n_g}, \text{ carré de la norme du contraste pour un contraste engendrant une comparaison } W/G1$$

$$b = \sum_{gt \in G \times T} \frac{v_g^2 w_t^2}{n_g}, \text{ carré de la norme du contraste pour un contraste engendrant une comparaison } V.W .$$

## 5.2. Plans $\underline{B} \langle \underline{A} \rangle * T$

### 5.2.1. Comparaisons $V/T1$

$s^2 = cm_{A(G1)/T1}$  et  $q = \sum_{g \in G1} (n_g - 1)$

$u^2 = cm_{B(A \langle \tilde{G} \rangle * \tilde{T})}$ , où  $G1 \times T1 \subset \tilde{G} \times \tilde{T} \subset G \times T$ , carré-moyen associé à la comparaison "B à l'intérieur de  $A \langle \tilde{G} \rangle * \tilde{T}$ "

$p = \sum_{t \in \tilde{T}} (k_t - 1) \sum_{g \in \tilde{G}} n_g$ , où  $k_t$  est le nombre de modalités de B affectées au traitement t (et supposé le même pour tous les a affectés à un groupe  $g \in \tilde{G}$ )

et, dans le cas de l'effet d'un contraste

$$b = \sum_{g \in G} \frac{v_g^2}{n_g \sum_{t \in T} k_t} , \quad \text{carré de la norme du contraste;}$$

### 5.2.2. Comparaisons W/G1 ou V.W

$$s^2 = cm_{A(G1).W} \quad \text{et } q = m \sum_{g \in G1} (n_g - 1)$$

$u^2$  et  $p$  sont définis comme pour le cas V/T1

et, dans le cas de l'effet d'un contraste

$$b = \sum_{t \in T} \frac{w_t^2}{k_t \sum_{g \in G1} n_g} , \quad \text{carré de la norme pour un contraste engendrant une comparaison W/G1}$$

$$b = \sum_{gt \in G \times T} \frac{v_g^2 w_t^2}{n_g k_t} , \quad \text{carré de la norme pour un contraste engendrant une comparaison V.W}$$

## 6. MODELES

Pour chacune des comparaisons particulières envisagées ci-dessus, nous indiquons un modèle spécifique conduisant à cette solution.

Pour les plans à un facteur de groupe,  $\underline{A} \langle G \rangle * T$ , nous supposons l'existence de tous les moments d'ordre 1 et 2 : moyennes théoriques  $\mu^{gt}$  ( $gt \in G \times T$ ) et covariances théoriques  $\sigma^{gt't''}$  ( $gt't'' \in G \times T \times T$ )<sup>(4)</sup>, paramètres de base à partir desquels seront définis les paramètres du modèle spécifique d'échantillonnage.

Pour les plans à deux facteurs de groupe,  $\underline{B} \langle \underline{A} \langle G \rangle * T \rangle$ , le modèle sera décomposé :

- . en un modèle d'échantillonnage, qui prend en compte le statut de facteur de groupe de B, A étant à ce niveau traité comme un facteur systématique ; sont ainsi introduits des *paramètres "individuels"* (relatifs à chaque a), en particulier les moyennes théoriques  $\mu^{a \langle g \rangle t}$  ;
- . en un *modèle de population* qui portera sur les paramètres individuels, les modalités a étant considérées comme des "individus" extraits d'une certaine population ; il s'agira de spécifier la distribution des paramètres individuels dans la population ; sont ainsi introduits des *paramètres de population* (sur lesquels portera l'inférence).

---

4. Nous nous limiterons ici à la situation usuelle où on suppose que l'emboîtement du facteur de groupe entraîne l'indépendance des observations "entre les groupes" (et par suite la nullité des covariances). On pourrait aisément étendre les résultats à des cas de non-indépendance, en particulier en supposant un modèle markovien.

### 6.1. Plans $A \langle G \rangle * T$

#### 6.1.1. Comparaisons $V/T1$

La solution  $s^2 = cm_{A(\tilde{G})/T1}$  est obtenue en posant le modèle spécifique d'échantillonnage, que nous notons  $M_{\tilde{G}/T1}$ , caractérisé de la manière suivante :

. On définit le protocole dérivé qui, à chaque modalité  $a$ , affectée à  $g \in \tilde{G}$ , associe la moyenne sur  $t \in T1$  des valeurs observées  $x^{a \langle g \rangle t}$ , soit :

$$a \mapsto x^{a \langle g \rangle / T1} = \frac{1}{\text{card}(T1)} \sum_{t \in T1} x^{a \langle g \rangle t}$$

. On pose pour ce protocole dérivé le modèle équinormal usuel des "groupes indépendants":

$$(i) \perp\!\!\!\perp (x^{a \langle g \rangle / T1})_{a \langle g \rangle \in A \langle \tilde{G} \rangle} / \pi \quad (5)$$

$$(ii) x^{a \langle g \rangle / T1} / \pi \sim N(\mu^{g/T1}, \frac{1}{\text{card}(T1)} \sigma^2) \quad a \langle g \rangle \in A \langle \tilde{G} \rangle .$$

On remarquera que le terme  $\frac{1}{\text{card}(T1)}$  permet de tenir compte de la pondération introduite sur  $A$  par la dérivation effectuée.

Par ailleurs les paramètres du modèle peuvent être définis à partir des paramètres de base comme :

$$\begin{aligned} \mu^{g/T1} &= \frac{1}{\text{card}(T1)} \sum_{t \in T1} \mu^{gt} \\ \sigma^2 &= \frac{1}{\text{card}(T1)} \sum_{t' t'' \in T1 \times T1} \sigma^{gt' t''} \end{aligned}$$

$\sigma^2$  est donc supposé ne pas dépendre de  $g$ , pour  $g \in \tilde{G}$  : le modèle introduit donc une *condition d'homogénéité* (qui dépend du choix de  $\tilde{G}$ ).

#### 6.1.2. Comparaisons $W/G1$ et $V.W$

La solution  $s^2 = cm_{A(\tilde{G}).C}$  est obtenue en posant le modèle spécifique d'échantillonnage, que nous notons  $M_{\tilde{G}-C}$ , caractérisé de la manière suivante :

.  $C$  étant une matrice représentant la comparaison  $C$ , telle que  $C'C = I_m$ , on définit le protocole (multinumérique) dérivé qui, à chaque modalité  $a$ , affectée à  $g \in \tilde{G}$ , associe le vecteur  $y^{a \langle g \rangle} = C'x^{a \langle g \rangle t}$ , où  $x^{a \langle g \rangle t}$  est le vecteur des valeurs observées  $x^{a \langle g \rangle t}$ ,  $t$  parcourant  $T$  :

$$a \mapsto y^{a \langle g \rangle} = C'x^{a \langle g \rangle t}$$

(5)  $\pi$  peut être considéré comme représentant l'ensemble des paramètres d'un modèle général dont le modèle spécifique serait dérivé.

. On pose pour ce protocole dérivé le modèle multinormal :

$$(i) \perp\!\!\!\perp (y^{a\langle g \rangle})_{a\langle g \rangle \in A\langle \tilde{G} \rangle} / \pi$$

$$(ii) y^{a\langle g \rangle} / \pi \sim N_{dl(C)}(\mathbf{C}'\boldsymbol{\mu}^{gT}, \sigma^2 \mathbf{I}_{dl(C)}) \quad a\langle g \rangle \in A\langle \tilde{G} \rangle$$

où  $\boldsymbol{\mu}^{gT}$  est le vecteur colonne des moyennes  $\mu^{gt}$ ,  $t$  parcourant  $T$ .

Le paramètre  $\sigma^2$  peut être défini à partir des matrices de variances et covariances  $\boldsymbol{\Sigma}^g$  (pour chaque  $g$ , matrice des  $\sigma^{gt't''}$ ) :  $\sigma^2 \mathbf{I}_{dl(C)} = \mathbf{C}'\boldsymbol{\Sigma}^g \mathbf{C}$ .

Pour  $g \in \tilde{G}$ ,  $\mathbf{C}'\boldsymbol{\Sigma}^g \mathbf{C}$  est donc proportionnelle à  $\mathbf{I}_{dl(C)}$  et ne dépend pas de  $g$ .

Le modèle introduit donc deux conditions, une condition de circularité

(cf. Rouanet et Lépine [16]) -  $\mathbf{C}'\boldsymbol{\Sigma}^g \mathbf{C} = \sigma^2 \mathbf{I}_{dl(C)}$  - et une condition

d'homogénéité - il y a égalité des  $\sigma^2_g$  pour tous les  $g \in \tilde{G}$ . La condition de

circularité dépend du choix de la comparaison  $C$ , mais pas de la matrice  $\mathbf{C}$

particulière représentant cette comparaison ; elle dépend également du choix de  $\tilde{G}$  ; elle est trivialement satisfaite si  $dl(C) = 1$ . La condition d'homogénéité dépend du choix de  $\tilde{G}$ .

## 6.2. Plans $\underline{B}\langle \underline{A}\langle G \rangle * T \rangle$

### 6.2.1. Modèles d'échantillonnage

La solution  $u^2 = cm_{B(A\langle \tilde{G} \rangle * \tilde{T})}$  est obtenue en posant le modèle spécifique d'échantillonnage, que nous notons  $ME_{\tilde{G} \times \tilde{T}}$ , caractérisé de la manière suivante :

. On considère le sous-protocole, obtenu par restriction à  $\tilde{G} \times \tilde{T}$   $\underline{B}\langle \underline{A}\langle \tilde{G} \rangle * \tilde{T} \rangle$  ( $A$  étant traité comme facteur systématique).

. On pose pour ce sous-protocole le modèle équinormal usuel des "groupes indépendants" :

$$(i) \perp\!\!\!\perp (x^{b\langle a\langle g \rangle t \rangle})_{b\langle a\langle g \rangle t \rangle \in B\langle \underline{A}\langle \tilde{G} \rangle * \tilde{T} \rangle} / \pi$$

$$(ii) x^{b\langle a\langle g \rangle t \rangle} / \pi \sim N(\mu^{a\langle g \rangle t}, \eta^2) \quad gt \in \tilde{G} \times \tilde{T}$$

### 6.2.2. Modèles de population

Les modèles de la population sont la transposition des modèles d'échantillonnage des plans  $\underline{A}\langle G \rangle * T$ .

Comparaisons  $V/T1$  . On définit les paramètres individuels

$$\mu^{a\langle g \rangle / T1} = \frac{1}{\sum_{t \in T1} k_t} \sum_{t \in T1} k_t \mu^{a\langle g \rangle t} : \text{moyennes sur } T1 \text{ des moyennes théoriques}$$

individuelles pour chaque traitement.

C'est sur les variables  $\mu^{a\langle g \rangle / T1}$  qu'on pose le modèle de population, transposition du modèle équinormal usuel des "groupes indépendants" :



$$(i) \quad \mu \left( \mu^{a\langle g \rangle / T1} \right)_{a\langle g \rangle \in A\langle G1 \rangle} / \pi$$

$$(ii) \quad \mu^{a\langle g \rangle / T1} / \pi \sim N \left( \hat{\mu}^{g/T1}, \tau^2 \right) \quad a\langle g \rangle \in A\langle G1 \rangle$$

La condition d'homogénéité introduite par le modèle porte cette fois sur les covariances des variables "moyennes théoriques individuelles"  $\mu^{a\langle g \rangle t}$  ( $gt \in G1 \times T1$ ) dans la population.

On remarquera que c'est à partir des paramètres de population  $\hat{\mu}^{g/T1}$  qu'est défini le paramètre  $\delta$  ; quant à  $\sigma^2$ , il est défini à partir de l'égalité  $\sigma^2 = \eta^2 + k \tau^2$ , où  $k = \sum_{t \in T1} k_t$ .

Comparaison W/G1 ou V.W  $W$  étant une matrice représentant la comparaison  $W$  telle que  $W'W = I_m$ , on définit les paramètres individuels  $v^{a\langle g \rangle} = W' \mu^{a\langle g \rangle}$ , où  $\mu^{a\langle g \rangle T}$  est le vecteur des moyennes individuelles  $\mu^{a\langle g \rangle t}$ ,  $t$  parcourant  $T$ .

C'est sur les variables  $v^{a\langle g \rangle}$  qu'on pose le modèle de population, multinormal :

$$(i) \quad \mu \left( v^{a\langle g \rangle} \right)_{a\langle g \rangle \in A\langle G1 \rangle} / \pi$$

$$(ii) \quad v^{a\langle g \rangle} / \pi \sim N_m \left( \hat{v}^g, \tau^2 I_m \right)$$

Les conditions de circularité et d'homogénéité introduites dans le modèle portent cette fois sur les covariances des variables "moyennes théoriques individuelles" dans la population.

C'est à partir des paramètres de population  $\hat{v}^g$  qu'est défini le paramètre  $\delta$ . Comme dans le cas précédent,  $\sigma^2$  est défini à partir de l'égalité  $\sigma^2 = \eta^2 + k \tau^2$ , où :

$$k = 1 / \sum_{t \in T1} \frac{w_t^2}{k_t} \quad \text{dans le cas } dl(W) = 1, \text{ le contraste } (w_t)_{t \in T} \text{ étant choisi tel que } \sum_{t \in T} w_t = 1 ;$$

$$k = k_t \quad \text{dans le cas } dl(W) > 1, \text{ les effectifs } k_t \text{ étant alors supposés égaux pour } t \in T1.$$

## 7. EXEMPLE NUMERIQUE

Dans la préparation d'un produit chimique, cinq méthodes ont été utilisées : la méthode habituelle et quatre nouvelles méthodes ; pour chaque méthode, on dispose de la mesure des impuretés contenues dans le produit pour six échantillons, mesure exprimée dans une unité arbitraire.

Méthode :	<u>1*</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>
	43	33	10	44	37
	41	2	24	29	21
	54	31	40	31	35
	57	23	37	44	30
	48	41	24	45	28
	63	27	30	28	47
Moyenne	51.0	26.2	27.5	36.8	33.0

Dans cet exemple de données empruntées à Lindley [15], nous avons donc cinq groupes indépendants (un par méthode) de six observations chacun, soit un plan d'analyse  $A_6 < G_5 >$ .

Le plan d'expérience suggère de comparer, d'une part la méthode habituelle à l'ensemble des quatre nouvelles méthodes, d'autre part les quatre nouvelles méthodes entre elles. Dans le premier cas, nous chercherons à faire une inférence sur le paramètre  $\delta = \mu^1 - (\mu^2 + \mu^3 + \mu^4 + \mu^5)/4$ , qui est la différence entre la moyenne pour la méthode habituelle et la moyenne globale pour les quatre nouvelles méthodes ; en d'autres termes  $\delta$  est l'effet théorique associé au contraste entre les moyennes  $\mu^g$ , de coefficients  $+1, -1/4, -1/4, -1/4, -1/4$ . Dans le second cas, comparaison globale des quatre nouvelles méthodes, nous chercherons à faire une inférence sur le paramètre  $\lambda$ , défini comme la moyenne quadratique des six différences entre les groupes pris deux à deux, soit

$$\lambda = \left( \sum_{g'=2}^5 \sum_{g''=3}^5 (\mu^{g'} - \mu^{g''})^2 / 6 \right)^{1/2}$$

en d'autres termes ce paramètre  $\lambda$  traduit l'importance de l'effet associé à la comparaison des quatre nouvelles méthodes, comparaison à trois degrés de liberté.

Le premier cas illustre le problème général de l'inférence sur l'effet associé à un contraste entre moyennes. Définissons les statistiques  $d = m^1 - (m^2 + m^3 + m^4 + m^5)/4$ , effet observé du contraste, et  $s^2$ , carré-moyen intra-groupe. Ici  $d = 20.1$  et  $s^2 = 102.7 = 10.1^2$ . Nous pouvons appliquer les procédures définies précédemment, avec  $b = \frac{1}{6}(1 + \frac{4}{16}) = 5/24$  et  $q = 25$ . On trouve alors

$$t_{\text{obs}} = \frac{20.1}{\sqrt{5/24 \times 10.1}} = 4.35 \quad (\text{significatif au seuil } 0.0005).$$

La distribution fiducio-bayésienne pour  $\delta$  est de la forme  $t_{25}(20.1, \frac{5}{24} 102.7)$  ; elle est reproduite dans la figure 1.

---

\* Méthode habituelle

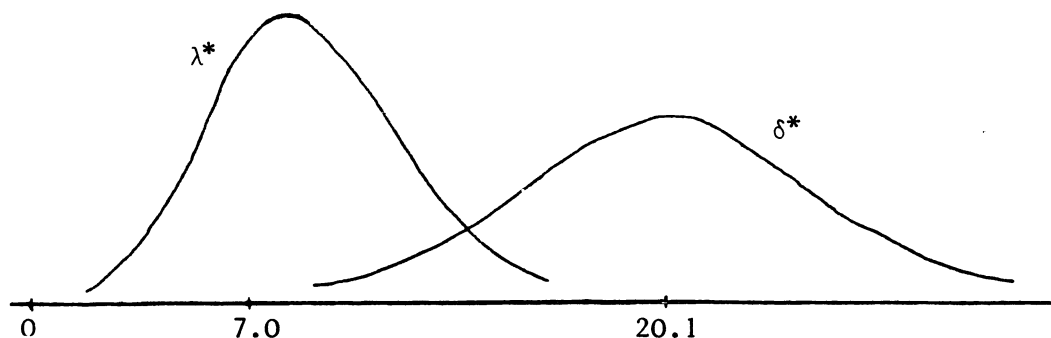


Figure 1. Distributions fiducio-bayésiennes marginales relatives aux paramètres  $\lambda$  et  $\delta$ .

Le second cas illustre le problème général de l'inférence sur l'importance de l'effet associé à une comparaison. Définissons les statistiques  $l$ , moyenne quadratique des six différences observées entre les groupes pris deux à deux (dans cet exemple  $l^2$  est égal au neuvième de la somme-des-carrés associée à la comparaison considérée) et  $s^2$  (le carré-moyen intra-groupe précédent). Ici  $l^2 = 49.11$  et  $s^2 = 102.7$ . Nous pouvons appliquer les procédures définies précédemment, avec  $b = 1/9$ ,  $m = 3$  et  $q = 25$ . On trouve alors  $F_{\text{obs}} = \frac{49.11}{3 \times \frac{1}{9} \times 102.7} = 1.43$

(non significatif,  $p > 0.25$ ). La distribution fiducio-bayésienne pour  $\lambda^2$  est de la forme  $\frac{1}{9} \times 102.7 \psi_{3,25}^2 \left( \frac{49.11}{\frac{1}{9} \times 102.7} \right)$ ; on en déduit la distribution relative à  $\lambda$  reproduite dans la figure 1.

A partir de ces analyses, nous pouvons raisonnablement conclure qu'il existe une différence importante entre la méthode habituelle et l'ensemble des nouvelles méthodes, tandis que ces quatre dernières méthodes diffèrent entre elles de façon moins importante.

Il serait bien entendu très facile de considérer une distribution initiale différente et de voir dans quelle mesure la conclusion précédente serait modifiée.

On trouvera d'autres exemples d'applications numériques concrètes, avec une discussion des implications méthodologiques de ces méthodes dans Lecoutre et Lecoutre [11], Lecoutre [8] et [9], Rouanet, Lépine, Holender [20], Rouanet, Lépine, Pelnard-Considère [21].

## 8. ANNEXES

8.1. Distribution du t généralisé multidimensionnel

La distribution du t multidimensionnel est classique en statistique bayésienne depuis Cornish [2], Dunnett et Sobel [3] ; on peut en donner la caractérisation suivante :

si  $\mathbf{x}/y \sim N_p(\mathbf{a}, \frac{1}{y} \mathbf{B})$  et  $y \sim \frac{\chi_q^2}{q}$ , alors  $\mathbf{x} \sim \mathbf{t}_{p,q}(\mathbf{a}, \mathbf{B})$ , t p-dimensionnel à q degrés de liberté, de centre  $\mathbf{a}$  et de matrice d'échelle  $\mathbf{B}$ .

Dans le cas particulier  $p=1$ , on obtient la distribution du t généralisé (unidimensionnel) qui intervient dans l'étude de l'effet associé à un contraste.

8.2. Distribution du psi-deux

La distribution du psi-deux a été introduite dans l'étude de l'effet associé à une comparaison. Nous en donnerons la définition suivante :

si  $x/y \sim \frac{\chi_p^2(ay)}{y}$  et  $y \sim \frac{\chi_q^2}{q}$ , alors nous dirons que  $x$  a la distribution du psi-deux, à p et q degrés de liberté, d'excentricité a ; nous noterons :

$$x \sim \psi_{p,q}^2(a) .$$

On peut encore donner la caractérisation équivalente suivante :

si  $\mathbf{x} \sim \mathbf{t}_{p,q}(\mathbf{a}, \mathbf{I}_p)$ , alors  $\mathbf{x}'\mathbf{x} \sim \psi_{p,q}^2(\mathbf{a}'\mathbf{a})$ .

On rapprochera la distribution du psi-deux des distributions du t généralisé unidimensionnel et du khi-deux non-centré :

. d'une part le psi-deux et le t généralisé peuvent être définis de manière analogue, le t généralisé comme moyenne pondérée de distributions normales, le psi-deux comme moyenne pondérée de distributions du khi-deux non-centré, la pondération étant dans les deux cas proportionnelle à un khi-deux inverse ;

. d'autre part le psi-deux et le khi-deux non centré peuvent être définis de manière analogue, le khi-deux à partir de la distribution normale p-dimensionnelle, le psi-deux à partir de la distribution du t p-dimensionnel.

Ceci peut être schématisé par le diagramme symbolique suivant :

$$\begin{array}{ccc} N & \longrightarrow & \chi_p^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ t_q & \longrightarrow & \psi_{p,q}^2 \end{array}$$

On a les propriétés suivantes (écrites symboliquement) :

$$\begin{aligned}\psi_{p,q}^2(0) &= p F_{p,q} \\ \psi_{p,\infty}^2(a) &= \chi_p^2(a) \\ \psi_{1,q}^2(a) &= t_q^2(\sqrt{a}, 1)\end{aligned}$$

Si  $x \sim \psi_{p,q}^2(a)$ , on montre que  $x$  a pour densité :

$$f(x) = \frac{1}{q} \left( \frac{p}{2} \right)^{-1} \frac{1}{\Gamma(\frac{q}{2})} x^{\frac{p}{2}-1} \left( 1 + \frac{a+x}{q} \right)^{-\frac{p+q}{2}} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} \frac{\Gamma(\frac{p+q}{2} + 2j)}{\Gamma(\frac{p}{2} + j)} \left[ \frac{ax}{(q+a+x)^2} \right]^j$$

$x > 0$

pour moyenne :

$$a + \frac{pq}{q-2} \quad q > 2$$

pour variance :

$$\frac{4q}{q-2} a + \frac{2pq^2(p+q-2)}{(q-2)^2(q-4)} \quad q > 4$$

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOX G.E.P., TIAO G.C., *Bayesian inference in statistical analysis*, Wesley Publishing Company, 1973.
- [2] CORNISH E.A., "The multivariate t-distribution associated with a set of normal sample deviates", *Australian Journal of Physics*, 7 (1954), 531-542.
- [3] DUNNETT C.W., SOBEL M., "A bivariate generalization of Student's t-distribution with tables for certain special cases", *Biometrika*, 41 (1954), 153-169.
- [4] FISHER R.A., *Statistical methods for research workers*, Edinburgh and London, Oliver and Boyd, 1925.
- [5] FISHER R.A., *The design of experiments*, Edinburgh and London, Oliver and Boyd, 1935.
- [6] FISHER R.A., *Statistical methods and scientific inference*, Edinburgh and London, Oliver and Boyd, 1956.
- [7] JEFFREYS H., *Theory of probability*, Oxford University Press, 1939.
- [8] LECOUTRE B., *Extensions bayésiennes de l'analyse de la variance*, Paris, Université René Descartes, thèse de doctorat de troisième cycle, 1980.

- [9] LECOUTRE B., "Procédures fiducio-bayésiennes pour l'investigation des mécanismes individuels en psychologie", *Année Psychologique*, 81 (1981), sous presse.
- [10] LECOUTRE B., "Cas de l'inférence sur un contraste entre moyennes dans un plan  $A < G > * T$  : distribution fiducio-bayésienne relative au rapport  $\frac{\delta}{\sigma}$ ", rapport technique, février 1981.
- [11] LECOUTRE B., LECOUTRE M.P., "A propos d'une expérience d'apprentissage perceptif incident : quelques aspects de la démarche d'analyse des données et méthodes fiduciaires", *Psychologie Française*, 24 (1979), 269-278.
- [12] LECOUTRE B., ROUANET H., "Deux structures statistiques fondamentales en analyse de la variance univariée et multivariée", *Mathématiques et Sciences Humaines*, à paraître.
- [13] LEPINE D., "Facteurs et plans : I - Structure de finesse", *Mathématiques et Sciences humaines*, 57 (1977), 5-26.
- [14] LEPINE D., "Facteurs et plans : II - Plans quasi-complets", *Mathématiques et Sciences Humaines*, 58 (1977), 5-24.
- [15] LINDLEY D.V., *Introduction to probability and statistics from a bayesian viewpoint, Part 2 - Inference*, Cambridge University Press, 1965.
- [16] ROUANET H., LEPINE D., "Comparison between treatments in a repeated-measurement design : ANOVA and multivariate methods", *The British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 23 (1970), 147-163.
- [17] ROUANET H., LEPINE D., "Statistiques de groupe, groupes d'observation", *Mathématiques et Sciences Humaines*, 41 (1972-73), 147-163.
- [18] ROUANET H., LEPINE D., "Structures linéaires et analyse des comparaisons", *Mathématiques et Sciences Humaines*, 56 (1976), 5-46.
- [19] ROUANET H., LEPINE D., "Introduction à l'analyse des comparaisons pour le traitement des données expérimentales", *Informatique et Sciences Humaines*, 33-34 (1977), numéro spécial.
- [20] ROUANET H., LEPINE D., HOLENDER D., "Model acceptability and the use of Bayes-fiducial methods for validating models", in J. REQUIN (Ed), *Attention and Performance VII*, Hillsdale, Lawrence Erlbaum Associates, 1978, 687-701.
- [21] ROUANET H., LEPINE D., PELNARD-CONSIDERE J., "Bayes-fiducial procedures as practical substitutes for misplaced significance testing: an application to educational data", In D.N.M. DE GRUIJTER and L.J.Th. VAN DER KAMP (Eds), *Advances in Psychological and Educational Measurement*, New York, John Wiley & Sons, 1975, 33-50.
- [22] SCHEFFE H., *The analysis of variance*, New York, John Wiley & Sons, 1959.