MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

MICHEL GONZALEZ

Inversion du pôle comparatif et renversement des probabilités de choix

Mathématiques et sciences humaines, tome 72 (1980), p. 73-105

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1980__72__73_0>

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (http://msh.revues.org/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

Math. Sci. hum. (18e année, n°72, 1980, p.73-105)

INVERSION DU POLE COMPARATIF ET RENVERSEMENT DES PROBABILITES DE CHOIX*

Michel GONZALEZ**

1. INTRODUCTION

L'étude formalisée des réponses de choix s'est longtemps limitée aux choix binaires d'une alternative contre une autre. L'approche probabiliste qui associe à chaque réponse un caractère de plus ou moins grande incertitude, rejoint alors souvent l'approche relationnelle qui s'attache aux propriétés d'une relation binaire décrivant l'ensemble des comparaisons par paires effectuées dans un ensemble spécifié d'objets.

Un choix a presque toujours une polarité qui doit être précisée : un objet paraît plus lourd qu'un autre mais il peut aussi paraître plus léger, et le choix qui va en rendre compte pourrait être celui de l'objet jugé le plus lourd ou au contraire le plus léger; parmi deux objets, il y en a un qui ressemble plus à un troisième mais il y en a un aussi qui lui est plus dissemblable, et ce ne sont pas toujours des raisons profondes qui font demander au sujet de choisir le plus semblable plutôt que le plus dissemblable. Implicitement, on suppose que les deux types de réponses sont équivalentes en sollicitant indifféremment l'une ou l'autre. Il y a aussi ce que l'on préfère et ce que l'on rejette, ce pour quoi on a le plus d'aversion. Les deux choix sont parfois sollicités mais sont rarement confrontés par une analyse raisonnée.

---

* L'auteur tient à la disposition du lecteur intéressé, un texte développant les démonstrations des résultats présentés dans cet article.

** Laboratoire de Psychologie de la Culture (Equipe de Recherche de l'Université de Paris X, associée au C.N.R.S.), Centre Universitaire Saint-Charles, 162 rue Saint-Charles, 75740 PARIS CEDEX 15.

Si une relation R décrit des choix binaires exprimés selon un pôle comparatif, sa relation réciproque R^r définie par xR^ry lorsque yRx, peut décrire les choix relatifs à l'autre pôle. De même, si P(x,y) est la probabilité qu'a un sujet de choisir x contre y selon un pôle, on peut supposer que $P^r(x,y) = P(y,x)$ est la probabilité qu'a ce même sujet de choisir x selon l'autre pôle. L'existence de deux pôles de comparaison ne pose pas de problème ici, tant que la polarité de la réponse ne constitue pas un terme spécifique du modèle descriptif des choix.

C'est cette conception de la réponse comparative qui guidera ici l'analyse du choix d'un objet parmi plusieurs. L'approche relationnelle ne suffisant plus, elle laissera le pas à une perspective probabiliste qui rend compte du choix de chaque élément d'un ensemble par une loi de probabilité sur cet ensemble. Si de telles situations ont fait très tôt l'objet d'investigations empiriques (dès 1876, Fechner demande de désigner parmi dix rectangles de proportions variables, la forme préférée et la moins aimée), ce n'est qu'en 1959 que Luce [3] propose avec l'axiome de choix, une théorie cohérente des probabilités de choix dans des ensembles qui contiennent généralement plus de deux objets. La question du pôle de la réponse se trouve d'ailleurs immédiatement évoquée par la confrontation de deux systèmes de probabilités de choix qui correspondraient à chacun des pôles. Mais l'approche que suggère Luce n'aboutit qu'à un paradoxe (voir par exemple le théorème d'impossibilité de Luce et Suppes [5]), et il faut attendre la contribution de Marley [7] pour que certaines ambiguïtés soient levées.

La pertinence de l'analyse développée ici devra sans doute être restreinte au cas où chaque pôle inverse ne donne pas lieu à un processus spécifique de comparaison et d'élaboration du choix. Certains travaux récents comme ceux de Tversky [10] en 1977, soulignent d'ailleurs qu'il n'en va pas toujours ainsi, comme il ressort de la comparaison de certaines réponses de similitude et de dissemblance.

A partir d'un système de probabilités de choix, on cherchera quel autre système de probabilités de choix sur le même ensemble et fonction du premier, pourrait être associé à des réponses selon un pôle opposé. La notion centrale sera celle de renversement qui confère un rôle symétrique aux deux pôles de comparaison. Le cas des systèmes qui vérifient l'axiome de choix de Luce sera tout particulièrement examiné, donnant lieu à quelques résultats intéressants qui précisent ou généralisent des résultats déjà connus.

2. NOTIONS PRELIMINAIRES

DEFINITION 1 Soit U un ensemble et $\Phi(U)$ l'ensemble des parties finies non vides de U. On dit que $P = \{P_E \ / \ E \in \Phi(U)\}$ est un <u>système de choix sur</u> U si, pour tout E dans $\Phi(U)$, P_E est une fonction de E à valeurs réelles dans l'intervalle $[0,1]$, telle que

$$\sum_{x \in E} P_E(x) = 1 \tag{1}$$

$P_E(x)$ peut être interprété comme une probabilité de choisir x dans E. Si F est un sous-ensemble de E, la probabilité $P_E(F)$ de choisir dans E un élément de F, devra alors être définie par

$$P_E(F) = \sum_{y \in F} P_E(y). \tag{2}$$

Si E est réduit à deux éléments, $P_{\{x,y\}}(x)$ sera plutôt noté $P(x,y)$. On dira que c'est la probabilité de choisir x contre y. En convenant de plus $P(x,x) = 1/2$, on note que :

$$\forall x \in U;\ \forall y \in U;\ P(x,y) + P(y,x) = 1.$$

P décrit un ensemble de réponses ou de choix potentiels d'un sujet confronté à divers ensembles d'objets inclus dans un même univers U. Si l'on s'intéresse à un autre ensemble de réponses exprimées selon un pôle inverse du précédent, on devra naturellement s'interroger sur les caractéristiques que pourrait posséder un système de choix sur U les décrivant. Une propriété minimale d'un tel système Q serait que, quels que soient x et y dans U, $Q(x,y) = P(y,x)$. Un exemple va montrer que cela ne suffit pas.

Si P est un système de choix sur U et si $|E|$ dénote le nombre d'éléments d'un ensemble fini E, on peut définir de la façon suivante le système de choix $P^r = \{P^r_E \ / \ E \in \Phi(U)\}$:

si $E = \{x\}$; $P^r_E(x) = 1$;

$$\text{autrement} : \forall x \in E;\ P^r_E(x) = (1 - P_E(x))/(|E| - 1). \tag{3}$$

P^r est bien un système de choix sur U (il vérifie (1)). De plus $P^r(x,y) = P(y,x)$, et même

$$P^r_E(x) \le P^r_E(y) \Longleftrightarrow P_E(x) \ge P_E(y).$$

En ce sens, P^r pourrait être un système de choix inverse de P. Mais si les deux types de réponses décrites par P et par P^r sont interprétées de façon symétrique, aucune n'ayant de statut privilégié, on doit aussi s'attendre à ce que le système de choix inverse de P^r soit P. Or, si l'inverse $(P^r)^r$ est défini de la même façon que l'inverse P^r de P, par $(P^r)^r_E(x) = (1 - P^r_E(x))/(|E| - 1)$ lorsque E contient au moins deux éléments, on vérifierait aisément, en substituant à P^r sa valeur en fonction de P, que $(P^r)^r$ est identique à P à une seule condition : $P_E(x) = I/|E|$, quels que soient E et x dans E, c'est-à-dire $P_E(x) = P_E(y)$, quels que soient x et y dans E. C'est ce que l'on appelera le système des choix indifférenciés sur U, $I = \{I_E \ / \ E \in \Phi(U)\}$, défini par

$$\forall E \in \Phi(U);\ \forall x \in E;\ I_E(x) = 1/|E|. \qquad (4)$$

Les applications successives de la transformation de P en P^r font aussi en un certain sens, converger P vers I, quel que soit le système de choix de départ : si l'on note $f(P) = \{f(P)_E \ / \ E \in \Phi(U)\}$ le système de choix P^r, les transformations successives de P forment une suite $(f^n(P))_{n \in \mathbb{N}}$ de systèmes de choix, définis par $f^0(P) = P$ et $f^n(P) = f(f^{n-1}(P))$, et l'on pourra vérifier que :

$$\lim_{n \to \infty} f^n(P)_E(x) = 1/|E|,$$

quels que soient E dans $\Phi(U)$ et x dans E. D'ailleurs, à mesure que E contient plus d'éléments, $P^r{}_E(x)$ tend vers $1/|E|$, si l'on note que

$$|P^r{}_E(x) - 1/|E|| \leq 1/|E|.$$

Ces quelques remarques à propos d'une transformation de P, suggèrent quelles propriétés devrait satisfaire un système de choix inversé. Dans l'ensemble des systèmes de choix sur U, l'analyse est restreinte d'emblée à une certaine classe P de systèmes de choix, généralement définis par des propriétés autres que celles qu'impose l'existence d'un renversement (par exemple les systèmes de choix qui vérifient l'axiome de choix de Luce). Cette restriction peut se justifier de la même façon que l'on impose au renversement d'un renversement d'être le système de choix initial. Si aucun des deux types de réponses inverses décrites par P et Q, n'a de statut spécifique, une propriété supposée vraie pour P doit rester vraie pour Q. Un renversement sera alors défini comme une application qui à tout système de choix de P fait correspondre un système de choix de P, et possède les deux propriétés évoquées précédemment :

DEFINITION 2 Si P est un ensemble de systèmes de choix sur U, on dit que l'application f de P dans lui-même est un renversement pour P, si f est une involution :

$$\forall P \in \mathcal{P};\ f(f(P)) = P, \qquad (5)$$

telle que

$$\forall x \in U;\ \forall y \in U;\ f(P)(x,y) = P(y,x). \qquad (6)$$

3. UN PREMIER RENVERSEMENT POUR LES SYSTEMES DE CHOIX NON-DEGENERES

A tout système de choix P sur U, on va associer un système de choix $\tilde{P}$ tel que $P_E(x).\tilde{P}_E(x) = P_E(y).\tilde{P}_E(y)$, quels que soient les éléments x et y d'une partie finie E de U. On aura même défini là un renversement pour une classe assez large de systèmes de choix.

Toute partie finie de U, E, peut être partitionnée en deux classes :

$$E^{Po} = \{y \in E \ / \ P_E(y) = 0\} \qquad (7)$$

et

$$E^{P+} = \{y \in E \ / \ P_E(y) > 0\}. \qquad (8)$$

Si $E^{P+} = E$ (ou $E^{Po} = \emptyset$), c'est-à-dire si chaque $P_E(y)$ est strictement positif, on dira que E est P-<u>incertain</u>.

DEFINITION 3 Si P est un système de choix sur U, $\tilde{P} = \{\tilde{P}_E \ / \ E \in \Phi(U)\}$ est défini de la façon suivante :
si E est P-incertain,

$$\forall x \in E: \ \tilde{P}_E(x) = 1/(\sum_{y \in E} P_E(x)/P_E(y)); \qquad (9)$$

sinon

$$\text{si } x \in E^{P+}; \ \tilde{P}_E(x) = 0$$

$$\text{si } x \in E^{Po}; \ \tilde{P}_E(x) = \tilde{P}_{E^{Po}}(x). \qquad (10)$$

$\tilde{P}$ est bien défini, quel que soit le système de choix P. Le théorème qui suit montre même que c'est un système de choix.

THEOREME 1 <u>Pour tout système de choix</u> P <u>sur</u> U, $\tilde{P}$ <u>est un système de choix sur</u> U, <u>tel que</u>

$$\forall E \in \Phi(U); \ \forall x \in E; \ \forall y \in E; \ \tilde{P}_E(x).P_E(x) = \tilde{P}_E(y).P_E(y) \qquad (11)$$

<u>et</u>

$$\tilde{P}(x,y) = P(y,x).$$

<u>Preuve</u> On note tout d'abord que $0 \leq \tilde{P}_E(x) \leq 1$. Par ailleurs, si E est P-incertain, on déduit aisément de (9), $\sum_{x \in E} \tilde{P}_E(x) = 1$. Autrement, en supposant ce résultat par récurrence sur le nombre d'éléments de E, on obtient de la même façon :

$$\sum_{x \in E} \tilde{P}_E(x) = \sum_{x \in E^{Po}} \tilde{P}_E(x) + \sum_{y \in E^{P+}} \tilde{P}_E(y) = \sum_{x \in E^{Po}} \tilde{P}_{E^{Po}}(x) = 1,$$

ce qui montre que $\tilde{P}$ est un système de choix.

Notons que, lorsque E^{Po} n'est pas vide, $P_E(x) = 0$ ou $\tilde{P}_E(x) = 0$, c'est-à-dire $\forall x\in E;\ \tilde{P}_E(x).P_E(x) = 0$.

Autrement, E est P-incertain et

$$\tilde{P}_E(x).P_E(x) = P_E(x)/(\sum_{z\in E} P_E(x)/P_E(z)) = (\sum_{z\in E}(1/P_E(z)))^{-1},$$

qui ne dépend pas de x et montre donc l'égalité (11). En particulier, si $E = \{x,y\}$,

$$\tilde{P}(x,y).P(x,y) = \tilde{P}(y,x).P(y,x),$$

donc $\tilde{P}(x,y) = P(y,x)$. C.Q.F.D.

$\tilde{P}$ étant toujours un système de choix, il en est de même de $\tilde{\tilde{P}}$. Mais $\tilde{\tilde{P}}$ peut être distinct de P. Il reste à préciser dans quels cas l'identité se réalise.

DEFINITION 4 On dit qu'un système de choix P sur U est <u>non-dégénéré</u> lorsque

$$\forall E\in\Phi(U);\ \forall x\in E^{\tilde{P}o};\ P_E(x) = P_{E^{\tilde{P}o}}(x). \qquad (12)$$

Avant de montrer que $\tilde{\tilde{P}}$ est identique à P seulement lorsque P est non-dégénéré, il peut être utile de donner quelques exemples de tels systèmes de choix. La propriété la plus générale qui ne fait pas intervenir la définition de $\tilde{P}$ est sans doute celle de <u>stabilité</u> :

DEFINITION 5 On dit qu'un système de choix P est <u>stable</u> si, quel que soit E dans $\Phi(U)$,

$$(E^{P+}\subset F\subset E) \Longrightarrow (\forall x\in E^{P+};\ P_F(x) = P_{E^{P+}}(x)). \qquad (13)$$

LEMME 1 <u>Tout système de choix stable est non-dégénéré.</u>

<u>Preuve</u> Si E est P-incertain, E est aussi $\tilde{P}$-incertain et $E^{\tilde{P}o} = \emptyset$, ce qui rend l'égalité (12) triviale. Autrement, $E^{P+}\subset E^{\tilde{P}o}\subset E$ d'après (10). Si P est stable, on en déduit ainsi

$$\forall x\in E^{P+};\ P_{E^{\tilde{P}o}}(x) = P_{E^{P+}}(x) = P_E(x).$$

Enfin, si x appartient à $E^{\tilde{P}o}\cap E^{Po}$, $P_E(x) = P_{E^{\tilde{P}o}}(x) = 0$ car $\sum_{y\in E^{P+}} P_{E^{\tilde{P}o}}(y) = 1$.

C.Q.F.D.

Un système de choix stable se caractérise d'ailleurs par le fait que l'adjonction à un ensemble d'un élément qui ne sera jamais choisi dans cet ensemble, laissera inchangées les probabilités de choix initiales :

LEMME 2 P <u>est un système de choix stable si et seulement si</u>

$$P_E(x) = 0 \Longrightarrow (\forall F \subset E;\ P_E(F) = P_{E-\{x\}}(F-\{x\})). \qquad (14)$$

<u>Preuve</u> Notons tout d'abord que (14) est équivalente à

$$P_E(x) = 0 \Longrightarrow (\forall y \in E-\{x\};\ P_E(y) = P_{E-\{x\}}(y)).$$

Or, si P est stable et si $P_E(x) = 0$, $E^{P+} \subset E-\{x\} \subset E$. Par conséquent, si y appartient à E^{P+}, $P_E(y) = P_{E-\{x\}}(y)$. Sinon $P_{E-\{x\}}(y) = P_E(y) = 0$.

Réciproquement, si P vérifie (14) et si $E^{P+} \subset F \subset E$, on peut toujours écrire $F = E^{P+} \cup \{x_1,..,x_j,..,x_m\}$, et $E = F \cup \{y_1,..,y_k,..,y_n\}$, avec $E^{Po} = \{x_1,..,x_m,y_1,..,y_n\}$.

On vérifiera alors de proche en proche sur k, que

$$P_{E-\{y_1,..,y_{k-1}\}}(y_k) = P_E(y_k) = 0,$$

et donc

$$\forall x \in E-\{y_1,..,y_k\};\ P_E(x) = P_{E-\{y_1,..,y_k\}}(x).$$

Pour k = n, on parvient ainsi à

$$\forall x \in F;\ P_E(x) = P_F(x).$$

En particulier, $\forall j \in \{1,..,m\};\ P_F(x_j) = 0$.

En substituant alors F à E et x_j à y_k dans le raisonnement précédent, on obtiendrait

$$\forall x \in E^{P+};\ P_F(x) = P_{E^{P+}}(x). \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

La plupart des systèmes de choix étudiés de façon systématique, sont stables. En particulier, si toutes les parties finies non vides de *U* sont P-incertaines, P est stable! Les systèmes de choix <u>réguliers</u> définis par Luce et Suppes [5] puis par Marley [6] sont stables aussi. La propriété qui les caractérise peut d'ailleurs sembler assez naturelle :

DEFINITION 6 On dit qu'un système de choix P est <u>régulier</u> si, quel que soit E dans $\Phi(U)$, F inclus dans E et x appartenant à F,

$$P_E(x) \leq P_F(x). \qquad (15)$$

LEMME 3 <u>Tout système de choix régulier est stable donc non dégénéré.</u>

<u>Preuve</u> Si P est régulier et si $E^{P+} \subset F \subset E$, il suffira de montrer que, quel que soit x dans E^{P+}, $P_F(x) = P_E(x)$, et de la même façon, $P_{E^{P+}}(x) = P_E(x)$.

Revenons à présent aux systèmes de choix non-dégénérés et à la transformation $\tilde{P}$ de P :

LEMME 4 $\tilde{\tilde{P}} = P$ <u>si et seulement si</u> P <u>est un système de choix non-dégénéré.</u>

<u>Preuve</u> Si $\tilde{\tilde{P}} = P$ et $E \in \Phi(U)$, on peut se restreindre au cas où $E^{\tilde{P}o} \neq \emptyset$. On sait alors d'après (10) que

$$\forall x \in E^{\tilde{P}o};\ \tilde{\tilde{P}}_E(x) = \tilde{\tilde{P}}_{E^{\tilde{P}o}}(x),$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in E^{\tilde{P}o};\ P_E(x) = P_{E^{\tilde{P}o}}(x),$$

ce qui montre que P est non-dégénéré.

Réciproquement, si P est non-dégénéré et si E est $\tilde{P}$-incertain, E est aussi P-incertain. En appliquant alors directement la définition (9) aux deux transformations, de $\tilde{P}$ en $\tilde{\tilde{P}}$ et de P en $\tilde{P}$, on vérifiera aisément l'identité de $\tilde{\tilde{P}}_E$ et de P_E.

Si par contre $E^{\tilde{P}o}$ n'est pas vide, on pourra vérifier par récurrence sur le nombre d'éléments de E l'identité de P_E et de $\tilde{\tilde{P}}_E$, en montrant tout d'abord :

$$\forall x \in E^{\tilde{P}+};\ \tilde{\tilde{P}}_E(x) = P_E(x) = 0,$$

puis,

$$\forall x \in E^{\tilde{P}o};\ \tilde{\tilde{P}}_E(x) = P_{E^{\tilde{P}o}}(x) = P_E(x).$$

LEMME 5 <u>Si</u> P <u>est un système de choix non-dégénéré</u>, $\tilde{P}$ <u>est un système de choix non-dégénéré</u>.

<u>Preuve</u> Par définition de $\tilde{P}$,

$$\forall x \in E^{Po};\ \tilde{P}_E(x) = \tilde{P}_{E^{Po}}(x).$$

Mais, si P est non-dégénéré, $P = \tilde{\tilde{P}}$, donc $E^{Po} = E^{\tilde{\tilde{P}}o}$ et

$$\forall x \in E^{\tilde{\tilde{P}}o};\ \tilde{P}_E(x) = \tilde{P}_{E^{\tilde{\tilde{P}}o}}(x).$$

THEOREME 2 f <u>définie sur l'ensemble des systèmes de choix par</u> $f(P) = \tilde{P}$ <u>est un renversement pour l'ensemble des systèmes de choix non-dégénérés et ne peut être un renversement que pour un ensemble de systèmes non-dégénérés</u>.

<u>Preuve</u> Théorème 1, Lemmes 4 et 5.

4. APPLICATION AUX SYSTEMES DE CHOIX DE LUCE

Le théorème 2 n'assure pas que la transformation de P en $\tilde{P}$ soit un renversement pour tout ensemble P de choix non-dégénérés : quel que soit P dans P, $\tilde{\tilde{P}} = P$, mais $\tilde{P}$, bien que non-dégénéré, peut fort bien ne pas appartenir à P, comme le montreront quelques contre-exemples. On vérifiera cependant que $\tilde{P}$ constitue un renversement pour certains ensembles de systèmes qui vérifient l'axiome de choix de Luce.

DEFINITION 7 (Luce [3], 1959) On dit qu'un système de choix P sur U est un système de choix de Luce s'il vérifie les deux conditions (i) et (ii) ci-dessous :

(i) si $\forall x\in E$; $\forall y\in E$; $P(x,y) > 0$, alors

$$\forall F\subset E;\ \forall x\in F;\ P_E(x) = P_F(x).P_E(F) \tag{16}$$

(ii) s'il existe deux éléments de E, x et y, tels que $P(x,y) = 0$, alors

$$\forall F\subset E;\ P_E(F) = P_{E-\{x\}}(F-\{x\}). \tag{17}$$

On vérifiera d'ailleurs que tout système de choix régulier satisfait aussi la condition (ii). C'est cette définition que Luce [3] envisage dans son texte original Individual choice behavior. Plus tard (voir notamment Luce & Galanter [4], Luce & Suppes [5]), l'axiome de choix est défini par

$$\forall E\in\Phi(U);\ \forall F\subset E;\ \forall x\in F;\ P_E(F) > 0 \Longrightarrow P_F(x) = P_E(x)/P_E(F). \tag{18}$$

Si toutes les parties de U ne sont pas P-incertaines, ces deux définitions ne sont pas équivalentes. Dans le second cas, on parlera plutôt de système de Luce absorbant.

DEFINITION 8 On dit que P est un système de choix de Luce absorbant, lorsque, quels que soient E dans $\Phi(U)$, F inclus dans E et x appartenant à F,

$$P_E(x) = P_F(x).P_E(F). \tag{19}$$

La propriété (19) est en fait la même que la propriété (18) car, si $P_E(F) = 0$, pour tout élément x de F, $P_E(x) = 0$.

Une propriété assez simple permet de distinguer les systèmes de Luce absorbants des systèmes de choix de Luce :

LEMME 6 *P est un système de Luce absorbant si et seulement si c'est un système de choix de Luce tel que*

$$P(x,y) = 1 \Longrightarrow (\forall z\in U;\ P(x,z) = 1 \text{ ou } P(z,y) = 1). \tag{20}$$

Preuve Gonzalez [2], lemme 3.

Une des questions relatives aux systèmes de choix, examine quelles propriétés permettent de construire une fonction réelle de U, qui constituerait une échelle pour les objets comparés, dont rendrait compte P. L'analyse développée par Luce [3] répond à cet objectif. Il s'avère cependant qu'une classe plus large que celle des systèmes de choix de Luce, est compatible avec l'existence d'une échelle du type envisagé par Luce : les systèmes de choix R.I.C. (Gonzalez [2]).

Définissons d'abord, pour toute partie finie E de U :

$$E^{P>} = \{x \in E \ / \ \forall y \in E;\ P(x,y) > 0\}. \tag{21}$$

DEFINITION 9 On dit qu'un système de choix P sur U est un <u>système aux rapports de choix incertains constants</u>, ou plus brièvement, que P est un <u>système de choix R.I.C.</u>, s'il vérifie les deux propriétés (A) et (B) ci-dessous:

$$\text{(A)} \quad \forall E \in \Phi(U);\ E^{P+} = E^{P>} \tag{22}$$

$$\text{(B)} \quad \forall E \in \Phi(U);\ \forall F \subset E;\ \forall x, \forall y \in E^{P>} \cap F;\ P_E(x).P_F(y) = P_E(y).P_F(x). \tag{23}$$

Notons qu'en ce qui concerne cette dernière propriété, lorsque x et y appartiennent à $E^{P>} \cap F$, ils appartiennent aussi à $F^{P>}$. D'après (A), (B) se ramène ainsi à

$$P_E(x)/P_E(y) = P_F(x)/P_F(y).$$

LEMME 7 P <u>est un système de choix de Luce si et seulement si c'est un système de choix R.I.C. tel que</u>

$$(P(x,y) = 1 \ \&\ P(y,z) = 1) \Longrightarrow P(x,z) = 1. \tag{24}$$

<u>Preuve</u> Gonzalez [2], lemme 11.

LEMME 8 P <u>est un système de choix R.I.C. si et seulement s'il vérifie les trois propriétés suivantes</u> :

$$\text{(a)} \quad \forall E \in \Phi(U);\ E^{P+} = E^{P>}$$

$$\text{(b)} \quad \forall E \in \Phi(U);\ \forall x \in E^{P+};\ P_E(x) = P_{E^{P+}}(x)$$

$$\text{(c)} \quad \text{si } E = E^{P>};\ \forall F \subset E;\ \forall x \in F;\ P_E(x) = P_F(x).P_E(F).$$

<u>Nota</u> La propriété (c) n'est autre que la condition (i) de l'axiome de choix de Luce.

<u>Preuve</u> Si P est un système de choix R.I.C., il vérifie (a) par définition. Si par ailleurs $E = E^{P>}$, $F \subset E$, et x et y sont dans F, on a d'après (B) :

$$P_E(x).P_F(y) = P_E(y).P_F(x),$$

et en sommant sur y :

$$P_E(x). \sum_{y \in F} P_F(y) = P_F(x). \sum_{y \in F} P_E(y),$$

qui n'est autre que (c).

Mais toujours d'après (B), avec $F = E^{P>}$,

$$\forall x, \forall y \in E^{P>};\ P_E(x).P_{E^{P>}}(y) = P_E(y).P_{E^{P>}}(x).$$

Par conséquent,

$$\forall x \in E^{P>};\ \sum_{y \in E^{P>}} P_E(x).P_{E^{P>}}(y) = \sum_{y \in E^{P>}} P_E(y).P_{E^{P>}}(x),$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in E^{P>};\ P_E(x) = P_{E^{P>}}(x),$$

qui n'est autre que (b), sachant que $E^{P>} = E^{P+}$.

Réciproquement, si P vérifie (a), (b) et (c), on montre que P vérifie aussi (B). On pourra vérifier (Gonzalez [2], lemme 5) que la condition (i) de l'axiome de choix est équivalente à :

$$E = E^{P>} \Longrightarrow \forall F \subset E;\ \forall x, \forall y \in F;\ P_E(x).P_F(y) = P_E(y).P_F(x).$$

Soient alors $F \subset E$, x et y deux éléments de $E^{P>} \cap F$. Comme $(E^{P>})^{P>} = E^{P>}$,

$$P_{E^{P>}}(x).P_{F \cap E^{P>}}(y) = P_{E^{P>}}(y).P_{F \cap E^{P>}}(x),$$

ou, d'après (a) et (b),

$$P_E(x).P_{F \cap E^{P>}}(y) = P_E(y).P_{F \cap E^{P>}}(x). \tag{25}$$

Mais aussi, $(F^{P>})^{P>} = F^{P>}$ et $F \cap E^{P>} \subset F^{P>}$, et d'après (a) :

$$P_{F^{P>}}(x).P_{F \cap E^{P>}}(y) = P_{F^{P>}}(y).P_{F \cap E^{P>}}(x)$$

qui se ramène comme précédemment à

$$P_F(x).P_{F \cap E^{P>}}(y) = P_F(y).P_{F \cap E^{P>}}(x). \tag{26}$$

En multipliant les termes de gauche et de droite de (25) et (26), et en notant que $P_{F \cap E^{P>}}(x).P_{F \cap E^{P>}}(y)$ est strictement positif, on obtiendrait ainsi

$$P_E(x).P_F(y) = P_E(y).P_F(x),$$

ce qui montre que P est un système de choix R.I.C.

LEMME 9 <u>Si</u> P <u>est un système de choix R.I.C.</u>, P <u>est non dégénéré, c'est-à-dire</u>,

$$\forall E \in \Phi(\mathcal{U});\ \forall x \in E^{\tilde{P}o};\ P_E(x) = P_{E^{\tilde{P}o}}(x).$$

<u>Preuve</u> Si P est un système de choix R.I.C., on montrera d'abord par récurrence sur le nombre d'éléments de E que

$$E^{P+} \neq E \Longrightarrow (E^{\tilde{P}o})^{P>} = E^{P>}. \tag{27}$$

Soit alors $E \in \Phi(\mathcal{U})$. Si $E = E^{P+}$, $E^{\tilde{P}o}$ est vide par construction de $\tilde{P}$. Pour montrer que P est non dégénéré, on peut donc se restreindre au cas où E^{P+} est distinct de E, auquel cas, d'après (27) et les propriétés (a) et (b) du lemme 8 :

$$\forall x \in (E^{\tilde{P}o})^{P>} ;\ P_{E^{\tilde{P}o}}(x) = P_{E^{P>}}(x) = P_E(x).$$

Mais, si $x \in E^{\tilde{P}o} - (E^{\tilde{P}o})^{P>}$,

$$P_E(x) = P_{E^{\tilde{P}o}}(x) = 0,$$

ce qui signifie que P est non dégénéré.

COROLLAIRE <u>Un système de choix de Luce (absorbant) est non dégénéré</u>.

Notons ici qu'un système de choix R.I.C. peut ne pas être stable. On montrerait par contre aisément qu'un système de choix de Luce est stable.

Parmi les systèmes de choix considérés jusqu'à présent, stables, réguliers, R.I.C., de Luce, etc., $\tilde{P}$ n'est pratiquement un renversement que pour les systèmes de Luce absorbants. Un simple exemple montre que la transformation de P en $\tilde{P}$ n'est un renversement ni pour les choix stables, ni pour les choix réguliers, ni pour les choix R.I.C., ni pour les choix de Luce. Soit en effet $U = \{a,b,c\}$ et P le système de choix sur U défini par le tableau I.

Tableau I <u>Transformation de</u> P <u>en</u> $\tilde{P}$ <u>avec</u> $0 < \beta \leq \alpha < 1$

P: a	P: b	P: c		$\tilde{P}$: a	$\tilde{P}$: b	$\tilde{P}$: c
0	α	$1-\alpha$	U	1	0	0
0	1		$\{a,b\}$	1	0	
β		$1-\beta$	$\{a,c\}$	$1-\beta$		β
	α	$1-\alpha$	$\{b,c\}$		$1-\alpha$	α

Chaque ligne figure un élément de $\Phi(U)$ (les éléments de E sont représentés par les cases non hachurées). Dans chaque case, la probabilité de choix de l'élément en colonne dans l'ensemble en ligne, est reportée. On peut vérifier que P est un système de choix <u>régulier</u> (donc <u>stable</u> et <u>non dégénéré</u>) et aussi un <u>système de choix de Luce</u> (donc <u>R.I.C.</u>). On note cependant que :

- $\tilde{P}$ <u>n'est pas stable</u> : en effet $\tilde{P}_U(b) = 0$, et comme $U-\{b\} = \{a,c\}$, $\tilde{P}_U(c) \neq \tilde{P}_{U-\{b\}}(c)$, c'est-à-dire $\beta \neq 0$ (cf. lemme 2).
- $\tilde{P}$ <u>n'est pas régulier</u> (cf. lemme 3). On note d'ailleurs $\tilde{P}_U(a) > \tilde{P}(a,c)$.
- $\tilde{P}$ <u>n'est pas un système R.I.C.</u> car $U^{\tilde{P}+} = \{a\}$ et $U^{\tilde{P}>} = \{a,c\}$.
- $\tilde{P}$ <u>n'est donc pas un système de choix de Luce</u> (cf. lemme 7).

On pourra par contre vérifier que $\tilde{P}$ est non dégénéré et $\tilde{\tilde{P}} = P$.

On va à présent préciser pour quels ensembles de systèmes de choix R.I.C. ou de Luce, la transformation de P en $\tilde{P}$ est un renversement. La réponse est assez simple en ce qui concerne les systèmes de choix de Luce : $\tilde{P}$ n'induit un renversement que pour les systèmes de Luce absorbants.

Considérons d'abord une propriété commune aux systèmes de choix R.I.C. et de Luce : la condition (i) de l'axiome de choix :

THEOREME 3 Si P vérifie la condition (i) de l'axiome de choix de Luce, il en va de même pour $\tilde{P}$.

Preuve Soit $E = E^{\tilde{P}>}$. Comme $\tilde{P}(x,y) = P(y,x)$, on en déduit $E = E^{P>}$. Si P vérifie la condition (i) de l'axiome de choix, on pourrait alors vérifier que $E = E^{P+}$ (Gonzalez [2], lemme 4) et donc $E = E^{\tilde{P}+}$ (cf. déf. (9) de $\tilde{P}$). Soient alors $F \subset E$ et $x \in F$. On note que :

$$\tilde{P}_E(F)/\tilde{P}_E(x) = \sum_{y\in F} \tilde{P}_E(y)/\tilde{P}_E(x) = \sum_{y \in F} P_E(x)/P_E(y).$$

Or, d'après la condition (i) de l'axiome de Luce :

$$\forall y \in F;\ P_E(x)/P_E(y) = P_F(x)/P_F(y).$$

Ainsi :

$$\tilde{P}_E(F)/\tilde{P}_E(x) = \sum_{y\in F} P_F(x)/P_F(y) = \sum_{y\in F} \tilde{P}_F(y)/\tilde{P}_F(x) = 1/\tilde{P}_F(x)$$

ou encore

$$\tilde{P}_E(x) = \tilde{P}_F(x).\tilde{P}_E(F).$$

LEMME 10 Quel que soit le système de choix P sur U,

$$\forall E \in \Phi(U);\ \forall x \in E^{\tilde{P}+};\ \tilde{P}_E(x) = \tilde{P}_{E^{\tilde{P}+}}(x).$$

Le lecteur démontrera aisément ce résultat par récurrence. Lorsque E^{P+} est distinct de E en particulier, on vérifiera le résultat pour E en le supposant pour E^{Po}.

$\tilde{P}$ partage cette dernière propriété avec les systèmes de choix R.I.C. (lemme 8). De plus, si P est un système R.I.C., P et $\tilde{P}$ vérifient la condition (i) de l'axiome de choix de Luce. Dans ces conditions, $\tilde{P}$ est aussi un système de choix R.I.C. si $E^{\tilde{P}+} = E^{\tilde{P}>}$ (lemme 8). Quelle propriété de P implique ce résultat? Pour répondre à cette question, on doit définir une nouvelle classe de systèmes R.I.C.

On dira tout d'abord que P(x,y) est certain si P(x,y) = 0 ou P(x,y) = 1 (un élément est choisi contre l'autre avec certitude).

DEFINITION 10 On dit qu'un système de choix R.I.C., P, est un <u>système R.I.C. absorbant</u> lorsque

$$P(x,y) = 1 \Longrightarrow (\forall z \in U;\ P(x,z) \text{ ou } P(y,z) \text{ est certain}). \qquad (28)$$

THEOREME 4 <u>La transformation de</u> P <u>en</u> $\tilde{P}$ <u>est un renversement pour l'ensemble des systèmes R.I.C. absorbants.</u>

<u>Preuve</u> Si P est un système R.I.C. absorbant, P est non dégénéré (lemme 9) donc $P = \tilde{\tilde{P}}$ (lemme 4). De plus (théor. 1), $\tilde{P}(x,y) = P(y,x)$. Il reste donc à montrer que $\tilde{P}$ est aussi un système R.I.C. absorbant. Or, P vérifiant (28), il en va de même pour $\tilde{P}$. De plus, $\tilde{P}$ vérifie la condition (i) de l'axiome de choix de Luce (théor. 3) ainsi que la propriété (b) du lemme 8 d'après le lemme précédent. Avec le lemme 8, il reste donc à montrer que $E^{\tilde{P}+} = E^{\tilde{P}>}$. Le lecteur vérifiera ce résultat par récurrence sur l'ordre de E, en se servant de la définition de $\tilde{P}$ et de la propriété (28).

On a vu qu'un système de Luce absorbant est un système de Luce (lemme 6), donc R.I.C. (lemme 7) qui, en tant qu'il vérifie (20), vérifie (28). Par conséquent, <u>un système de Luce absorbant est un système R.I.C. absorbant</u>. Ainsi, lorsque P est un système de Luce absorbant, $\tilde{P}$ est un système R.I.C. absorbant. Mais, en tant que système de Luce (lemme 7) :

$$(P(x,y) = 1 \ \&\ P(y,z) = 1) \Longrightarrow P(x,z) = 1.$$

Par conséquent, sachant que $\tilde{P}(x,y) = P(y,x)$:

$$(\tilde{P}(x,y) = 1 \ \&\ \tilde{P}(y,z) = 1) \Longrightarrow \tilde{P}(x,z) = 1, \qquad (29)$$

ce qui montre (lemme 7) que $\tilde{P}$ est aussi un système de Luce. Enfin, $\tilde{P}$ est un système de Luce absorbant car la conjonction de (28) et de (29) pour $\tilde{P}$, implique (20) pour $\tilde{P}$. En conclusion :

THEOREME 5 <u>La transformation de</u> P <u>en</u> $\tilde{P}$ <u>est un renversement pour les systèmes de Luce absorbants.</u>

Le théorème suivant établit qu'en ce qui concerne les systèmes de choix R.I.C. (resp. de Luce), $\tilde{P}$ ne peut déterminer de renversement que pour des systèmes de choix R.I.C. (resp. de Luce) <u>absorbants</u> :

THEOREME 6 <u>Si</u> P <u>est un système de choix R.I.C. (resp. de Luce)</u>, $\tilde{P}$ <u>est un système R.I.C. (resp. de Luce) si et seulement si</u> P <u>est un système de choix R.I.C. (resp. de Luce) absorbant.</u>

<u>Preuve</u> Les théorèmes 4 et 5 montrent que cette condition est suffisante.

Réciproquement, si $\tilde{P}$ est un système R.I.C., $P(x,y) = 1$ et $E = \{x,y,z\}$, supposons que P ne vérifie pas (28), c'est-à-dire $0 < P(x,z) < 1$ et $0 < P(y,z) < 1$. Alors $0 < \tilde{P}(x,z) < 1$ et $0 < \tilde{P}(y,z) < 1$, auquel cas $P_E(z)$ et $\tilde{P}_E(z)$ seraient strictement positifs, ce qui contredit la définition de $\tilde{P}$ et montre que P est un système R.I.C. absorbant.
Si de plus P est un système de Luce, en tant que système R.I.C. absorbant, P est aussi un système de Luce absorbant.

Le tableau II décrit un système de Luce absorbant sur $U = \{a,b,c\}$. On pourra vérifier que $\tilde{P}$ est aussi un système de Luce absorbant et que $P = \tilde{\tilde{P}}$.

Tableau II Transformation en $\tilde{P}$ du système de Luce absorbant P sur {a,b,c} ($0 \le \alpha \le 1$)

	P: a	P: b	P: c	$\tilde{P}$: a	$\tilde{P}$: b	$\tilde{P}$: c
U	0	α	$1-\alpha$	1	0	0
{a,b}	0	1		1	0	
{a,c}	0		1	1		0
{b,c}		α	$1-\alpha$		$1-\alpha$	α

Montrons enfin que la transformation de P en $\tilde{P}$ est l'unique renversement des systèmes R.I.C. (resp. de Luce) absorbants :

THEOREME 7 Si P est un système de choix R.I.C. absorbant et si Q est un système de choix R.I.C. tel que $Q(x,y) = P(y,x)$, quels que soient x et y dans U, $Q = \tilde{P}$.

Preuve. Si P est un système de choix R.I.C., on pourra montrer (Gonzalez [2], lemme 12) que

$$\forall E\in\Phi(U);\ \forall x\in E^{P>};\ P_E(x) = \Big(\sum_{y\in E^{P>}} P(y,x)/P(x,y)\Big)^{-1}. \qquad (30)$$

Si P est un système de choix R.I.C. absorbant, $\tilde{P}$ et Q sont des systèmes de choix R.I.C. tels que $Q(x,y) = \tilde{P}(x,y)$, quels que soient x et y. Par conséquent $E^{\tilde{P}>} = E^{Q>}$, et comme de plus $E^{P+} = E^{Q+}$, on en déduit immédiatement avec (30) l'identité de $\tilde{P}$ et de Q.

5. CONSTRUCTION D'UN RENVERSEMENT POUR LES ENSEMBLES DE SYSTEMES DE CHOIX R.I.C. ET DE LUCE

La difficulté essentielle que présente la construction d'un renversement pour un ensemble spécifié de systèmes de choix, réside dans la coexistence possible de choix certains et incertains. Beaucoup de travaux éludent cette difficulté en écartant d'emblée une telle éventualité. Par là même, la pertinence du propos risque fort d'être restreinte à une classe bien particulière de réponses comparatives ou d'objets comparés.

Pour fixer la terminologie, on dira qu'un système de choix P sur U est partout incertain lorsque

$\forall E \in \Phi(U)$; $\forall x \in E$; $P_E(x) > 0$.

Autrement, on dira que P n'est que localement incertain. Les systèmes de choix de Luce et plus généralement, tous les systèmes P tels que $E^{P>} = E^{P+}$, sont partout incertains si leurs probabilités de choix binaires ne s'annulent jamais, c'est-à-dire lorsque $0 < P(x,y) < 1$, quels que soient x et y. Dans ce cas, la distinction entre systèmes de choix R.I.C., de Luce et de Luce absorbants, n'a plus de sens, chacun de ces systèmes étant alors un système de Luce (absorbant).

A la différence de $\tilde{P}$, la nouvelle transformation $\bar{P}$ de P que l'on va proposer, n'est définie que pour certains systèmes de choix. Elle est toutefois identique à $\tilde{P}$ sur certains ensembles dans lesquels les probabilités de choix ne s'annulent pas.

On montrera ici que la transformation de P en $\bar{P}$ définit un renversement sur l'ensemble des systèmes de choix R.I.C. et sur celui des choix de Luce. Après avoir rappelé quelques résultats relatifs à la représentation des éléments de U sur une échelle de rapports strictement positive v_P dérivée de P, on montrera enfin que l'échelle $v_{\bar{P}}$ dérivée de $\bar{P}$ n'est autre que v_P^{-1} à une constante multiplicative près.

Après avoir considéré dans E, E^{P+}, E^{Po} et $E^{P>}$ pour un système de choix P donné, on définit à présent :

$$E^{P1} = \{x \in E \ / \ \exists y \in E;\ P(x,y) = 1\}.$$

Si Q est un système de choix tel que $Q(x,y) = P(y,x)$, quels que soient x et y, on pourra noter que $E^{P1} = E-E^{Q>}$

LEMME 11 Pour tout système de choix P sur U,

$$\forall E \in \Phi(U);\ (E-E^{P1})^{P>} = E-E^{P1}.$$

Preuve Par définition, $(E-E^{P1})^{P>} \subset E-E^{P1}$. Soit alors x un élément de $E-E^{P1}$. Si y appartient à $E-E^{P1}$, $P(y,x) < 1$, donc $P(x,y) > 0$, ce qui montre que x appartient à $(E-E^{P1})^{P>}$, et donc l'identité de $E-E^{P1}$ et de $(E-E^{P1})^{P>}$.

DEFINITION 11 Si P est un système de choix sur U, on dit qu'un m+1-uple $(x_0,..,x_j,..,x_m)$ d'éléments de U est un P-cycle lorsque

$$\forall j \in \{0,\ldots,m-1\};\ P(x_j,x_{j+1}) = 1$$

et $\quad P(x_m,x_0) = 1.$

S'il existe un P-cycle, on dit que P est grossièrement cyclique.

LEMME 12 Quel que soit E dans $\Phi(U)$, E^{P1} est strictement inclus dans E si et seulement si P n'est pas grossièrement cyclique.

Preuve laissée au lecteur. Il sera plus simple de montrer qu'il existe E tel que $E = E^{P1}$ si et seulement si P est grossièrement cyclique.

DEFINITION 12 Soit P un système de choix sur U, tel que :

(a) $E = E^{P>} \Longrightarrow E = E^{P+}$

(b) P n'est pas grossièrement cyclique.

On définit $\bar{P} = \{\bar{P}_E \ /\ E \in \Phi(U)\}$ de la façon suivante :

$$\forall x \in E^{P1};\ \bar{P}_E(x) = 0$$

$$\forall x \in E-E^{P1};\ \bar{P}_E(x) = \Big(\sum_{y \in E-E^{P1}} P_{E-E^{P1}}(x)/P_{E-E^{P1}}(y)\Big)^{-1}.$$

Notons tout d'abord que $\bar{P}$ est bien défini : comme P n'est pas grossièrement cyclique, $E-E^{P1}$ n'est pas vide (lemme 12) et $P_{E-E^{P1}}$ est donc défini. De plus, $(E-E^{P1})^{P>} = E-E^{P1}$, et d'après la condition (a), quel que soit y dans $E-E^{P1}$, $P_{E-E^{P1}}(y) > 0$. On peut d'ailleurs envisager une définition équivalente de $\bar{P}$: si $E = E^{P>}$, E^{P1} est vide, et dans ce cas :

$$\forall x \in E;\ \bar{P}_E(x) = \Big(\sum_{y \in E} P_E(x)/P_E(y)\Big)^{-1}, \tag{31}$$

c'est-à-dire $\bar{P}_E = \tilde{P}_E$. Autrement, si x est dans E^{P1}, $\bar{P}_E(x) = 0$ et

$$\forall x \in E-E^{P1};\ \bar{P}_E(x) = \bar{P}_{E-E^{P1}}(x). \tag{32}$$

THEOREME 8 $\bar{P}$ est un système de choix tel que

$$\forall x \in U;\ \forall y \in U;\ \bar{P}(x,y) = P(y,x)$$

et, si $E = E^{P>}$, $P_E(x)/P_E(y) = \bar{P}_E(y)/\bar{P}_E(x)$, $\quad (33)$

quels que soient x et y dans E.

Preuve Comme

$$\sum_{x\in E} \bar{P}_E(x) = \sum_{x\in E-E^{P1}} \bar{P}_{E-E^{P1}}(x)$$

et $(E-E^{P1})^{P>} = E-E^{P1}$, on peut se restreindre au cas où $E = E^{P>}$ pour montrer que $\sum_{x\in E} \bar{P}_E(x) = 1$. Or, dans ce cas, $\bar{P}_E = \tilde{P}_E$, et $\bar{P}$ est donc un système de choix. Ayant posé $\bar{P}(x,x) = 1/2$ et $\bar{P}(x,y) = \bar{P}_{\{x,y\}}(x)$ si x est distinct de y, on vérifie sans difficulté $\bar{P}(x,y) = P(y,x)$ car de nouveau $\bar{P}_{\{x,y\}} = \tilde{P}_{\{x,y\}}$ sachant que, si $E = \{x,y\}$, $E^{P+} \neq E \Longrightarrow E^{P+} = E^{P1}$. Enfin, si $E = E^{P>}$, d'après (31) :

$$P_E(x).\bar{P}_E(x) = P_E(x).(\sum_{y\in E} P_E(x)/P_E(y))^{-1} = (\sum_{y\in E} P_E(y)^{-1})^{-1},$$

qui ne dépend pas du choix de x dans E et prouve donc (33), sachant que de plus, $E = E^{P+} = E^{\bar{P}+}$ dans ce cas.

DEFINITION 13 On dit qu'un système de choix P sur U est distingué si, quel que soit E dans $\Phi(U)$,

$$E^{P>} = E^{P+} \tag{34}$$

$$\forall x\in E^{P+};\ P_E(x) = P_{E^{P+}}(x). \tag{35}$$

D'après le lemme 8, un système de choix R.I.C. est un système de choix distingué qui vérifie la condition (i) de l'axiome de choix de Luce.

LEMME 13 Si $\forall E\in\Phi(U)$; $E^{P>} = E^{P+}$, P vérifie les deux conditions (a) et (b) qui assurent l'existence de $\bar{P}$ (déf. 12).

Preuve La condition (a) est évidente. Pour montrer que P n'est pas grossièrement cyclique, il suffit de vérifier que E^{P1} est distinct de E (lemme 12). En supposant par récurrence ce résultat pour les parties strictes de E, on montrera que l'hypothèse $E = E^{P1}$ implique l'existence d'un élément t de E, tel que $(E-\{t\})^{P1} = E-\{t\}$, ce qui est absurde.

COROLLAIRE Si P est un système de choix distingué, $\bar{P}$ existe.

LEMME 14 $\bar{P}$ est un système de choix distingué.

Preuve Par construction de $\bar{P}$, $E^{\bar{P}+} = E-E^{P1}$. En vérifiant d'autre part l'identité de $E^{\bar{P}>}$ et de $E-E^{P1}$, on démontrera l'identité de $E^{\bar{P}>}$ et de $E^{\bar{P}+}$. Mais, par construction de $\bar{P}$:

$$\forall x\in E-E^{P1};\ \bar{P}_E(x) = \bar{P}_{E-E^{P1}}(x) = \bar{P}_{E^{\bar{P}+}}(x),$$

ce qui montre que $\bar{P}$ est un système de choix distingué.

COROLLAIRE <u>Si</u> $\bar{P}$ <u>existe</u>, $\bar{\bar{P}}$ <u>existe</u>.

LEMME 15 <u>Si</u> $\bar{P}$ <u>existe</u>, $\bar{\bar{P}}_E = P_E$ <u>si et seulement si</u>

$$E^{P>} = E^{P+} \text{ et } \forall x \in E^{P+};\ P_E(x) = P_{E^{P+}}(x). \qquad (36)$$

<u>Preuve</u> Si $\bar{\bar{P}}_E = P_E$, (36) se déduit immédiatement du fait que $\bar{\bar{P}}$ est un système de choix distingué (lemme 14).

Réciproquement, soit E tel que P vérifie (36). Deux cas doivent être envisagés :

(a) si $E = E^{P>}$, $E = E^{\bar{P}>}$ et, quel que soit x dans E :

$$\bar{\bar{P}}_E(x) = (\bar{P}_E(x) . \sum_{y \in E} \bar{P}_E(y)^{-1})^{-1},$$

c'est-à-dire, en remplaçant chaque $\bar{P}_E(y)$ par sa valeur en fonction de P_E, $\bar{\bar{P}}_E(x) = P_E(x)$.

(b) autrement, $(E^{P>})^{P>} = E^{P>}$, et comme précédemment :

$$\forall x \in E^{P>};\ \bar{\bar{P}}_{E^{P>}}(x) = P_{E^{P>}}(x),$$

identité que l'on transforme aisément en

$$\forall x \in E^{P>};\ \bar{\bar{P}}_E(x) = P_E(x).$$

On en déduit alors l'identité de $\bar{\bar{P}}_E$ et de P_E, sachant que $\bar{\bar{P}}_E(x) = P_E(x) = 0$ lorsque x n'appartient pas à $E^{P>}$.

COROLLAIRE $\bar{\bar{P}} = P$ <u>si et seulement si</u> P <u>est un système de choix distingué</u>.

De ce corollaire et du lemme 14, on déduit ainsi :

THEOREME 9 <u>La transformation de</u> P <u>en</u> $\bar{P}$ <u>est un renversement pour l'ensemble des systèmes de choix distingués et ne peut être un renversement que pour un ensemble de systèmes de choix distingués</u>.

Si P un système de choix qui vérifie le cas (i) de l'axiome de choix de Luce, P n'est pas nécessairement un système de choix distingué car rien n'est précisé des propriétés de P_E lorsque $E^{P>}$ est distinct de E. Par définition (cf. lemme 8), un système de choix distingué qui vérifie la condition (i) de l'axiome de choix est un système de choix R.I.C. Si P vérifie seulement la condition (i), $\bar{P}$ peut même ne pas être défini. On vérifie en effet aisément que $E^{P>} = E$ implique $E^{P+} = E$, mais P peut être grossièrement cyclique. Même si P n'est pas grossièrement cyclique, $\bar{\bar{P}}$ sera généralement distinct de P car $\bar{\bar{P}}$ est distingué. La transformation de P en $\bar{P}$ n'est donc pas un renversement pour l'ensemble des systèmes qui vérifient la condition (i) de l'axiome de Luce et ne sont pas grossièrement cycliques.

THEOREME 10 <u>Si P n'est pas grossièrement cyclique et vérifie la condition (i) de l'axiome de choix de Luce,</u> $\bar{P}$ <u>et</u> $\bar{\bar{P}}$ <u>sont des systèmes de choix R.I.C. et</u> $E = E^{P>} \Longrightarrow P_E = \bar{\bar{P}}_E$.

<u>Preuve</u> Si P vérifie le cas (i) de Luce et n'est pas grossièrement cyclique, $\bar{P}$ et $\bar{\bar{P}}$ sont définis. Ce sont d'ailleurs des systèmes de choix distingués (lemme 14). Si $E = E^{P>}$, $E = E^{P+}$, et d'après le lemme 15, $P_E = \bar{\bar{P}}_E$. Pour montrer enfin que $\bar{P}$ et $\bar{\bar{P}}$ sont des systèmes de choix R.I.C., il suffit de montrer que $\bar{P}$ vérifie la condition (i) de Luce. Or, si $E = E^{\bar{P}>}$ et $F \subset E$, $\bar{P}_F = \tilde{P}_F$, et conformément au théorème 3 :

$$\forall x \in F \subset E;\ \bar{P}_E(x) = \bar{P}_F(x).\bar{P}_E(F).$$

THEOREME 11 <u>La transformation de P en</u> $\bar{P}$ <u>est l'unique renversement pour les systèmes de choix R.I.C.</u>

<u>Preuve</u> Un système de choix R.I.C. P est un système de choix distingué qui vérifie la condition (i) de l'axiome de Luce. $\bar{P}$ est aussi un système de choix R.I.C. d'après le théorème qui précède et le lemme 14. De plus $P = \bar{\bar{P}}$ d'après le corollaire du lemme 15. Enfin $\bar{P}(x,y) = P(y,x)$ d'après le théorème 8.

Si P est un système de choix R.I.C., on a déjà noté que les probabilités de choix binaires définissent totalement P par l'identité

$$\forall x \in E^{P>};\ P_E(x) = \Big(\sum_{y \in E^{P>}} P(y,x)/P(x,y)\Big)^{-1}$$

(Gonzalez [2]). Par conséquent, si f est un renversement pour l'ensemble des systèmes de choix R.I.C., le seul fait que $\bar{P}(x,y) = f(P)(x,y)$, suffit à assurer l'identité de $\bar{P}$ et de f(P).

THEOREME 12 <u>La transformation de P en</u> $\bar{P}$ <u>est l'unique renversement pour les systèmes de choix de Luce.</u>

<u>Preuve</u> laissée au lecteur.

Rappelons que $v_P : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une <u>échelle</u> pour P si v_P vérifie des propriétés spécifiées qui mettent P et v_P en relation. Si toute autre échelle v'_P, vérifiant les mêmes propriétés, est de la forme $v'_P = c.v_P$ (c étant une constante strictement positive), on dit que v_P est une <u>échelle de rapports</u>. On sait (Luce [3], Luce et Suppes [5]) que, si P est un <u>système de Luce partout incertain</u>, il existe une échelle de rapports v_P telle que :

$$\forall E \in \Phi(\mathcal{U});\ \forall x \in E;\ P_E(x) = v_P(x)/\sum_{y \in E} v_P(y).$$

v_P est construite ici très simplement, en choisissant un élément a de U et en posant :

$$\forall x \in U;\ v_P(x) = P(x,a)/P(a,x).$$

Ce résultat peut être étendu à des systèmes de choix qui ne sont que localement incertains mais toutefois <u>connexes</u> :

DEFINITION 14 Soit P un système de choix sur U. On dit qu'un m+1-uple $(t_0,..,t_j,..,t_m)$ d'éléments de U est une <u>chaîne</u> P-<u>incertaine</u> de x à y lorsque :

$$t_0 = x,\ t_m = y$$

et $\forall j \in \{0,1,..,m-1\};\ 0 < P(t_j,t_{j+1}) < 1,$

et que P est un <u>système de choix connexe</u> si, quels que soient x et y dans U, il existe une chaîne P-incertaine de x à y.

On rappellera ici les résultats suivants (Gonzalez [2], théor. 2 et 4) :

LEMME 16

(a) <u>Il existe une échelle de rapports strictement positive</u> v_P <u>telle que</u>

$$E = E^{P>} \Longrightarrow (\forall x \in E;\ P_E(x) = v_P(x)/\sum_{y \in E} v_P(y)),$$

<u>si et seulement si</u> P <u>est un système de choix connexe qui vérifie la condition (i) de l'axiome de choix de Luce</u>.

(b) <u>Il existe une échelle de rapports strictement positive</u> v_P <u>telle que</u>

$$\forall E \in \Phi(U);\ \forall x \in E^{P>};\ P_E(x) = v_P(x)/\sum_{y \in E^{P>}} v_P(y),$$

<u>si et seulement si</u> P <u>est un système de choix R.I.C. connexe</u>.

v_P peut être construite de la façon suivante : on fixe un élément a de U. Si $(t_0,..,t_j,..,t_m)$ est une chaîne P-incertaine de x à a, on pose :

$$v_P(x) = \prod_{j=0}^{m-1} \frac{P(t_j,t_{j+1})}{P(t_{j+1},t_j)}. \qquad (37)$$

On montre que cette valeur ne dépend pas du choix de la chaîne P-incertaine de x à a, mais seulement du choix de a.

Notons ici que, si P est un système de choix connexe, tout système Q tel que Q(x,y) = P(y,x), est aussi connexe. En particulier, si P est un système de choix connexe qui vérifie le cas (i) de l'axiome de Luce et n'est pas grossièrement cyclique, $\bar{P}$ est un système de choix R.I.C. connexe.

THEOREME 13 <u>Si</u> P <u>est un système de choix connexe qui vérifie la condition (i) de l'axiome de choix de Luce et n'est pas grossièrement cyclique, il existe une constante strictement positive</u> k, <u>telle que</u> $v_{\bar{P}} = k.v_P^{-1}$.

<u>Preuve</u> D'après le théorème 10, $\bar{P}$ est un système de choix R.I.C. connexe. Il existe donc des échelles de rapports v_P et $v_{\bar{P}}$ qui vérifient la condition (a) du lemme 16. D'après (37), si a est un élément fixé de *U*, et $(t_0,..,t_j,..,t_m)$ est une chaîne P-incertaine de x à a, il existe une constante α strictement positive, indépendante de x, telle que

$$v_P(x) = \alpha.\prod_{j=0}^{m-1} \frac{P(t_j,t_{j+1})}{P(t_{j+1},t_j)} = \alpha.\prod_{j=0}^{m-1} \frac{\bar{P}(t_{j+1},t_j)}{\bar{P}(t_j,t_{j+1})} .$$

Mais $(t_0,..,t_j,..,t_m)$ est aussi une chaîne $\bar{P}$-incertaine de x à a. Il existe donc une constante strictement positive β telle que

$$v_{\bar{P}}(x) = \beta.\prod_{j=0}^{m-1} \frac{\bar{P}(t_j,t_{j+1})}{\bar{P}(t_{j+1},t_j)} ,$$

et par conséquent

$$v_{\bar{P}}(x) = \alpha.\beta^{-1}.v_P(x)^{-1}.$$

On pourra noter aussi que, dans les conditions du théorème 13, $\bar{\bar{P}}$ est généralement distinct de P mais $v_{\bar{\bar{P}}}$ et v_P sont identiques à une constante multiplicative près.

Il convient ici de comparer les transformations $\tilde{P}$ et $\bar{P}$ de P quant à l'existence d'une échelle de rapports. On a vu (théor. 6) qu'en se limitant aux systèmes de choix R.I.C., $\tilde{P}$ n'était pratiquement un renversement que pour les systèmes R.I.C. absorbants. Or, les seuls systèmes R.I.C. absorbants qui soient aussi connexes, sont les systèmes partout incertains. Si en effet P est connexe, $(t_0,..,t_j,..,t_m)$ est une chaîne P-incertaine de x à y, et $P(t_0,t_j)$ est certain (égal à 0 ou à 1), comme $P(t_j,t_{j+1})$ est incertain par définition, $P(t_0,t_{j-1})$ est aussi certain d'après (28). Comme $P(t_0,t_1)$ est incertain, on en conclut que $P(t_0,t_m)$, c'est-à-dire P(x,y) est incertain, donc $E = E^{P>}$, quel que soit E, ou $E = E^{P+}$ si P est un système de choix R.I.C. Avec le lemme 16, il apparaît ainsi que les seuls systèmes de choix R.I.C. pour lesquels $\tilde{P}$ est un renversement, n'admettent pas d'échelle de rapports associée v_P, sauf s'ils sont partout incertains.

Le tableau III décrit un système de choix P sur $U = \{a,b,c,d\}$. On pourra vérifier que P est un système de Luce connexe. En se centrant sur a, on note que :

$v_P(a) = 1$

$v_P(b) = P(b,a)/P(a,b) = 2$

Tableau III <u>Un système de choix de Luce connexe,</u> P

a	b	c	d	
0	2/9	3/9	4/9	U
	2/9	3/9	4/9	A = {b,c,d}
0		3/7	4/7	B = {a,c,d}
0	1/3		2/3	C = {a,b,d}
0	2/5	3/5		D = {a,b,c}
1/3	2/3			{a,b}
0		1		{a,c}
0			1	{a,d}
	2/5	3/5		{b,c}
	1/3		2/3	{b,d}
		3/7	4/7	{c,d}

$v_P(c) = \dfrac{P(c,b)}{P(b,c)} \cdot \dfrac{P(b,a)}{P(a,b)} = 3$, car (c,b,a) est une chaîne P-incertaine de c à a.

$v_P(d) = \dfrac{P(d,b)}{P(b,d)} \cdot \dfrac{P(b,a)}{P(a,b)} = 4$, car (d,b,a) est une chaîne P-incertaine de d à a.

Le tableau IV décrit le système de choix $\bar{P}$ associé. Comme $U^{P1} = \{c,d\}$, $\bar{P}_U(c) = \bar{P}_U(d) = 0$, et comme $U - U^{P1} = \{a,b\}$, $\bar{P}_U(a) = \bar{P}(a,b) = P(b,a) = 2/3$, $\bar{P}_U(b) = \bar{P}(b,a) = P(a,b) = 1/3$. Si A = {b,c,d}, A^{P1} est vide et :

$$\bar{P}_A(b) = \left(\frac{P_A(b)}{P_A(b)} + \frac{P_A(b)}{P_A(c)} + \frac{P_A(b)}{P_A(d)}\right)^{-1} = (1+2/3+1/2)^{-1} = 6/13$$

$$\bar{P}_A(c) = \left(\frac{P_A(c)}{P_A(b)} + \frac{P_A(c)}{P_A(c)} + \frac{P_A(c)}{P_A(d)}\right)^{-1} = 4/13$$

$$\bar{P}_A(d) = \left(\frac{P_A(d)}{P_A(b)} + \frac{P_A(d)}{P_A(c)} + \frac{P_A(d)}{P_A(d)}\right)^{-1} = 3/13.$$

Tableau IV <u>Le système de choix</u> $\bar{P}$ <u>associé au système</u> P <u>du tableau III</u>

a	b	c	d	
2/3	1/3	0	0	*U*
	6/13	4/13	3/13	A = {b,c,d}
1		0	0	B = {a,c,d}
2/3	1/3		0	C = {a,b,d}
2/3	1/3	0		D = {a,b,c}
2/3	1/3			{a,b}
1		0		{a,c}
1			0	{a,d}
	3/5	2/5		{b,c}
	2/3		1/3	{b,d}
		4/7	3/7	{c,d}

Dans B = {a,c,d}, B^{P1} = {c,d}, donc $B-B^{P1}$ = {a} et $\bar{P}_B(a) = 1$, $\bar{P}_B(c) = 0$ et $\bar{P}_B(d) = 0$. etc.

Pour construire $v_{\bar{P}}$, on peut fixer d, auquel cas :

$$v_{\bar{P}}(d) = 1 = 4/v_P(d)$$
$$v_{\bar{P}}(c) = \bar{P}(c,d)/\bar{P}(d,c) = 4/3 = 4/v_P(c)$$
$$v_{\bar{P}}(b) = \bar{P}(b,d)/\bar{P}(d,b) = 2 = 4/v_P(b)$$
$$v_{\bar{P}}(a) = \frac{\bar{P}(a,b)}{\bar{P}(b,a)}\cdot\frac{\bar{P}(b,d)}{\bar{P}(d,b)} = 4 = 4/v_P(a).$$

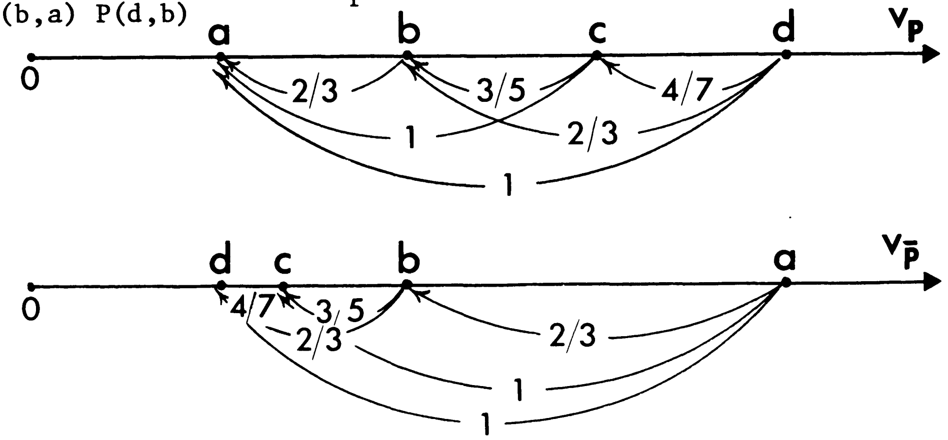

Figure 1. <u>Représentation des échelles</u> v_P <u>et</u> $v_{\bar{P}}$ <u>associées à</u> P <u>et à</u> $\bar{P}$. <u>Les probabilités de choix binaires sont figurées par une flèche orientée.</u>

6. RENVERSEMENT ET PROBABILITE DE CLASSEMENT D'OBJETS

La question du renversement d'un système de choix a parfois été abordée par le biais de probabilités définies sur les classements d'éléments de U.
Si $|E|$ est le nombre d'éléments de E, un classement de E est une application bijective de $\{1,2,..,|E|\}$ dans E. Un classement ρ de E peut aussi être défini comme un mot $\rho_1\rho_2...\rho_j...\rho_{|E|}$, tel que $\forall j\in\{1,2,..,|E|\}$; $\rho_j = \rho(j)$.
ρ_j (resp. $\rho(j)$) désigne l'élément de E qui a le rang j dans le classement ρ.
L'ensemble des $|E|!$ classements de E sera noté R(E).

On peut envisager de deux façons l'existence de probabilités sur les classements des sous-ensembles de U : dérivées d'un système initial de choix P ou définies directement comme système descriptif de classements opérés par un sujet. Dans ce dernier cas, la tâche de classement peut d'ailleurs consister en une suite de choix successifs dans des ensembles emboîtés : au classement ρ de E correspond le choix de ρ_1 dans E, de ρ_2 dans $E-\{\rho_1\}$,.., de ρ_j dans $\{\rho_j,...,\rho_{|E|}\}$ et enfin de $\rho_{|E|-1}$ contre $\rho_{|E|}$. En supposant les choix successifs indépendants, une telle procédure suggère que la probabilité du classement ρ n'est autre que

$$P_E(\rho_1).P_{E-\{\rho_1\}}(\rho_2)...P_{\{\rho_j,..,\rho_{|E|}\}}(\rho_j)...P(\rho_{|E|-1},\rho_{|E|}).$$

Mais on peut tout aussi bien définir directement de cette façon une loi de probabilité $p_{R(E)}$ sur R(E), dérivée de P. C'est ce que l'on appellera le système des classements sur U par P.

DEFINITION 15 Si P est un système de choix sur U, on appelle système des classements sur U par P, l'ensemble $p = \{p_{R(E)}\ /\ E\in\Phi(U)\}$, défini pour E dans $\Phi(U)$ et ρ dans R(E), par

$$p_{R(E)}(\rho) = \prod_{j=1}^{|E|} P_{\{\rho_j,..,\rho_{|E|}\}}(\rho_j).$$

$p_{R(E)}$ qui induit une loi de probabilité sur R(E), a une propriété intéressante : $P_E(x)$ est la probabilité que x soit classé premier dans E, c'est-à-dire $\sum_{\rho\in R(E-\{x\})} p_{R(E)}(x\rho)$, $x\rho$ étant la classement σ de E défini par $\sigma_1 = x$ et $\sigma_j = \rho_{j-1}$, quel que soit j variant de 2 à $|E|$:

LEMME 17 *Pour tout système de choix* P, $p_{R(E)}$ *induit une loi de probabilité sur* R(E) *et, quel que soit* x *dans* E,

$$P_E(x) = \sum_{\rho\in R(E-\{x\})} p_{R(E)}(x\rho).$$

Preuve laissée au lecteur.

$P_E(x)$ étant la probabilité $p_{R(E)}$ de classer x premier dans E, on est tout naturellement incliné à croire qu'un système de choix P^* tel que $P^*_E(x)$ soit la probabilité $p_{R(E)}$ de classer x dernier, est un renversement potentiel de P.

DEFINITION 16 Si P est un système de choix sur U, $P^* = \{P^*_E \ / \ E\in\Phi(U)\}$ est le système de choix défini par

$$P^*_E(x) = \sum_{\rho\in R(E-\{x\})} p_{R(E)}(\rho x).$$

P^* qui est bien sûr un système de choix, permet à son tour de définir le système $p^* = \{p^*_{R(E)} \ / \ E\in\Phi(U)\}$ des classements par P^*, par

$$p^*_{R(E)}(\rho) = \prod_{j=1}^{|E|} P^*_{\{\rho_j,\ldots,\rho_{|E|}\}}(\rho_j).$$

Si, d'après le lemme 17,

$$P^*_E(x) = \sum_{\rho\in R(E-\{x\})} p^*_{R(E)}(x\rho),$$

$P_E(x)$ n'est pas nécessairement la probabilité $p^*_{R(E)}$ de classer x dernier dans E. Or, par définition,

$$P^{**}_E(x) = \sum_{\rho\in R(E-\{x\})} p^*_{R(E)}(\rho x),$$

ce qui montre que P^{**} est généralement distinct de P, auquel cas P^* ne constitue pas un renversement pour P. Remarquons cependant que, quels que soient x et y dans U, $P^*(x,y) = P(y,x)$.

Le théorème d'impossibilité de Luce et Suppes ([5], 1965 p. 357) montre en fait que le seul système de Luce partout incertain tel que $P^{**} = P$ est le système des choix indifférenciés défini précédemment. Il existe cependant un autre système de Luce qui satisfait cette condition, que l'on pourrait appeler un système de choix certains, défini par l'existence d'un ordre total R sur U tel que, pour tout E dans $\Phi(U)$, $P_E(x) = 1$ si xRy quel que soit y dans E et $P_E(x) = 0$ autrement. Assez paradoxalement, il s'agit bien là d'un système de choix de Luce (absorbant). Le système des classements par P est alors défini par

$$p_{R(E)}(\rho) = 1 \text{ si } i \le j \Longleftrightarrow \rho_i R \rho_j$$

et

$$p_{R(E)}(\rho) = 0 \text{ autrement},$$

d'où l'on déduit immédiatement que P^* est aussi un système de choix certains (relatif à l'ordre total dual de R) et que $P^{**} = P$.

Si ρ est un classement de E, notons ρ^* le classement inverse de ρ défini par $\rho^*_j = \rho_{|E|-j+1}$ pour tout j valant $1,..,|E|$. Marley [7] précise quels sont les systèmes de choix P tels que $p_{R(E)}(\rho) = p^*_{R(E)}(\rho^*)$ (et en particulier tels que $P = P^{**}$). L'analyse qu'il développe sera ici largement utilisée.

DEFINITION 17 (Marley [6], 1965) On dit qu'un système de choix P est un <u>système de Q-élimination</u> s'il existe un système de choix Q tel que, pour tout E dans $\Phi(\mathcal{U})$ et x dans E :

$$P_E(x) = \sum_{y\in E-\{x\}} Q_E(y).P_{E-\{y\}}(x).$$

LEMME 18 P^* <u>est un système de P-élimination</u>.

<u>Preuve</u> Par définition

$$P^*_E(x) = \sum_{\rho\in R(E-\{x\})} p_{R(E)}(\rho x),$$

c'est-à-dire

$$P^*_E(x) = \sum_{y\in E-\{x\}}\sum_{\rho\in R(E-\{x,y\})} p_{R(E)}(y\rho x),$$

ou encore

$$P^*_E(x) = \sum_{y\in E-\{x\}} P_E(y).\sum_{\rho\in R(E-\{x,y\})} p_{R(E-\{y\})}(\rho x),$$

ou, par définition de P^* :

$$P^*_E(x) = \sum_{y\in E-\{x\}} P_E(y).P^*_{E-\{y\}}(x).$$

LEMME 19 $P = P^{**}$ <u>si et seulement si</u> P <u>est un système de</u> P^*<u>- élimination</u>.

<u>Preuve</u> D'après le lemme précédent, P^{**} est un système de P^*-élimination. Si $P = P^{**}$, P est donc un système de P^*-élimination.
Réciproquement, si P est un système de P^*-élimination, on montre $P_E = P^{**}_E$ en supposant $P_F = P^{**}_F$ pour toute partie stricte F de E.

THEOREME 14 <u>La transformation de P en P^* est un renversement pour l'ensemble des systèmes de P^*-élimination et ne peut être un renversement que pour des systèmes de P^*-élimination.</u>

<u>Preuve</u> Lemmes 18 et 19.

Comment caractériser les systèmes de P^*-élimination? L'analyse de Marley [7] s'avère ici particulièrement utile mais exige que l'on se restreigne à une classe de systèmes de choix qui ne sont pas grossièrement cycliques (cf. définition 11).

Soit E une partie finie non vide de U. Définissons :

$$\forall x\in E;\ f_P(x,E) = 2.\prod_{y\in E} P(x,y),$$

ou de façon équivalente :

$$f_P(x,\{x\}) = 1$$

et, si $|E| > 1$:

$$f_P(x,E) = \prod_{y\in E-\{x\}} P(x,y).$$

Définissons de plus F_P par

$$\forall x\in U;\ F_P(x) = 1$$

et, si $\rho = \rho_1\rho_2\ldots\rho_{|E|}$ est un classement de E ($|E| > 1$) :

$$F_P(\rho) = f_P(\rho_1,E).F_P(\rho_2\ldots\rho_{|E|}),$$

$\rho_2\ldots\rho_{|E|}$ étant un classement de $E-\{\rho_1\}$. Définissons enfin l'application M_P de $\Phi(U)$ par :

$$\forall E\in\Phi(U);\ M_P(E) = \sum_{\rho\in R(E)} F_P(\rho).$$

LEMME 20 Si P n'est pas grossièrement cyclique,

$$\forall E\in\Phi(U);\ M_P(E) > 0.$$

Preuve Marley [7], lemme 2 p. 316 (Marley suppose en fait une propriété plus forte sur P, à savoir ($P(x,y) = 1$ et $P(y,z) = 1$) $\Longrightarrow$ $P(x,z) = 1$, qui ne s'avère pas nécessaire).

DEFINITION 18 (Marley [7], 1968) On dit qu'un système de choix P sur U est un système de choix de Marley si P n'est pas grossièrement cyclique et si, quel que soit E dans $\Phi(U)$ et x dans E ($|E| > 1$),

$$P_E(x) = f_P(x,E).M_P(E-\{x\})/M_P(E). \tag{38}$$

THEOREME 15 Si P n'est pas grossièrement cyclique, P est un système de P^*-élimination si et seulement si c'est un système de choix de Marley.

Preuve Marley [7], théorème 7 p. 326, en notant toutefois qu'il n'est pas nécessaire de supposer U fini et qu'il suffit que (38) soit bien défini, c'est-à-dire $M_P(E) > 0$.

THEOREME 16 La transformation de P en P^* est l'unique renversement pour les systèmes de choix de Marley.

Preuve Comme $P^*(x,y) = P(y,x)$, si P n'est pas grossièrement cyclique, P^* ne l'est pas non plus et les théorèmes 14 et 15 assurent que P^* est un renversement pour les systèmes de choix de Marley.

Notons d'autre part que, si P est un système de Marley, $P_E(x)$ est fonction des probabilités de choix binaires $P(y,z)$. Celles-ci caractérisent donc totalement un système de choix de Marley. Mais, si f est un renversement pour les systèmes de choix de Marley, f(P) doit être un système de Marley, et comme $f(P)(x,y) = P^*(x,y)$, on en déduit immédiatement l'identité de f(P) et de P^*.

La définition 16 de P^* permet d'écrire immédiatement

$$\sum_{\rho\in R(E-\{x\})} p^*_{R(E)}(x\rho) = \sum_{\rho\in R(E-\{x\})} p_{R(E)}(\rho x), \tag{39}$$

et P est un système de P^*-élimination si et seulement si on observe la propriété symétrique

$$\sum_{\rho\in R(E-\{x\})} p^*_{R(E)}(\rho x) = \sum_{\rho\in R(E-\{x\})} p_{R(E)}(x\rho). \tag{40}$$

(39) et (40) sont un cas particulier de cette propriété apparemment plus forte :

$$p^*_{R(E)}(\rho^*) = p_{R(E)}(\rho),$$

ρ^* étant le classement inverse de ρ. En fait, elle est équivalente à (40) dans le cas de systèmes de choix qui ne sont pas grossièrement cycliques, ainsi que le montre le théorème suivant :

THEOREME 17 Si P est un système de choix de Marley,

$$\forall E\in\Phi(\mathcal{U});\ \forall\rho\in R(E);\ p_{R(E)}(\rho) = p^*_{R(E)}(\rho^*).$$

Preuve Avec le théorème 8 de Marley [7], il suffit ici de montrer que

$$p_{R(E)}(\rho) = F_P(\rho)/M_P(E).$$

Si E ne contient qu'un seul élément, c'est vrai. On peut donc par induction, supposer le résultat pour toute partie stricte de E. Soit ρ un classement de E et $\sigma = \rho_2\ldots\rho_{|E|}$ un classement de $E-\{\rho_1\}$. Par définition

$$p_{R(E)}(\rho) = P_E(\rho_1).p_{R(E-\{\rho_1\})}(\sigma)$$

ou, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$p_{R(E)}(\rho) = P_E(\rho_1).F_P(\sigma)/M_P(E-\{\rho_1\}).$$

P étant un système de choix de Marley,

$$P_E(\rho_1) = f_P(\rho_1,E).M_P(E-\{\rho_1\})/M_P(E).$$

Par conséquent,

$$p_{R(E)}(\rho) = f_P(\rho_1,E).F_P(\sigma)/M_P(E),$$

c'est-à-dire

$$p_{R(E)}(\rho) = F_P(\rho_1\sigma)/M_P(E),$$

d'où le résultat sachant que $\rho = \rho_1\sigma$.

7. CONCLUSION

Ce travail ne prétend pas apporter de solution générale à la question de l'inversion du pôle de la réponse comparative. Il doit plutôt être compris comme un essai d'analyse théorique de ce que pourraient être les relations de deux systèmes de choix qui réfèrent à des pôles inverses.

La notion de renversement ne fait à aucun moment appel à l'hypothèse d'une stratégie ou d'un processus de choix relatif au pôle de la réponse. C'est là une caractéristique de la plupart des théories probabilistes du choix qui envisagent uniquement les propriétés d'un système permettant par exemple l'attribution d'une valeur (numérique ou aléatoire) à chaque élément de l'univers U. Cette perspective a guidé l'élaboration de certaines exigences qui peuvent lier un système de choix P à son renversement Q. La première (qui aboutit à la construction de $\tilde{P}$ et de $\bar{P}$), pose que, dans tout ensemble P-incertain,

$$Q_E(x)/Q_E(y) = P_E(y)/P_E(x).$$

La seconde (qui mène à P^*), revient à exiger que P et Q soient des systèmes de choix concordants (Marley [7]), c'est-à-dire soient tels que

$$P_E(x).Q_{E-\{x\}}(y) = Q_E(y).\ P_{E-\{y\}}(x)$$

ou, si l'on se situe dans des ensembles P-incertains,

$$P_E(x)/P_{E-\{y\}}(x) = Q_E(y)/Q_{E-\{x\}}(y).$$

A vrai dire, rien ne permet d'affirmer qu'une des deux propriétés est plus "raisonnable" que l'autre.

A l'inverse, une théorie comme celle d'élimination par aspects de Tversky [8], [9], suppose l'existence d'une stratégie séquentielle qui rendrait compte des probabilités de choix. La question de l'inversion du pôle de la réponse, peut alors devenir celle de ses conséquences sur la nature de la stratégie ou du processus de comparaison mis en oeuvre. Mais il n'est pas certain que cette seconde perspective mène à la notion de renversement telle qu'elle a été envisagée ici.

Si la transformation de P en $\bar{P}$ est un renversement pour une classe plus large de systèmes de choix que celle de P en P^*, il conviendrait sans doute de s'interroger sur ce qui distingue $\bar{P}$ de P^*. Autrement dit, $\bar{P}$ et P^* pourraient-ils, et dans quels cas, être des systèmes de choix suffisamment distincts pour que des réponses de choix exprimées selon des pôles inverses, permettent de départager de tels modèles? Cette question n'est abordée ici que par un exemple. Le tableau V décrit les deux transformations $\bar{P}$ et P^* du

Tableau V <u>Transformations $\bar{P}$ et P^* du système de choix P du tableau III. Dans chaque case, $\bar{P}_E(x)$ est au-dessus de la diagonale; $P^*_E(x)$ en-dessous. Les valeurs reportées sont approchées.</u>

	a	b	c	d
U	.67 / .84	.33 / .16	0 / 0	0 / 0
A = {b,c,d}		.46 / .49	.31 / .30	.23 / .21
B = {a,c,d}	1 / 1		0 / 0	0 / 0
C = {a,b,d}	.67 / .78	.33 / .22		0 / 0
D = {a,b,c}	.67 / .80	.33 / .20	0 / 0	
{a,b}	.67 / .67	.33 / .33		
{a,c}	1 / 1		0 / 0	
{a,d}	1 / 1			0 / 0
{b,c}		.60 / .60	.40 / .40	
{b,d}		.67 / .67		.33 / .33
{c,d}			.57 / .57	.43 / .43

Tableau VI P et P^{**} en valeurs approchées. Dans chaque case, $P_E(x)$ est au-dessus de la diagonale et $P^{**}{}_E(x)$ en-dessous.

	a	b	c	d
U	0 / 0	.22 / .15	.33 / .35	.45 / .50
A = {b,c,d}		.22 / .19	.33 / .33	.45 / .48
B = {a,c,d}	0 / 0		.43 / .43	.57 / .57
C = {a,b,d}	0 / 0	.33 / .26		.67 / .74
D = {a,b,c}	0 / 0	.40 / .32	.60 / .68	
{a,b}	.33 / .33	.67 / .67		
{a,c}	0 / 0		1 / 1	
{a,d}	0 / 0			1 / 1
{b,c}		.40 / .40	.60 / .60	
{b,d}		.33 / .33		.67 / .67
{c,d}			.43 / .43	.57 / .57

système de choix P du tableau III ci-dessus. On note en particulier l'identité de $\bar{P}(x,y)$ avec $P^*(x,y)$ et l'équivalence

$$\bar{P}_E(x) = 0 \Longleftrightarrow P^*{}_E(x) = 0.$$

Cette dernière propriété résulte du fait que $E^{P+} = E^{P>}$ et donc $E^{P^*>} = E^{P^*+}$. On remarque cependant que $\bar{P}_U$ et $P^*{}_U$, ainsi que $\bar{P}_D$ et $P^*{}_D$ diffèrent assez sensiblement.

P n'étant pas un système de choix de Marley, P^{**} est distinct de P alors que $\bar{\bar{P}} = P$. Le tableau VI permet de comparer P et P^{**}. On note de nouveau les deux propriétés

$$P(x,y) = P^{**}(x,y) \quad \text{et} \quad P_E(x) = 0 \Longleftrightarrow P^{**}{}_E(x) = 0.$$

Globalement, P^{**} semble en fin de compte être une assez bonne approximation de P.

BIBLIOGRAPHIE

[1] FECHNER G.T., *Vorschule der Aesthetik*, Leipzig, Breitkopf & Härtel, 1876.

[2] GONZALEZ M., "Choix certains et incertains : réexamen de l'axiome de choix de Luce pour une mesure des valeurs", *Math. Sci. hum.*, 71 (1980), 5-38.

[3] LUCE R.D., *Individual Choice Behavior*, New York, Wiley, 1959.

[4] LUCE R.D., GALANTER E., "Discrimination", in *Handbook of Mathematical Psychology*, Vol. 1, R.D. Luce, R.R. Bush, E. Galanter (eds), New York, Wiley, 1963.

[5] LUCE R.D., SUPPES P., "Preference, Utility and Subjective Probability", in *Handbook of Mathematical Psychology*, Vol. 3, R.D. Luce, R.R. Bush, E. Galanter (eds), New York, Wiley, 1965.

[6] MARLEY A.A.J., "The Relation between the Discard and Regularity conditions for Choice Probabilities", *J. math. Psychol.*, 2 (1965), 242-253.

[7] MARLEY A.A.J., "Some Probabilistic Models of Simple Choice and Ranking", *J. math. Psychol.*, 5 (1968), 311-332.

[8] TVERSKY A., "Elimination by Aspects : A Theory of Choice", *Psychol. Rev.*, 79 (1972), 281-299.

[9] TVERSKY A., "Choice by Elimination", *J. math. Psychol.*, 9 (1972), 341-367.

[10] TVERSKY A., "Features of Similarity", *Psychol. Rev.*, 84 (1977), 327-352.