MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

A. HANEN

Quelques modèles probabilistes sous-jacents à la théorie des tests psychologiques

Mathématiques et sciences humaines, tome 72 (1980), p. 5-44

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1980__72__5_0>

Math. Sci. hum. (*18*^{e} année, n°72, *1980*, p.5-44)

QUELQUES MODELES PROBABILISTES SOUS-JACENTS A LA THEORIE DES TESTS PSYCHOLOGIQUES

A. HANEN *

Introduction.

Ce travail résulte d'une lecture de l'ouvrage de Guilford Psychometrics methods [1] qui est un des ouvrages classiques de référence sur la Théorie des tests psychologiques, où sont présentés de manière éparse divers coefficients de fidélité, calculés sous des hypothèses paraissant, lorsqu'elles sont explicitées, a priori assez peu naturelles ; nous avons voulu dans ce travail montrer l'unité de ces formules et dégager les modèles probabilistes qui leurs sont sous-jacents, qui reposent tous sur un modèle de passation d'un test par un sujet donné, les épreuves constituant le test apparaissant au sujet comme des expériences aléatoires indépendantes ; ce modèle a été introduit de manière un plus sophistiquée dans l'ouvrage de Lord et Novick [3] Statistical Theories of mental test scores (1968), dont nous avons eu connaissance en cours de rédaction de ce travail ; la plupart des résultats de la première partie de cet article figurent, sous une forme ou sous une autre, dans cet ouvrage ; nous avons toutefois pensé que la rédaction proposée ici, utilisant un minimum de concepts probabilistes élémentaires, pourrait rendre quelques services.

Dans la seconde partie de notre travail, nous donnons un modèle markovien de passation d'un test formé d'items notés 0 ou 1, pouvant prendre en compte les phénomènes de transfert d'apprentissage qui peuvent apparaître dans le

* Université de Paris-X, Nanterre, Département de Mathématiques.

déroulement d'un test. Ce modèle permet de donner un coefficient de fidélité étendant celui de Kuder-Richardson [2], que l'on peut aisément estimer lorsque le nombre d'items constituant le test est grand.

Notations. Soit X une variable aléatoire.
Son espérance mathématique sera désignée par le symbole $E(X)$.
Sa variance par le symbole $\sigma^2(X)$, son écart-type par $\sigma(X)$.

Si Y est une autre variable aléatoire, nous désignerons par $cov(X,Y)$ la covariance des variables X et Y, par $\rho(X,Y)$ leur coefficient de corrélation (rappelons que $cov(X,Y) = \rho(X,Y)\sigma(X).\sigma(Y)$).

1 - La passation d'un test par un sujet.

Considérons un test, noté par exemple sur l'échelle de notes à valeurs entières allant de la plus petite note possible a à la plus grande possible b.

Supposons qu'un sujet passe le test et obtienne la note x ; on peut concevoir que l'obtention de cette note dépende de l'énoncé du test, de ses conditions de passation et de notation, enfin de l'état psychologique du sujet ; tous ces facteurs, qui participent à la détermination de la note, peuvent avoir une certaine part de variabilité :

- l'énoncé du test (si on envisage un énoncé présentant des items ou tâches équivalentes, constituant une forme parallèle à ce test)
- les conditions de passation, susceptibles par exemple d'être influencées par des bruits extérieurs
- les conditions de notation, la personnalité du correcteur pouvant intervenir dans l'établissement de la note
- l'état psychologique du sujet, pouvant être éminemment variable.

Si l'on pouvait répéter la passation sur le sujet, celui-ci pourrait alors obtenir une note différente de x ; on se heurte toutefois, pour une telle répétition, à un obstacle réel : le transfert d'apprentissage, qui fait qu'un sujet ayant déjà passé un test peut, s'il le repasse peu de temps après, être influencé par la précédente passation ; aussi doit-on, si l'on désire parler de passation répétée d'un test par un sujet donné, éliminer le transfert d'apprentissage ; cela peut se faire de plusieurs manières, qui précisent pour chacune d'elle le terme de répétition.

- Une première manière est tout simplement de faire corriger le test par un autre correcteur : c'est cela que nous appellerons répétition de la passation, le coefficient de fidélité obtenu, que nous définirons plus loin, sera la fidélité inter-correcteurs.

- Une seconde manière est de constituer un test de paires de sous-tests équivalents ; si l'on choisit au hasard un élément de chaque paire, les éléments choisis forment un sous-test T_1, les autres un sous-test T_2, forme parallèle à T_1 ; si l'on fait passer le test T à un sujet, tout se passe comme si on avait répété la passation de T_1, en tenant compte comme facteur de variabilité du seul énoncé de T_1, les autres facteurs de variabilité étant maintenus stables, T_1 et T_2 sont passés simultanément, il ne peut y avoir de transfert d'apprentissage ; dans ce cas la passation de T équivaut à la répétition de T_1 et la fidélité obtenue sera dite calculée par " split half " (partage du test en deux moitiés).
- Une troisième manière consiste à répéter la passation du test T au bout d'un temps à la fois suffisamment long pour éliminer le transfert d'apprentissage et suffisamment court pour que le sujet n'ait pas pu beaucoup évoluer du point de vue de l'objet psychologique que l'on cherche à atteindre ; la variabilité est plus grande, et la fidélité obtenue s'appelle fidélité test-retest.
- Une quatrième manière est analogue à la troisième, excepté le fait qu'on fait repasser au sujet non le test T, mais une forme parallèle T' ; la variabilité est encore plus grande que pour la troisième manière, et la fidélité obtenue est appelée fidélité formes parallèles.

On voit que, quelle que soit la manière choisie pour définir la répétition d'une passation, la passation d'un test par un sujet est assimilée à une expérience aléatoire, comme le jet d'un dé pipé, susceptible de répétitions indépendantes.

L'univers des possibles de cette expérience est alors l'échelle des notes possibles *i.e.* l'intervalle $[a,b]$, chaque note x de cet intervalle étant alors affectée d'une probabilité $P(x)$; la note du sujet est alors la variable aléatoire X définie comme l'application de $U = [a,b]$ dans $R \xrightarrow{x} X(x) = x$, sa loi de probabilité est P .

DEFINITION 1.1. *On appelle " vraie " note du sujet le nombre*

$$v = E(X) = \sum_{x=a}^{x=b} x\, P(x) .$$

On appelle erreur la variable centrée associée à X

$$Z = X - v .$$

On a donc pour un sujet donné $X = v + Z$, et $E(Z) = 0$.

La vraie note du sujet apparait donc comme la limite vers laquelle tendrait la moyenne des notes qu'il obtiendrait aux sens définis ci-dessous.

A chaque mode de définition du terme répétition correspond une note vraie.

2 - La passation d'un test par une population finie de m sujets.

Considérons l'expérience à deux étapes suivantes

Première étape : on prélève au hasard un individu dans $\mathcal{P}$, noté i .

Seconde étape : on fait passer le test à l'individu i prélevé, obtenant une note x de l'échelle des notes $[a,b]$.

Quel est le modèle probabiliste associé à cette expérience ?

On sait que la probabilité de tirer à la première étape un sujet i donné est $P_1(i) = \frac{1}{m}$.

On se donne d'autre part, pour chaque individu i , et pour chaque note x , la probabilité $P_i(x)$ que l'individu i obtienne la note x .

L'univers des possibilités de l'expérience à deux étapes est alors l'ensemble des couples (i,x) formant l'ensemble produit $\mathcal{P} \times [a,b]$.

La probabilité de l'événement élémentaire (i,x) est alors par définition :

$$P(i,x) = P_1(i)P_i(x) = \frac{1}{m} P_i(x).$$

Considérons alors les variables aléatoires suivantes

X , note observée, définie par $X(i,x) = x$

V , note " vraie " , définie par $V(i,x) = v_i = \sum_{x=a}^{x=b} x\, P_i(x)$.

Z , note " erreur " , définie par $Z(i,x) = x - v_i$.

On a alors, pour chaque couple (i,x) , $X(i,x) = V(i,x) + Z(i,x)$, que l'on note $X = V + Z$.

<u>*THEOREME 2.1.*</u> *1)* $E(Z) = 0$ *et donc* $E(X) = E(V)$

2) V *et* Z *sont non correlées* .

<u>**Démonstration.**</u>

1) $$E(Z) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{x=a}^{b} (x-v_i)P(i,x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} [\sum_{x=a}^{b} (x-v_i)P_i(x)]$$

et le terme entre [ ] est nul, par définition de v_i , pour tout i ; il en résulte bien que $E(X) = E(V) + E(Z) = E(V)$.

2) Pour montrer que V et Z sont non correlées, il suffit de montrer que

$$\text{cov}\ (V,Z) = E(VZ) - E(V).E(Z) = E(VZ) = 0$$

$$\begin{aligned} E(VZ) &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{x=a}^{b} (V(i,x).Z(i,x).P(i,x)) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{x=a}^{b} (v_i(x-v_i) \times \frac{1}{m} P_i(x)) \\ &= \frac{1}{m} \sum_{i=m}^{m} v_i\ [\sum_{x=a}^{b} (x-v_i)P_i(x)] \end{aligned}$$

et là encore, le terme entre [ ] est nul, pour tout i .

Donc $E(VZ) = 0$.

Remarque 2.1. On peut aisément montrer que V et Z, bien que non corrélées ne sont pas en général indépendantes.

DEFINITION 2.2. On appelle fidélité d'un test le rapport $f = \frac{\sigma^2(V)}{\sigma^2(X)}$

Remarquons que $0 \leqslant f \leqslant 1$.

En effet, $\sigma^2(X) = \sigma^2(V) + \sigma^2(Z)$, puisque V et Z sont non corrélés, donc

$$1 = f + \frac{\sigma^2(Z)}{\sigma^2(X)}$$

d'où

$$\frac{\sigma^2(Z)}{\sigma^2(X)} = 1 - f \ .$$

Si un test a une fidélité égale à 1 , cela signifie que $\sigma^2(Z) = 0$, donc $Z = E(Z) = 0$ avec une probabilité égale à 1 ; cela entraîne que si $P_i(x) > 0$, $x = v_i$, i.e. que la note d'un sujet est toujours la même lorsqu'on répète les passations sur ce sujet.

Si un test a une fidélité nulle, cela entraîne que $\sigma^2(V) = 0$, donc $V = E(V)$ presque sûrement ; tous les sujets ont alors la même note vraie, et le test ne peut donc les discriminer, bien qu'on puisse observer des notes différentes associées à des sujets différents.

3 - Formes parallèles d'un test

Formalisons un peu plus la notion de parallélisme introduite au § 1 .

DEFINITION 3.1. Deux tests T_1 *et* T_2 *sont dits nominalement parallèles si chacune des tâches (ou questions) composant* T_1 *paraît strictement équivalente à une tâche ou question analogue dont l'ensemble constitue* T_2 .

Remarque 3.1. Si de plus les règles de notations sont les mêmes pour les tests T_1 et T_2 , nous pouvons alors formaliser cette notion de la manière suivante : en incluant dans la variabilité générale de l'expérience , la variabilité de l'énoncé du test, la passation de T_2 apparaît comme une répétition de celle de T_1 .

Si nous envisageons un sujet passant successivement ou simultanément T_1 et T_2, d'une façon éliminant le transfert d'apprentissage, nous pouvons considérer l'expérience comme analogue à deux lancers successifs d'un même dé pipé , l'univers des possibles de l'expérience est alors l'ensemble des couples de notes possibles (x,y) x et y appartenant à l'échelle de notes $[a,b]$, affectés de la probabilité $\pi(x,y) = P(x)P(y)$, où P est la probabilité d'obtenir la note x au test T_1 (ou T_2) considéré isolément.

Si nous considérons maintenant une population $\mathcal{P}$ de m sujets, nous faisons l'expérience en deux étapes suivantes :

<u>première étape</u>. On prélève au hasard un sujet dans $\mathcal{P}$ noté i

<u>deuxième étape</u>. On fait passer au sujet prélevé i les deux tests T_1 et T_2 obtenant un couple de notes (x,y).

L'univers des possibles de l'expérience est alors constitué par tous les triplets (i,x,y) , formant l'ensemble produit $\mathcal{P} \otimes [a,b] \otimes [a,b]$.

La probabilité d'obtenir un sujet donné i à la première étape est $P_1(i) = \frac{1}{m}$.
La probabilité que le sujet i obtienne la note x au test T_1 est $P_i(x)$, celle qu'il obtienne la note x au test T_1 et y au test T_2 est alors $\pi_i(x,y) = P_i(x).P_i(y)$.

La probabilité d'obtenir le triplet (i,x,y) est alors

$$P(i,x,y) = P_1(i)\Pi_i(x,y) = \frac{1}{m} P_i(x)P_i(y) .$$

Considérons alors les variables aléatoires suivantes

$X(i,x,y) = x$: note au test T_1 du sujet prélevé

$Y(i,x,y) = y$ " " T_2 "

$V(i,x,y) = v_i$: vraie note du sujet prélevé à l'un des deux tests T_1 ou T_2

$$v_i = \sum_{x=a}^{b} x.P_i(x) = \sum_{y=a}^{b} y\, P_i(y)$$

$Z_1(i,x,y) = x - v_i$: note erreur au test T_1 du sujet prélevé

$Z_2(i,x,y) = y - v_i$ " " " " T_2 " " "

Alors
$$\begin{aligned} X &= V + Z_1 \\ Y &= V + Z_2 . \end{aligned} \tag{3.1}$$

<u>THEOREME 3.1.</u> *Si* T_1 et T_2 *sont nominalement parallèles et sont passés d'une façon éliminant le transfert d'apprentissage par les sujets de la population* $\mathcal{P}$

1) $E(Z_1) = E(Z_2) = 0$, $\sigma^2(Z_1) = \sigma^2(Z_2)$

2) Z_1 , Z_2 *et* V *sont deux à deux non corrélées*

3) T_1 *et* T_2 *ont même fidélité* f *et* $f = \rho(X_1,X_2)$.

<u>Démonstration.</u>

1)
$$E(Z_1) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{x=a}^{b} \sum_{y=a}^{b} (x-v_i)P(i,x,y)$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \sum_{x=a}^{b} \sum_{y=a}^{b} (x-v_i)P_i(x).P_i(y)$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \sum_{y=a}^{b} (P_i(y).\left[\sum_{x=a}^{b} (x-v_i).P_i(x)\right])$$

et les termes dans [ ] sont nuls pour tout i , donc $E(Z_1) = 0$.

la démonstration est la même pour Z_2 , en permutant x et y .

$$\sigma^2(Z_1) = E(Z_1)^2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{x=a}^{b} \sum_{y=a}^{b} (x-v_i)^2 P(i,x,y)$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{x=a}^{b} \sum_{y=a}^{b} (x-v_i)^2 P_i(x)P_i(y)$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \sum_{y=a}^{b} P_i(y) \left[\sum_{x=a}^{b} (x-v_i)^2 P_i(x)\right]$$

soit $\sigma_i'^2 = \sum_{x=a}^{b} (x-v_i)^2 P_i(x)$ = variance des notes au test T_1 du sujet n°i

$$\sigma^2(Z_1) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{y=a}^{b} P_i(y)\Big).(\sigma_i')^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (\sigma_i')^2 .$$

De même, $\sigma^2(Z_2) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (\sigma_i'')^2$, où $(\sigma_i'')^2$ est la variance des notes au test T_2 du sujet n°i : mais comme les deux tests ont la même distribution de probabilité pour un sujet donné , on a $(\sigma_i'')^2 = (\sigma_i')^2$ et donc $\sigma^2(Z_2) = \sigma^2(Z_1)$.

2) $$E(Z_1V) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{x=a}^{b} \sum_{y=a}^{b} Z_1(i,x,y)V(i,x,y)P(i,x,y)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{x=a}^{b} \sum_{y=a}^{b} (x-v_i)v_i \times \frac{1}{m} P_i(x).P_i(y)$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} v_i \times \sum_{y=a}^{b} \Big(P_i(y) \Big[\sum_{x=a}^{b} (x-v_i)P_i(x)\Big]\Big)$$

et comme l'intérieur du [ ] est nul pour tout i , on a

$E(Z_1.V) = 0 = E(Z_1).E(V)$, donc $\mathrm{cov}(Z_1V) = \rho(Z_1,V) = 0$

On montre de même que $E(Z_2V) = 0$, donc $\rho(Z_2,V) = 0$

enfin $$E(Z_1.Z_2) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{x=a}^{b} \sum_{y=a}^{b} Z_1(i,x,y)Z_2(i,x,y)P(i,x,y)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{x=a}^{b} \sum_{y=a}^{b} (x-v_i)(y-v_i) \frac{1}{m} .P_i(x).P_i(y)$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \Big[\sum_{x=a}^{b} (x-v_i)P_i(x)\Big] \times \Big[\sum_{y=a}^{b} (y-v_i)P_i(y)\Big] .$$

L'intérieur de chaque [ ] étant nul, on a bien $E(Z_1.Z_2) = 0$, donc

$\mathrm{cov}(Z_1,Z_2) = E(Z_1.Z_2) - E(Z_1)\,E(Z_2) = 0$, et Z_1 et Z_2 sont non corrélées.

Alors $\sigma^2(X) = \sigma^2(Y) + \sigma^2(Z_1)$

$$\sigma^2(Y) = \sigma^2(V) + \sigma^2(Z_2) \quad \text{et} \quad \sigma^2(Z_1) = \sigma^2(Z_2)$$

impliquent $\sigma^2(X) = \sigma^2(Y) = \sigma^2$.

Les tests T_1 et T_2 ont donc même fidélité $f = \frac{\sigma^2(V)}{\sigma^2}$

$$\begin{aligned}
\text{cov}\,(X,Y) &= E(XY) - E(X)\,E(Y) \\
&= E\left[(V+Z_1)(V+Z_2)\right] - (E(V))^2 \\
E\left[(V+Z_1)(V+Z_2)\right] &= E(VZ_1) + E(VZ_2) + E(Z_1Z_2) + E(V^2) \\
&= E(V^2) \\
\text{Donc cov}(X,Y) &= E(V^2) - (E(V))^2 = \sigma^2(V) \quad \text{et} \\
\rho(X,Y) &= \frac{\sigma^2(V)}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{\sigma^2(V)}{\sigma^2} = f
\end{aligned}$$

La fidélité d'un test est donc égale à la corrélation de deux formes parallèles de ce test ; cette relation est utilisée pour estimer la fidélité Test-Retest ou formes parallèles par le coefficient de corrélation de Bravais-Pearson calculé sur un n-échantillon de notes obtenues à deux formes parallèles du test.

COROLLAIRE 3.1. (formule de Spearman-Brown)

Soit $T = X + Y$ *la variable somme des notes obtenues à deux formes nominalement parallèles d'un test par un sujet pris au hasard dans une population finie* P*. La fidélité de* T *est alors donnée par* $F = \frac{2f}{1+f}$.

Démonstration. La note vraie au test somme des deux formes T_1 et T_2 pour le sujet n°i est alors $v_i + v_i = 2v_i$

et la note erreur $x + y - 2v_i$

$$T = X + Y = 2V + Z_1 + Z_2 = W + Z \quad \text{où} \quad W = 2V \ \text{est la note vraie.}$$

$$Z = Z_1 + Z_2 \ \text{est la note erreur.}$$

$$\sigma^2(T) = \sigma^2(2V) + \sigma^2(Z)$$

$$= 4\,\sigma^2(V) + \sigma^2(Z_1) + \sigma^2(Z_2)$$

$$\sigma^2(V) = f\sigma^2(X) \qquad \sigma^2(Z_1) = \sigma^2(Z_2) = (1-f)\sigma^2(X)$$

$$F = \frac{4\sigma^2(V)}{\sigma^2(T)} = \frac{4f\sigma^2(X)}{4f\sigma^2(X)+2(1-f)\sigma^2(X)} = \frac{2f}{1+f}$$

On applique surtout cette formule en construisant les formes parallèles par " split half " , un test étant formé de k paires d'épreuves équivalentes, on construit deux formes parallèles en retenant pour la forme T_1 un élément de chaque paire, les autres éléments restant formant alors le test T_2 .

La fidélité F du test est alors appelé fidélité split half ; elle est estimée par la formule de Spearman-Brown où f est remplacé par le coefficient de corrélation de Bravais-Pearson des deux moitiés du test T , calculé sur un n-échantillon de sujets.

4 - Un modèle probabiliste de passation de k sous-tests d'un test

Considérons un test, formé par une batterie de k sous-tests, le sous-test n°j étant noté sur l'échelle de note $[a^j, b^j]$.

La passation du test par un sujet donné peut être assimilée, comme type d'expérience, au lancer successif de k dés pipés ; en faisant cette hypothèse nous faisons comme si, pour une passation répétée éliminant le transfert d'apprentissage, les raisons de la variabilité des notes d'un sous-test à l'autre pour le sujet sont indépendantes ; c'est là une hypothèse qui peut, si l'on analyse en détails les causes de la variabilité, paraître trop contraignante ; nous la ferons toutefois ici.

Si P^j est la loi de probabilité de la distribution des notes au $j^{\text{ème}}$ sous-test, considéré isolément, on a alors, si un sujet obtient les notes x^1 , x^2 , x^k aux sous-tests, la probabilité d'obtenir pour le sujet cette suite de notes est $\Pi(x^1,x^2,\dots,x^k) = P^1(x^1)P^2(x^2)\dots P^k(x^k)$

Si l'on considère maintenant l'expérience en deux étapes

<u>première étape</u>. prélèvement au hasard d'un sujet dans une population finie de m sujets $\mathcal{P}$, on obtient l'individu i .

<u>seconde étape</u>. on fait passer le test à l'individu prélevé i , obtenant les notes $(x^1,x^2,\dots,x^n)$.

L'univers des possibles de l'expérience est alors l'ensemble des $k+1$-uplets $(i,x^1,x^2,\dots,x^k)$.

Si $P_i^j(x^j)$ est la probabilité que le sujet n°i obtienne la note x^j au $j^{\text{ième}}$ sous-test, on a alors

$$P(i,x^1,x^2,\dots,x^k) = P_1(i)P_i^1(x^1)P_i^2(x^2)\dots P_i^k(x^k)$$

$$= \frac{1}{m}P_i^1(x^1)P_i^2(x^2)\dots P_i^k(x^k)$$

Considérons alors les variables suivantes

$X^j(i,x^1,\dots,x^k) = x^j$: note au $j^{\text{ième}}$ sous-test du sujet prélevé ,

$$V^j(i,x^1,x^2,\dots,x^k) = v_i^j = \sum_{\substack{x_j=a_j \\ \text{prélevé}}}^{b^j} x^j P_i^j(x^j) = \left\{\begin{array}{l}\text{note "vraie" au } j^{\text{ième}} \text{ sous-test} \\ \text{du sujet prélevé,}\end{array}\right.$$

$$Z^j(i,x^1,x^2,\dots,x^k) = x^j - v_i^j = \left\{\begin{array}{l}\text{note " erreur " au } j^{\text{ième}} \text{ sous-test} \\ \text{du sujet prélevé.}\end{array}\right.$$

Alors $X^j = V^j + Z^j$ et on montre, comme pour les formes parallèles, le

<u>*THEOREME 4.1.*</u> *1)* $E(Z^j) = 0$, V^j *et* Z^j *sont non correlés*

2) V^j *et* Z^j *sont non correlés, ainsi que* Z^j *et* $Z^{j'}$, *si* $j' \neq j$.

Soit alors $f^j = \dfrac{\sigma^2(V^j)}{\sigma^2(X^j)}$ la fidélité du sous-test n°j .

Si la note au test est la somme des notes à chacun des sous-tests, la note totale T est alors la variable

$$T = X^1 + X^2 + \dots + X^k = V^1 + V^2 + \dots + V^k + Z^1 + Z^2 + \dots + Z^k .$$

La note totale"vraie"est alors $W = V^1 + V^2 + \ldots + V^k$.

La note erreur totale est alors $Z = Z^1 + Z^2 + \ldots + Z^k$

Soit σ^j l'écart-type de X^j .

$\rho^{j,j'}$ la corrélation des deux sous-tests $(X^j, X^{j'})$

Evaluons la fidélité du test total T .

$$F = \frac{\sigma^2(W)}{\sigma^2(T)}$$

$$\sigma^2(T) = \sigma^2(X^1 + X^2 + \ldots + X^k) = \sigma^2(X^1) + \sigma^2 X^2) + \ldots + \sigma^2(X^k) + 2 \sum_{j<j'} \mathrm{cov}(X^j, X^{j'})$$

$$= \sum_{j=1}^{k} (\sigma^j)^2 + 2 \sum_{j<j'} \rho^{j,j'} \sigma^j \sigma^{j'}$$

$$\sigma^2(W) = \sigma^2(V^1 + V^2 + \ldots + V^k)$$

$$= \sigma^2(V^1) + \sigma^2(V^2) + \ldots + \sigma^2(V^k) + 2 \sum_{j<j'} \mathrm{cov}(V^j, V^{j'})$$

mais

$$\sigma^2(V^j) = f^j \sigma^2(X^j) = f^j (\sigma^j)^2 .$$

$$\mathrm{cov}(V^j, V^{j'}) = \mathrm{cov}(X^j, X^{j'}) \text{ , car } E(X^j . X^{j'}) - E(X^j).E(X^{j'})$$

$$= E(V^j + Z^j)(V^{j'} + Z^{j'}) - E(V^j + Z^j) . E(V^{j'} + Z^{j'})$$

$$= E(V^j . V^{j'}) + E(V^j . Z^{j'}) + E(V^{j'} Z^j) + E(Z^j Z^{j'}) - E(V^j).E(V^{j'})$$

$$= E(V^j . V^{j'}) - E(V^j).E(V^{j'}) \text{ , les autres termes étant nuls.}$$

Il en résulte que $\mathrm{cov}(V^j, V^{j'}) = \rho^{j,j'} \sigma^j \sigma^{j'}$ et l'on a donc

$$F = \frac{\sum_{j=1}^{k} f^j (\sigma^j)^2 + 2 \sum_{j<j'} \rho^{j,j'} \sigma^j \sigma^{j'}}{\sum_{f=1}^{k} (\sigma^j)^2 + 2 \sum_{j<j'} \rho^{j,j'} \sigma^j \sigma^{j'}} \tag{4.1}$$

<u>*COROLLAIRE 4.1.*</u> *La corrélation* $\rho(V^j, V^{j'}) = \dfrac{\mathrm{cov}(V^j, V^{j'})}{\sigma(V^j)\sigma(V^{j'})} = \dfrac{\rho^{j,j'} \sigma^j \sigma^{j'}}{(\sigma^j \sqrt{f^j})(\sigma^{j'} \sqrt{f^{j'}})}$

D'où $\rho(V^j, V^{j'}) = \dfrac{\rho^{j,j'}}{\sqrt{f^j \, f^{j'}}}$.

COROLLAIRE 4.2. *Si les* k *sous-tests sont fortement parallèles deux à deux c'est-à-dire vérifient pour tout couple* (j,j') $V^j = V^{j'}$, $\sigma^j = \sigma^{j'} = \sigma$, $f^j = f^{j'} = \rho^{j,j'} = f$, *dans le cadre du modèle exposé dans ce paragraphe*

La formule (4.1) devient alors

$$F = \frac{kf\sigma^2 + \frac{2k(k-1)}{2} f\sigma^2}{k\sigma^2 + \frac{2k(k-1)}{2} f\sigma^2} = \frac{kf}{1+(k-1)f} .$$

C'est l'extension de la formule de Spearman-Brown au cas de k sous-tests parallèles ; on retrouve cette formule lorsque $k = 2$.

Remarque. On a $\sum_{j<j'} \rho^{j,j'}\sigma^j\sigma^{j'} = \sigma^2(T) - \sum_{j=1}^{k} (\sigma_j)^2$

La formule (4.1) s'écrit également

$$F = \frac{\sigma^2(T) - \sum_{j=1}^{k} (1-f^j)(\sigma^j)^2}{\sigma^2(T)} \qquad (4.1')$$

Les formules (4.1) ou (4.1') sont des cas particuliers d'une formule un peu plus générale, due à Mosier, tenant compte d'une pondération différente des sous-tests .

5 - Parallélisme faible

DEFINITION 5.1. *Deux sous-tests* T_1 *et* T_2 *d'un test* T *sont dits faiblement parallèles si leurs notes vraies ont une corrélation égale à 1 .*

Remarque 5.1. Il est clair que deux sous-tests fortement parallèles sont faiblement parallèles, puisque leurs notes vraies coïncident et donc sont de corrélation égale à 1.

Soient $X^1 = V^1 + Z^1$

$X^2 = V^2 + Z^2$.

Les décompositions associées aux deux sous-tests faiblement parallèles T_1 et T_2

Si nous nous plaçons toujours dans le cadre du modèle ayant permis d'établir la formule de Mosier , nous avons

$$\rho(X^1,X^2) = \sqrt{f^1f^2}\cdot\rho(V^1,V^2)$$
$$= \sqrt{f^1f^2}$$

f^1 et f^2 désignant les fidélités respectives des sous-tests T^1 et T^2 .

Plaçons-nous maintenant dans le cas d'un test composé de k sous-tests faiblement parallèles deux à deux ; nous avons les décompositions suivantes :

$$X^j = V^j + Z^j \quad , \quad \text{et} \quad \rho(V^j,V^{j'}) = 1 \quad \text{pour tous} \quad j \text{ , } j' \text{ .}$$

Les variables V^j étant d'inter corrélations égales à 1, ont la même variable centrée réduite $\tilde{U}$, indépendante de j et l'on a

$$\tilde{U} = \frac{V_j - E(V^j)}{\sigma(V^j)} \text{ , d'où } V^j = E(V^j) + \sigma(V^j)\tilde{U} = b^j + \sqrt{f^j}\sigma^j\tilde{U}$$

et $X^j = b^j + \sqrt{f^j}\sigma^j.\tilde{U} + Z^j$, en posant $b^j = E(V^j) = E(X^j)$.

Soit $U^j = \frac{X^j-b^j}{\sigma^j}$ la variable centrée réduite associée au test X^j .

On a alors : $U^j = \sqrt{f^j}.\tilde{U} + S^j$ où $S^j = \frac{Z^j}{\sigma^j}$.

On reconnait là les équations d'une analyse factorielle en facteurs communs et spécifiques, avec un seul facteur $\tilde{U}$ et le facteur spécifique du $j^{\text{ième}}$ sous-test confondu avec le facteur "erreur"

$$S^j = \frac{Z^j}{\sigma^j} \quad ; \sqrt{f^j} = \rho(U^j,\tilde{U}) = \rho(X^j,\tilde{U})$$

(S^j et $S^{j'}$ étant deux à deux **corrélés** et non corrélés à $\tilde{U}$), $\sqrt{f^j}$ apparait comme la saturation du $j^{\text{ième}}$ sous-test dans le facteur commun unique $\tilde{U}$, f^j étant la " communauté " du $j^{\text{ième}}$ sous test et $1 - f^j$ son " unicité " .

La note totale T s'écrit alors

$$T = \sum_{j=1}^{k} b^j + \sum_{j=1}^{k} \sqrt{f^j}\,\sigma^j \tilde{U} + \sum_{j=1}^{k} Z^j$$

$$= W + Z \quad \text{où} \quad W = \sum_{j=1}^{k} b^j + \sum_{j=1} \sqrt{f^j}\sigma^j\tilde{U} = E(W) + \left(\sum_{j=1}^{k} \sqrt{f^j}\sigma^j\right)\tilde{U}$$

et l'on a

$$\sigma(W) = \left(\sum_{j=1}^{k} \sqrt{f^j}\sigma^j\right)$$

$$\sigma^2(T) = \sigma^2(W) + \sigma^2(Z) = \left(\sum_{j=1}^{k} \sqrt{f^j}\sigma^j\right)^2 + \sum_{j=1}^{k} (1-f^j)(\sigma^j)^2$$

La formule de Mosier (4.1) devient, dans ce cas

$$F = \frac{\left(\sum_{j=1}^{k} \sqrt{f^j}\sigma^j\right)^2}{\left(\sum_{j=1}^{k} \sqrt{f^j}\sigma^j\right)^2 + \sum_{j=1}^{k} (1-f^j)(\sigma^j)^2} \qquad (5.1)$$

et l'on a $\rho(X^j, X^{j'}) = \rho^{j,j'} = \sqrt{f^j f^{j'}}$ si $j \neq j'$.

6 - Estimation de la fidélité d'un test composé de k sous-tests faiblement parallèles.

La formule (5.1) permet d'estimer F si l'on dispose d'estimations de σ^j et de f^j . Si l'on a les notes aux k-sous-tests d'un n-échantillon de sujets, on peut estimer $(\sigma^j)^2$ par $\widehat{(\sigma^j)}^2$, variance empirique des notes des sujets au $j^{\text{ième}}$ sous-test ; si l'on dispose d'autre part de la matrice des inter-corrélations des sous-tests calculée sue le n-échantillon de sujets, on peut estimer f^j ; en effet

$$\frac{\rho^{j,j'}\rho^{j,k'}}{\rho^{j'k'}} = \frac{\sqrt{f^j f^{j'}}\,\sqrt{f^j f^{k'}}}{\sqrt{f^{j'} f^{k'}}} = f^j$$ et nous pouvons donc

estimer f^j par la moyenne $\widehat{f^j}$ des expressions $\dfrac{r^{j,j'}r^{j,k'}}{r^{j',k'}}$, $j' \neq k' \neq j$, j' et k' variant et j étant fixé ;

On a en fait $C_{k-1}^{2} = \frac{(k-1)(k-2)}{2}$ telles expressions, d'où

$$\hat{f}^{j} = \frac{2}{(k-1)(k-2)} \sum_{\substack{j',k' \\ j' \neq k' \\ \neq j}} \left(\frac{r^{j,j'} r^{j,k'}}{r^{j'k'}}\right)$$

On peut également utiliser la formule (4.1'), en estimant $\sigma^2(T)$ par la variance empirique des notes totales des sujets du n-échantillon, f^j par $\hat{f}^j$ et σ^j par $\hat{\sigma}^j$.

Remarque 6.1. Dans le cas général, si nous voulons estimer F, il nous faut appliquer (4.1') en remplaçant les variances théoriques par leurs estimations et f^j par une estimation $\hat{f}^j$, ce qui ne peut se faire que si l'on dispose d'une batterie de sous-tests parallèles à ceux constituant le test T .

7 - Quand le parallélisme retrouve des forces

Supposons que nous ayons un test formé de sous-tests faiblement parallèles et introduisons la condition supplémentaire que les sous-tests soient équicorrélés, de corrélation commune égale à ρ .

Alors on peut montrer le

THEOREME 7.1.

1) *les sous-tests ont même fidélité, égale à* ρ

2) *les sous-tests centrés réduits* $U^j = \frac{X^j - b^j}{\sigma^j}$ *sont fortement parallèles deux à deux.*

3) *la fidélité du test global* $T = X^1 + X^2 + \ldots + X^k$ *est alors donnée par*

$$F = \frac{\sigma^2(T) - \sum_{j=1}^{k} (\sigma^j)^2}{\sigma^2(T)} \times \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\sigma^j}{\sum_{j=1}^{k} \sigma^j}\right)^2} . \qquad (7.1)$$

Démonstration.

1) nous savons que $f^j = \dfrac{\rho^{j,j'}\rho^{j,k'}}{\rho^{j'k'}} = \dfrac{\rho^2}{\rho} = \rho$, pour tout j.

les sous-tests ont donc même fidélité

2) $U^j = \sqrt{f^j}\,\tilde{U} + S^j = \sqrt{\rho}\,\tilde{U} + S^j$

Les sous-tests U^j ont donc la même note vraie $\sqrt{\rho}\,\tilde{U}$, sont de même moyenne (0), de même variance (1), de même fidélité ρ ; ils sont donc bien fortement parallèles au sens du Corollaire 4.2.

3) La formule (5.1) devient , si $f^j = \rho$

$$F = \frac{\rho(\sum_{j=1}^{k} \sigma^j)^2}{\rho(\sum_{j=1}^{k} \sigma^j)^2 + (1-\rho)\sum_{j=1}^{k}(\sigma^j)^2} = \frac{\rho(\sum_{j=1}^{k} \sigma^j)^2}{\sum_{j=1}^{k}(\sigma^j)^2 + \rho[(\sum_{j=1}^{k}\sigma_j)^2 - \sum_{j=1}^{k}(\sigma_j)^2]} .$$

Le dénominateur n'est autre que $\sigma^2(T)$

On a donc $$\sigma^2(T) - \sum_{j=1}^{k}(\sigma^j)^2 = \rho\,[(\sum_{j=1}^{k}\sigma^j)^2 - \sum_{j=1}^{k}(\sigma^j)^2] .$$

D'où $$\rho = \frac{\sigma^2(T) - \sum_{j=1}^{k}(\sigma^j)^2}{(\sum_{j=1}^{k}\sigma^j)^2 - \sum_{j=1}^{k}(\sigma^j)^2} ,$$

et $$F = \frac{\rho(\sum_{j=1}^{k}\sigma^j)^2}{\sigma^2(T)} = \frac{\sigma^2(T) - \sum_{j=1}^{k}(\sigma^j)^2}{\sigma^2(T)} \times \frac{(\sum_{j=1}^{k}\sigma^j)^2}{(\sum_{j=1}^{k}\sigma^j)^2 - \sum_{j=1}^{k}(\sigma^j)^2}$$

$$F = \frac{\sigma^2(T) - \sum_{j=1}^{k}(\sigma^j)^2}{\sigma^2(T)} \times \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\sigma^j}{\sum_{j=1}^{k}\sigma^j}\right)^2} .$$

DEFINITION 7.2. *On appelle coefficient de fidélité de Kuder-Richardson généralisé ou encore coefficient* α *le rapport*

$$F' = \frac{\sigma^2(T) - \sum_{j=1}^{k}(\sigma^j)^2}{\sigma^2(T)} \times \frac{1}{(1-\frac{1}{k})} \qquad (7.2)$$

THEOREME 7.2. $F \geqslant F'$, $F = F'$ *si et seulement si les* σ^j *sont égaux.*

Démonstration. La fonction de R^+ dans R^+ $f(x) = x^2$ est convexe, donc si x_1 , x_k sont k réels > 0 , $f(\bar{x}) \leqslant \overline{f(x)}$ (où $\bar{x}$ et $f(\bar{x})$ désignent les moyennes des nombres x_i et $f(x_i)$) ; si on pose $x_j = \dfrac{\sigma^j}{\sum_{j=1}^{k} \sigma^j}$,

$$\bar{x} = \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{k} \Big(\frac{\sigma^j}{\sum_{j=1}^{k} \sigma^j}\Big)^2 = k\,\overline{f(x)} ,$$

il vient $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \Big(\dfrac{\sigma^j}{\sum_{j=1}^{k} \sigma^j} \Big)^2$, d'où

$$\frac{1}{k} \leqslant \sum_{j=1}^{k} \Big(\frac{\sigma^j}{\sum_{j=1}^{k} \sigma_j} \Big)^2 , \quad \frac{1}{1 - \frac{1}{k}} \leqslant \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^{k} \Big(\frac{\sigma^j}{\sum_{j=1}^{k} \sigma^j}\Big)^2}$$

D'où $F' \leqslant F$.

L'égalité ayant lieu si et seulement si les x_i sont égaux, *i.e.* si les σ^j le sont.

Remarque 7.2. Dans le cas de sous-tests faiblement parallèles et équicorrélés, nous pouvons estimer F par la formule 7.1. , en remplaçant σ^j par $\hat{\sigma}^j$ et $\hat{\sigma}(T)$ par $\hat{\sigma}^2(T)$; si nous estimons également F' , en appliquant (7.2) aux mêmes estimations, nous avons là une sous-estimation de F .

COROLLAIRE 7.2. *Si l'on a un test formé de* k*-sous-tests faiblement parallèles, équicorrélés et de mêmes écarts types*

1) *les sous-tests centrés* $X'^j = X^j - E(X^j)$ *sont fortement parallèles deux à deux ,*

2) $F = F' = \frac{k\rho}{1+(k-1)\rho}$, ρ *désignant l'intercorrélation commune des sous-tests, ou encore leur fidélité.*

Dans ce cas, les coefficients de fidélité de Mosier, Kuder-Richardson généralisé et de Spearman-Brown généralisé coincident.

<u>Démonstration</u>.

1) Lorsque les écarts-types sont égaux à σ et les fidélités égales à ρ, on a alors :

$$X^j = b^j + \sqrt{\rho}\,\sigma\tilde{U} + Z^j$$

$$X'^j = X^j - b^j = \sqrt{\rho}\,\sigma\tilde{U} + Z^j .$$

Les sous-tests X'^j ont alors même note vraie : $\sqrt{f}\,\sigma\tilde{U}$, même variance σ^2 et même fidélité ρ . Ils sont donc fortement parallèles deux à deux.

2) Nous avons déjà vu que si $\sigma^j = \sigma$, $F = F'$, si d'autre part, nous remplaçons f^j par ρ et σ^j par σ dans la formule (7.2) , nous avons

$$F = \frac{\rho(k\sigma)^2}{\rho(k\sigma)^2 + (1-\rho)k\sigma^2} = \frac{k\rho}{k\rho+1-\rho} = \frac{k\rho}{1+(k-1)\rho}$$

<u>Remarque 7.3</u>. Il vaut mieux, pour estimer la fidélité d'un test dans les conditions du corollaire , appliquer la formule de Kuder-Richardson généralisée en remplaçant $\sigma^2(T)$ par $\hat{\sigma}^2(T)$, $(\sigma^j)^2$ par $(\hat{\sigma}^j)^2$, estimations calculées sur un n-échantillon de sujets.

<u>Remarque 7.4</u>. Si, de plus, les nombres $b^j = E(X^j)$ coïncident, les sous-tests X^j sont fortement parallèles deux à deux, les notes vraies coincident et l'on retrouve le résultat du § 4 , corollaire 2.

<u>Remarque 7.5</u>. *Lord et Novick* montrent, dans leur ouvrage (3), l'inégalité $F \geqslant F'$ sans condition restrictive de parallélisme, l'égalité ayant lieu si et seulement si les tests sont faiblement parallèles et les notes vraies ont même écart-type $\tilde{\sigma}$. Dans ce cas là, en effet, $\tilde{\sigma} = \sqrt{f^j}\,\sigma^j$ pour tout j,

la formule 5.1. nous donne

$$F = \frac{\sigma^2(V)}{\sigma^2(T)} = \frac{k^2(\tilde{\sigma})^2}{k^2\tilde{\sigma}^2 + \sum_{j=1}^{k} \sigma_j^2 - k\tilde{\sigma}^2} \quad \text{d'où} \quad \tilde{\sigma}^2 = \frac{\sigma^2(T) - \sum_{j=1}^{k}(\sigma^j)^2}{k(k-1)}$$

et l'on a bien $F = \frac{k}{k-1} \quad \frac{\sigma^2(T) - \sum_{j=1}^{k} (\sigma^j)^2}{\sigma^2(T)} = F'$.

8 - Application.

Supposons que nous ayons un test composé de k sous-tests qui soient des items notés 1 s'ils sont réussis, 0 sinon.

Si p_i^j est la probabilité de réussite du $j^{\text{ième}}$ item par le sujet n°i , nous avons alors $v_i^j = p_i^j$ et

$$P[X^j = 1] = \bar{p}^j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} p_i^j = E(X^j) = E(V^j) .$$

$$P[X^j = 0] = \bar{q}^j = 1 - \bar{p}^j .$$

$$\sigma^2(X^j) = \bar{p}^j\bar{q}^j$$

$$\sigma^2(V^j) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (p_i^j - \bar{p}^j)^2$$

$$f^j = \frac{\sigma^2(V^j)}{\sigma^2(X^j)} = \frac{1}{m\bar{p}^j\bar{q}^j} \sum_{i=1}^{m} (p_i^j - \bar{p}^j)^2 .$$

la formule de *Mosier* s'écrit alors

$$F = \frac{\sigma^2(T) - \sum_{j=1}^{k} (1-f^j)\bar{p}^j\bar{q}^j}{\sigma^2(T)}$$

Lorsque les items sont faiblement parallèles

$$F = \frac{\sum\limits_{j=1}^{k} \sqrt{f^j \,\overline{p}^j \overline{q}^j}}{\left(\sum\limits_{j=1}^{k} \sqrt{f^j \overline{p}^j \overline{q}^j}\right)^2 + \sum\limits_{j=1}^{k} (1-f^j)\,\overline{p}^j \overline{q}^j}$$

$$= \frac{\sigma^2(T) - \sum\limits_{j=1}^{k} \overline{p}^j \overline{q}^j}{\sigma^2(T)} \times \frac{1}{1 - \sum\limits_{j=1}^{k} \left(\dfrac{\sqrt{\overline{p}^j \overline{q}^j}}{\sum\limits_{j=1}^{k} \sqrt{\overline{p}^j \overline{q}^j}} \right)^2}$$

si de plus les items sont équicorrélés

$$F' = \frac{\sigma^2(T) - \sum\limits_{j=1}^{k} \overline{p}^j \overline{q}^j}{\sigma^2(T)} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{k}}$$

est le coefficient de fidélité de Kuder-Richardson, dans le cas d'items faiblement parallèles et équicorrélés .

Nous avons $F' \leqslant F$, $F' = F$ si de plus les items ont mêmes écarts types, *i.e.* si $(\sigma^j)^2 = \overline{p}^j \overline{q}^j$ est constant.

F' est estimée par la formule $\hat{F}' = \dfrac{\hat{\sigma}^2(T) - \sum\limits_{j=1}^{k} \hat{p}^j \hat{q}^j}{\hat{\sigma}^2(T)} \times \dfrac{1}{1 - \frac{1}{k}}$

où $\hat{p}^j$ est la proportion de succès observée pour l'item j sur un échantillon de n sujets et $\hat{q}^j = 1 - \hat{p}^j$.

Donnons une interprétation géométrique des divers parallélismes .

Soit $\vec{p}^j$ le vecteur de R^m de composantes p_i^j

$\vec{1}$ " " 1 ,

munissons R^m du produit scalaire

$$< \vec{x},\vec{y} > = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_i y_i \quad \text{si } \vec{x} = (x_1 ,\ldots, x_m) \text{ et } \vec{y} = (y_1,\ldots, y_m) \in R^m$$

$\|\vec{x}\| = < \vec{x},\vec{x} >$ le carré de la norme de $\vec{x}$,

a) si les items sont faiblement parallèles, les notes vraies centrées réduites coïncident, i.e. $\dfrac{V^j - E(V^j)}{\sigma(V^j)}$ est indépendant de j et vaut $\tilde{U}$, cela signifie que pour le sujet i , $\dfrac{v_i^j - E(V^j)}{\sigma(V^j)} = \widetilde{U}_i$ pour tout item j ,

$$i.e. \quad \frac{p_i^j - \bar{p}^j}{\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(p_i^j-\bar{p}^j)^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \widetilde{U}_i \text{ pour tout item } j .$$

Si $\vec{U}$ est le vecteur de R^m de composantes $\widetilde{U}_i$, les relations précédentes sont équivalentes à $\dfrac{\vec{p}^j - \bar{p}^j\vec{I}}{\|\vec{p}^j - \bar{p}^j\vec{I}\|} = \vec{U}$ pour tout item j .

D'autre part, $E(\widetilde{U}) = 0 = \dfrac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\widetilde{U}_i \iff \langle \vec{U},\vec{I} \rangle = 0$

$$\sigma^2(\widetilde{U}) = 1 \iff \|\vec{U}\|^2 = 1 .$$

Alors $\vec{p}^j$ s'écrit dans R^m sous la forme

$$\vec{p}^j = \bar{p}^j\vec{I} + \|\vec{p}^j - \bar{p}^j\vec{I}\| \cdot \vec{U} .$$

b) Réciproquement, soit $\vec{U}$ un vecteur de R^m tel que :

$$\langle \vec{I},\vec{U} \rangle = 0 , \|\vec{U}\|^2 = 1 .$$

Si (a^j,λ^j) est une suite de constantes positives choisies de façon que le vecteur $\vec{p}^j = a^j\vec{I} + \lambda^j\vec{U}$ ait ses composantes comprises entre 0 et 1 ; les items j ,ayant pour probabilités de succès les composantes du vecteur $\vec{p}^j$,sont faiblement parallèles deux à deux et $a^j = \bar{p}^j$, $\lambda^j = \|\vec{p}^j-\bar{p}^j\vec{I}\|$.

En effet, nous avons, pour le sujet i et l'item j , la note vraie centrée réduite égale à $\dfrac{v_i^j - E(V^j)}{\sigma(V^j)} = \dfrac{p_i^j - \bar{p}^j}{\|\vec{p}^j-\bar{p}^j I\|}$ *i.e.* à la ième composante du vecteur $\dfrac{\vec{p}^j - \bar{p}^j\vec{I}}{\|\vec{p}^j-\bar{p}^j I\|}$.

D'autre part, si $\vec{p}^j = a^j\vec{I} + \lambda^j\vec{U}$, où λ^j est > 0 , nécessairement

$$a^j = \bar{p}^j, \lambda^j = \|\vec{p}^j - \bar{p}^j\vec{I}\| .$$

En effet , $< \vec{p}^j, \vec{I} > = a^j < \vec{I},\vec{I} > + \lambda^j < \vec{U},\vec{I} > = a^j$

et $\overline{p}^j = < \vec{p}^j, \vec{I} >$, donc $\overline{p}^j = a^j$.

Alors le vecteur $\vec{p}^j - \overline{p}^j\vec{I} = \lambda^j\vec{U}$

donc $\| \vec{p}^j - \overline{p}^j\vec{I} \| = |\lambda^j| . \| \vec{U} \| = \lambda^j \times 1 = \lambda_j$.

Le vecteur $\dfrac{\vec{p}^j - \overline{p}^j\vec{I}}{\| \vec{p}^j - p^j\vec{I} \|} = \dfrac{\lambda^j\vec{U}}{\| \lambda^j\vec{U} \|} = \dfrac{\lambda^j\vec{U}}{\lambda^j} = \vec{U}$

pour le sujet i , les notes vraies centrées réduites à chacun des items coïncident avec $\vec{U}_i$, $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur $\vec{U}$.

Les items sont bien alors faiblement parallèles.

Explicitons les conditions $0 \leqslant p_i^j \leqslant 1$, si $\vec{U} = (u_1, u_2 , \ldots , u_m)$.

Soit u' le plus grand des nombres u_i , $-$ u" le plus petit des nombres u_i .

Les relations $\| \vec{U} \| = 0$; $< \vec{U},\vec{I} > = 0$ impliquent $\vec{U} \neq \vec{0}$, $\sum_{i=1}^{m} u_i = 0$ et donc u' et u" sont strictement > 0 .

Nous avons alors $p_i^j = \overline{p}^j + \lambda^j u_i$ et donc

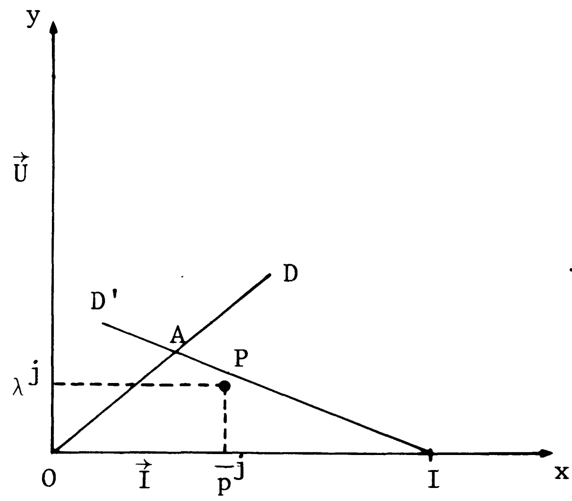
$$\overline{p}^j - \lambda^j u'' \leqslant p_i^j \leqslant \overline{p}^j + \lambda^j u'$$

Les relations $0 \leqslant p_i^j \leqslant 1$ sont équivalentes aux deux conditions :

$$0 \leqslant \overline{p}^j - \lambda^j u'' \quad \text{i.e.} \quad \lambda^j \leqslant \frac{\overline{p}^j}{u''} \tag{8.1}$$

$$\overline{p}^j + \lambda^j u' \leqslant 1 \quad \text{i.e.} \quad \lambda^j \leqslant \frac{1-\overline{p}^j}{u'} \quad .$$

Si nous représentons dans le plan des deux vecteurs orthogonaux et unitaires de R^m $(\vec{I} , \vec{U})$, le vecteur $\vec{p}^j = \overline{p}^j\vec{I} + \lambda^j\vec{I}$, il lui correspondra le point P^j de coordonnées $(\overline{p}^j, \lambda^j)$ dans le système d'axes $(\vec{I},\vec{U})$.



Si nous considérons dans ce système d'axes les demi-droites D et D' d'équations respectives $y = \frac{x}{u''}$ et $y = \frac{1-x}{u'}$ dans le quart de plan $x > 0, y > 0$, les relations (1) signifient que le point P^j doit être au-dessous de ces demi-droites, donc dans le triangle qu'elles forment 0 A I , noté τ .

Remarquons que la relation $\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (u_i)^2 = 1 \iff \sum_{i=1}^{m} (u_i)^2 = m$ implique que u' ou u'' est $\geqslant 1$, donc que l'une au moins des droites D et D' a une pente $\frac{1}{u''}$ ou $-\frac{1}{u'}$ inférieure à 1 en valeur absolue.

Nous avons donc montré l'équivalence des deux affirmations :

a) les items sont faiblement parallèles deux à deux

b) Il existe un vecteur $\vec{U}$ de R^m , tel que $< \vec{U}, \vec{I} > = 0$, $\| \vec{U} \| = 1$,

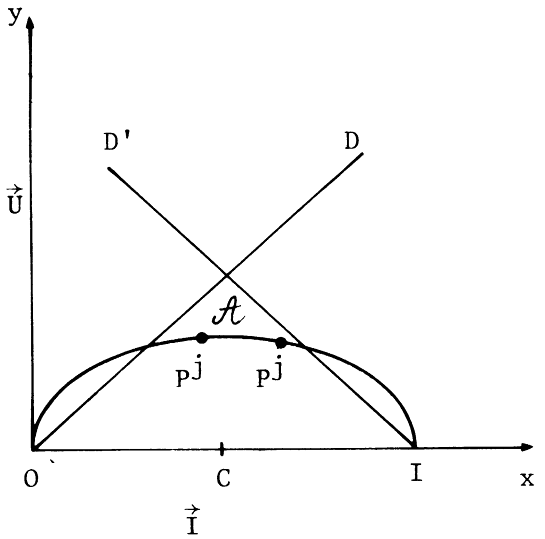
tel que le vecteur $\vec{p}^j$ des probabilités de réussite à l'item j appartienne au sous-espace vectoriel engendré par $\vec{I}$ et $\vec{U}$ et tel que le point P^j qui lui correspond soit situé à l'intérieur du triangle τ (associé à $\vec{I}$ et $\vec{U}$).

- Si nous imposons maintenant la condition supplémentaire d'égalité des fidélités des items, leur fidélité commune étant le nombre ρ , nous avons

$$\rho = \frac{\sigma^2(V^j)}{\sigma^2(X^j)} = \frac{\| \vec{p}^j - \bar{p}^j \vec{I} \|^2}{\bar{p}^j \bar{q}^j}$$, le point P^j correspondant à $\vec{p}^j$ a pour coordonnées $(\bar{p}^j, \lambda^j)$ et vérifie $\frac{(\lambda^j)^2}{\bar{p}^j(1-\bar{p}^j)} = \rho$, il appartient donc à la courbe d'équation $y^2 = \rho x(1-x)$, qui s'écrit aussi $y^2 + \rho(x - \frac{1}{2})^2 = \frac{\rho}{4}$

soit $$\frac{y^2}{\frac{\rho}{4}} + \frac{(x - \frac{1}{2})^2}{\frac{1}{4}} = 1 \ .$$

C'est l'équation d'une ellipse de centre, le point $C(\frac{1}{2}, 0)$ et d'axes



respectifs $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{\sqrt{f}}{2} = \frac{\sqrt{\rho}}{2}$

Les points P^j correspondants doivent être tous sur l'ellipse et à l'intérieur du triangle τ , donc sur l'arc d'ellipse $\mathcal{A}$ situé à l'intérieur du triangle τ , ils sont d'autant plus proches que la fidélité est plus élevée.

- Si les items ont de plus le même écart-type $\sigma = \sqrt{\overline{p}^j\overline{q}^j}$, les points P^j correspondants ont même ordonnée $\lambda = \sqrt{\rho\sigma}$.

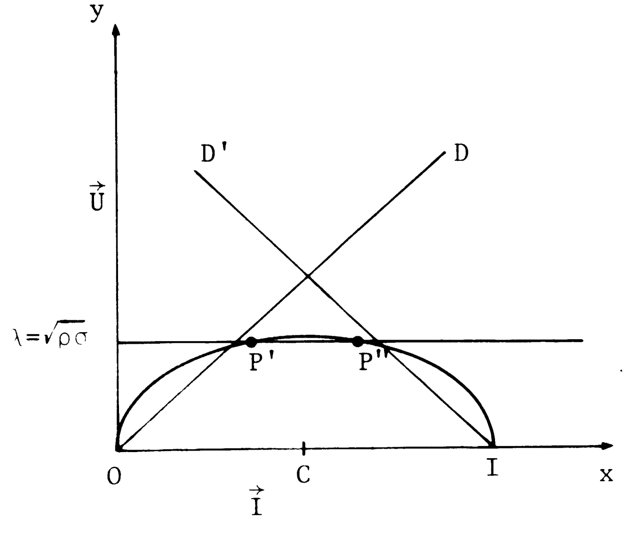
Soit $\overline{p}$ une solution de l'équation $\overline{p}(1-\overline{p}) = \sigma^2$; $q = 1 - \overline{p}$ est alors l'autre solution et les points possibles d'ordonnée λ sont les points P' et P'' de coordonnées respectives $(\overline{p}, \sqrt{\rho} \times \sigma)$ et $(\overline{q}, \sqrt{\rho} \times \sigma)$, correspondant aux vecteurs $\vec{p}' = \overline{p}\vec{I} + \sqrt{\rho}\ \sigma\vec{U}$

$\vec{p}'' = \overline{q}\vec{I} + \sqrt{\rho}\ \sigma\vec{U}$,

et l'on a $\vec{p}^j = \vec{p}'$ ou $\vec{p}''$, pour tout j .

Les items j tels que $\vec{p}^j = \vec{p}'$ ont même probabilité de réussite $\overline{p}$.

Les items j " " $\vec{p}^j = \vec{p}''$ " " " " $\overline{q} = 1-\overline{p}$.



Si, de plus les items j ont même probabilité de réussite $\overline{p}$, alors

$\vec{P}^j = \overline{p}\vec{I} + \sqrt{\rho}\ \sigma\vec{U}$ pour tout j , *i.e.* $\vec{p}^j = \vec{p}'$ pour tout j : les notes vraies coincident pour tout item j et pour tout sujet i , les items sont donc parallèles.

En résumé :

a) Les items sont faiblement parallèles si et eulement si

$$\vec{P}^j = \overline{p}^j\vec{I} + \lambda^j\vec{U} \quad , \quad \text{où} \quad < \vec{I},\vec{U} > = 0 \ , \| \vec{U} \| = 1$$

$p^j > 0$, $\lambda^j > 0$ et le point P^j de coordonnées $(\overline{p}^j,\lambda^j)$ appartient au triangle τ .

b) Les items sont faiblement parallèles et équicorrélés si et seulement si, de plus,les points P^j appartiennent à l'arc d'ellipse $\mathcal{A}$.

c) Les items sont faiblement parallèles, équicorrélés et de même écart, type σ si et seulement si

$$\vec{p}^j = \overline{p}\vec{I} + \sqrt{\rho}\ \sigma\vec{U} \quad \text{ou} \quad \overline{q}\vec{I} + \sqrt{\rho}\ \sigma\vec{U} \quad \text{et} \quad \sigma^2 = \overline{pq} \ .$$

d) Les items sont faiblement parallèles, équicorrélés et de même facilité $\overline{p}$ si et seulement si

$$- \vec{p}^j = \overline{p}\vec{I} + \sqrt{\rho}\ \sigma\vec{U} \quad \text{où} \quad \sigma = \sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})}$$; les items sont alors fortement parallèles.

9 - Un modèle markovien de passation d'un test par un sujet

Supposons qu'un test soit composé de k items à deux modalités possibles chacun, l'une appelée conventionnellement "réussite" et l'autre "échec". Ces items sont notés 1 s'ils sont réussis et 0 s'il y a échec.

Ces items sont supposés de même nature psychologique et *a priori* de même difficulté.

Supposons qu'un sujet passant le test soit influencé par les réponses successives qu'il donne, de la manière suivante :

1 - On peut admettre que la réussite ou l'échec à l'item $j+1$ ne dépend pour le sujet, que de la réussite ou l'échec à l'item j, et non de ce qui a eu lieu auparavant.

2 - S'il a réussi à l'item j, il réussira à l'item $j+1$ avec une probabilité $1-q$ et écouera donc avec une probabilité q.

3 - S'il a échoué à l'item j, il échouera à l'item $j+1$ avec une probabilité $1-p$ et le réussira avec une probabilité p.

Si nous désignons par X^j la note au $j^{\text{ième}}$ item, on voit que, pour le sujet, la suite de variables aléatoires X^j est une chaîne de Markov-homogène

de matrice de transition $P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$ sur l'espace d'état $\mathcal{S} = (0,1)$.

$1-p = P(0,0)$	est la probabilité d'échec	à l'item $j+1$	s'il	y a	échec	à l'item j
$p = P(0,1)$	de succès	"	"	"	"	"
$q = P(1,0)$	d'échec	"	"	"	succès	"
$1-q = P(1,1)$	de succès	"	"	"	"	"

Soit Π_o la loi de probabilité de X^1.

$$\Pi_o(0) = \tilde{\mathbb{P}}[X^1 = 0]$$

$$\Pi_o(1) = \tilde{\mathbb{P}}[X^1 = 1]$$

Alors, pour le sujet, la probabilité d'obtenir successivement les notes $x^1, x^2,..,x^k$ aux items $1,2,\ldots,k$ ($x^j = 0$ ou 1) est donnée par la formule

$$\tilde{\mathbb{P}}[X^1 = x_1,\ldots, X^k = x^k] = \Pi_0(x^1)P(x^1,x^2)P(x^2,x^3)\ldots P(x^{k-1},x^k)$$

Il est alors aisé de calculer la probabilité, pour le sujet, de réussite à l'item j.

$$\tilde{\mathbb{P}}[X^j = 1] = \Pi_0 P^{(j-1)}(1)$$ où Π_0 est la matrice ligne $(\Pi_0(0),\Pi_0(1))$

et $P^{(j-1)}$ est la $(j-1)^{\text{ème}}$ itérée de la matrice P.

$$\tilde{\mathbb{P}}[X^j = 1] = \Pi_0(0)P^{(j-1)}(0,1) + \Pi_0(1)P^{(j-1)}(1,1)$$

on trouve aisément, par récurrence sur r, $P^{(r)}$

$$P^{(r)} = \begin{pmatrix} \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q} \\ \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q} \end{pmatrix} + \frac{d^r}{1-d}\begin{pmatrix} p & -p \\ -q & q \end{pmatrix} \qquad \text{où } d = 1-p-q$$

si d est $\neq 1$, *i.e.* si p et q sont différents de 0 ;

$$\text{si } p = 0 = q, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{(r)} ;$$

on en tire

$$\begin{aligned} P[X^j = 1] &= \Pi_0 P^{(j-1)}(1) \\ &= \frac{p}{p+q} + d^{j-1}\left(\Pi_0(1) - \frac{p}{p+q}\right) \quad \text{si } d \text{ est} \neq 1 \qquad (9.1) \\ &= \Pi_0(1) \quad \text{si } d = 1 . \end{aligned}$$

<u>Remarque 9.1.</u> Revenons sur l'expression de $d = 1 - p - q$

$$0 = p \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant q \leqslant 1 \text{ impliquent } -1 \leqslant d \leqslant 1$$

$d = 1 - p - q$ est une mesure du degré de " conservatisme " du sujet ; d est d'autant plus proche de 1 que p et q sont petits , que le sujet a peu tendance à modifier son type de réponse quand il passe d'un item au suivant. Le cas extrême est celui où $d = 1$: dans ce cas, le sujet ne modifie pas ses types de réponses au cours de la passation du test : $X^1 = X^2 = X^3 = \dots X^k$.

Lorsque $d = 0$, $p+q = 1$, donc $P(1,1) = 1-q = p = P(0,1)$: la probabilité de succès au $(j+1)^{\text{ième}}$ item est la même, quel que soit le résultat du $j^{\text{ième}}$ item.

Dans ce cas, les variables X^j sont indépendantes et de même loi pour $j \geqslant 2$, et nous sommes pratiquement dans le cadre du modèle exposé précédemment, seule la première passation X^1 a une loi Π_o différente.

Lorsque $d < 0$, le sujet est moins " conservateur ", le cas extrême étant celui où $d = -1$; dans ce cas, $p = q = 1$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et le sujet alterne systématiquement les notes qu'il obtient.

d peut également s'interpréter comme un indice de " transparence " du test pour le sujet, le test étant d'autant plus transparent pour lui que $|d|$ est voisin de 1.

<u>Remarque 9.2.</u> En écartant les cas extrêmes, on a donc $-1 < d < 1$; dans ce cas, l'expression (9.1) montre que si j est grand, $P[X^j = 1]$ est très proche de $\frac{p}{p+q}$.

Nous poserons $\Pi(1) = \frac{p}{p+q}$ $\Pi(0) = 1 - \Pi(1) = \frac{q}{p+q}$

et nous voyons que

$\mathbb{P}[X^o = 1] = \Pi(1) + (d)^{j-1}(\Pi_o(1)-\Pi(1))$ tend vers $\Pi(1)$ si j tend vers $+\infty$

$\mathbb{P}[X^j = 0] = \Pi(0) + (d)^{j-1}(\Pi_o(0)-\Pi(0))$ " " $\Pi(0)$ " " " " "

Les items ont alors asymptotiquement la même facilité, caractérisée par la limite de la probabilité de réussite $\Pi(1)$; remarquons encore que si $\Pi_0(1) = \Pi(1)$, $\mathbb{P}[X^j = 1] = \Pi(1)$ pour tout j : les items ont alors exactement la même facilité $\Pi(1)$.

La matrice ligne $\Pi = (\Pi(0),\Pi(1))$ vérifie en outre la propriété

$$\Pi.P = \Pi \ .$$

On dit que Π est la probabilité invariante associée à P

Remarque 9.3. Π_0 traduit l'état initial du sujet devant la présentation du premier item.

P traduit le comportement du sujet pendant le déroulement des passations successives de chaque item ; on voit que si le nombre d'items est grand, c'est le comportement (ou cette "stratégie") qui est déterminant et qui finit par donner aux items la même facilité limite $\Pi(1)$, quel que soit l'état initial du sujet.

Si $d > 0$, et $\Pi_0(1)$ est très petit, le modèle fait apparaître la passation du test analogue à une expérience d'apprentissage, $\mathbb{P}[X^j = 1]$ est alors fonction croissante de j et $\Pi(1)$ peut être interprétée comme manifestant les possibilités du sujet en fin d'apprentissage qui sont d'autant plus vite atteintes que d est petit.

La vraie note du sujet à l'item j est alors

$$\begin{aligned} v^j &= E(X^j) = \mathbb{P}[X^j = 1] \\ &= \Pi(1) + (d)^{j-1}(\Pi_0(1) - \Pi(1)) \quad \text{si } d \text{ est} < 1 \\ &= \Pi_0(1) \quad \text{si } d = 1 \ . \end{aligned}$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned} X^j &= v^j + Z^j \\ X^{j+h} &= v^{j+h} + Z^{j+h} \end{aligned}$$

où Z^j et Z^{j+h} sont les notes " erreurs " du sujet au $j^{\text{ième}}$ et au $(j+h)^{\text{ième}}$ item.

THEOREME 9.1.

1) $E(Z^j) = 0$

2) $P[X^j = 1,\ X^{j+h} = 1] = [\Pi(1) + d^{j-1}(\Pi_o(1)-\Pi(1))][\Pi(1) + d^h(1-\Pi(1))]$

3) $\mathrm{cov}(X^j,X^{j+h}) = \mathrm{cov}(Z^j,Z^{j+h})$ *est en général différente de* 0 *ainsi que* $\rho(Z^j,Z^{j+h})$,

lorsque j *est très grand, on a* $\rho(X^j,X^{j+h}) \simeq (d)^h$ *(l'égalité étant vraie pour tout* j *si* $\Pi_o(1) = \Pi(1)$).

Démonstration.

1) On a $E(X^j) = v^j = E(Z^j) + v^j$, donc $E(Z^j) = 0$.

2)
$$\begin{aligned} P[X^j = 1, X^{j+h} = 1] &= P[X^j = 1]\ P[X^{j+h} = 1/X^j = 1] \\ &= P[X^j = 1]\,P^{(h)}(1,1) \\ &= [\Pi(1) + d^{j-1}(\Pi_o(1) - \Pi(1))][\Pi(1)+ d^h(1-\Pi(1))], \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule désirée.

3) $\mathrm{cov}(X^j,X^{j+h}) = \mathrm{cov}(Z^j,Z^{j+h})$ puisque X^j et Z^j (resp. X^{j+h} et Z^{j+h}) ne diffèrent que d'une constante v^j (resp. v^{j+h}) ,

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(X^j,X^{j+h}) &= E(X^jX^{j+h}) - E(X^j)E(X^{j+h}) \\ &= \mathbb{P}[X^j = 1\ ,\ X^{j+h} = 1] - E(X^j)E(X^{j+h}) \\ &= \mathbb{P}[X^j = 1] \times [\Pi(1) + d^h(1-\Pi(1)) - (\Pi(1) + d^{j+h-1}(\Pi_o(1)-\Pi(1))] \\ &= \mathbb{P}[X^j = 1] \times [(1-\Pi(1)) - d^{j-1}(\Pi_o(1) - \Pi(1))]\,d^h \\ &= \mathbb{P}[X^j = 1](1-P[X^j = 1]) \times d^h \end{aligned}$$

Lorsque j est très grand, on a $\mathbb{P}[X^j = 1] \simeq \mathbb{P}[X^{j+h} = 1] \simeq \Pi(1)$ (l'égalité ayant lieu pour tout j si $\Pi_o(1) = \Pi(1')$) et donc

$\sigma^2(X^j) \simeq \sigma^2(X^{j+h}) \simeq \Pi(1)(1-\Pi(1))$

$$\rho(X^j,X^{j+h}) = \frac{\mathrm{cov}(X^j,X^{j+h})}{\sigma(X^j)\sigma(X^{j+h})} \simeq \frac{\mathrm{cov}(X^j,X^{j+h})}{\Pi(1)(1-\Pi(1))} \simeq d^h$$

Remarque 9.4. Dans le cadre de l'interprétation de d comme indice de transparence du test, on pourrait concevoir qu'existe une liaison entre la probabilité de réussite au premier item et la perception de l'association qui existe entre deux items successifs du test.

On pourrait par exemple envisager une liaison du type suivant : $d = 1$ si $\Pi_o(1) = 1$ ou $\Pi_o(0) = 1$, (le sujet répond de la même manière à tous les items), $d = 0$ si $\Pi_o(1) = \Pi_o(0) = \frac{1}{2}$, d est d'autant plus grand que $|\Pi_o(1) - \frac{1}{2}|$ est grand ; on pourrait alors prendre $d = 2|\Pi_o(1) - \frac{1}{2}|$ et l'on trouve alors $1 - d = 2(\Pi_o(0) \wedge \Pi_o(1))$ (plus petit des deux nombres $\Pi_o(0)$ et $\Pi_o(1)$).

Un cas particulier de ce modèle est celui où de plus $\Pi_o = \Pi$; alors on a nécessairement

$$p = \Pi_o(1) \times 2(\Pi_o(0) \wedge \Pi_o(1))$$

$$q = \Pi_o(0) \times 2(\Pi_o(0) \wedge \Pi_o(1))$$

Dans ces conditions, les items apparaissent pour le sujet de même facilité $\Pi_o(1)$, et les items successifs sont équicorrélés de corrélation $\rho = 1 - 2(\Pi_o(0) \wedge \Pi_o(1)) = d$, on a de plus $\rho(X^j,X^{j+h}) = d^h$ pour tout item j et pour tout $h > 0$.

10 - Un modèle markovien de passation d'un test par une population finie de m sujets.

On considère un test analogue à celui du paragraphe précédent, susceptible de pouvoir être passé par une population finie de m sujets, chacun des sujets se comportant vis-à-vis des passations successives comme le sujet du paragraphe précédent. Le sujet numéro i est caractérisé par une probabilité initiale de succès à l'item 1, $\Pi_{o,i}(1)$, une matrice de transition $P_i = \begin{pmatrix} 1-p_i & p_i \\ q_i & 1-q_i \end{pmatrix}$ et une probabilité invariante $\Pi_i(\Pi_i(0) = \dfrac{q_i}{p_i+q_i}$, $\Pi_i(1) = \dfrac{p_i}{p_i+q_i})$; nous poserons $d_i = 1 - p_i - q_i$ et nous ferons l'hypothèse qu'il existe un nombre $\delta > 0$ et < 1 tel que $|d_i| \leqslant \delta$ pour tout sujet i .

Soit $\tilde{U} = \{0,1\}^k$ l'ensemble des suites de k symboles 0 ou 1, représentant les notes possibles aux items d'un sujet.

L'expérience consiste à tirer au sort un sujet dans la population $\mathcal{P}$ et à observer ses notes aux items du test.

L'univers des possibles de l'expérience est alors l'ensemble $\mathcal{P} \times \tilde{U} = U$ formé des couples (i,x) , où x est une suite $(x^1,x^2,\ldots, x^k)$, les symboles x^j valant 0 ou 1 , et la probabilité de (i,x) est $\mathbb{P}(i,x) = \frac{1}{m}\tilde{\mathbb{P}}_i(x)$ où $\tilde{\mathbb{P}}_i(x) = \Pi_{o,i}(x^1)P_i(x^1,x^2)P_i(x^2,x^3)\ldots P_i(x^{k-1},x^k)$.

Soit S la variable aléatoire $S(i,x) = i$ (numéro du sujet tiré à la première étape) et soit Y une variable aléatoire liée à l'expérience, *i.e.* application de U dans R .

$$(i,x) \longmapsto Y(i,x)$$

Soit Y_i l'application partielle de $\tilde{U}$ dans R , $x \longmapsto Y_i(x) = Y(i,x)$

<u>*LEMME 10.1.*</u>

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{m} E_i(Y_i) \quad \textit{où} \quad E_i(Y_i) \textit{ est l'espérance de } Y_i \textit{ lorsque}$$

$\tilde{U}$ *est muni de la probabilité* $\tilde{\mathbb{P}}_i$.

Démonstration.

$E(Y) = \sum_{i=1}^{m} P(S=i)E(Y/S=i)$ et $E(Y/S=i) = E_i(Y_i)$, comme il est aisé de le vérifier.

Introduisons maintenant les variables suivantes :

$X^j(i,x^1,x^2,\ldots,x^k) = x^j$ (note obtenue au $j^{\text{ième}}$ item par le sujet tiré)

$V^j(i,x^1,x^2,\ldots,x^k) = v_i^j$ (note vraie au $j^{\text{ième}}$ item de l'individu tiré)

$Z^j(i,x^1,x^2,\ldots,x^k) = x^j - v_i^j$ (note erreur au $j^{\text{ième}}$ item de l'individu tiré) .

THEOREME 10.1.

1) $X^j = V^j + Z^j$

2) $E(Z^j) = 0$

3) $\rho(V^j,Z^{j'}) = 0$ *pour tout couple* (j,j')

4) $\rho(Z^j,Z^{j'})$ *est en général différent de* 0 *et*

$$\text{cov}(Z^j,Z^{j'}) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \Pi_i^j(1)(1-\Pi_i^j(1)(d_i)^{j'-j} \quad \text{si} \quad j' > j .$$

Démonstration.

a) le 1 est évident, d'après la définition des variables incriminées.

b) $E(Z^j) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} E_i(Z_i^j) = 0$, car $E_i(Z_i^j) = 0$ pour tout sujet i,

$$\text{cov}(Z^j,Z^{j+h}) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} [\Pi_i(1) + (d_i)^{j-1}(\Pi_{o,i}(1)-\Pi_i(1))][(d_i)^h(1-\Pi_i(1)) - d^{j+h-1}(\Pi_{o,i}(1)-\Pi_i(1))]$$

et l'on a asymptotiquement (si j est grand) ou exactement si $\Pi_{o,i}(1) = \Pi_i(1)$

$$\text{cov}(Z^j,Z^{j+h}) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \Pi_i(1)(1-\Pi_i(1)(d_i)^h$$

Donc la corrélation (Z^j,Z^{j+h}) est en général différente de 0 .

c) $\mathrm{cov}(V^j, Z^{j'}) = 0$, car

$$\mathrm{cov}(V^j, Z^{j'}) = E(V^j Z^{j'}) - E(V^j)E(Z^{j'}) = E(V^j Z^{j'}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} E_i(V_i^j Z_i^{j'})$$

et $V_i^j = v_i^j$, donc $E_i(V_i^j Z_i^{j'}) = v_i^j E_i(Z_i^{j'}) = 0$.

Donc $\rho(V^j, Z^{j'}) = 0$.

d)
$$\mathrm{cov}(Z^j, Z^{j'}) = E(Z^j Z^{j'}) - E(Z^j)E(Z^{j'}) = E(Z^j Z^{j'})$$
$$= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} E_i(Z_i^j Z_i^{j'}) \ .$$

Nous avons vu précédemment que si $j' = j+h$

$$E_i(Z_i^j Z_i^{j'}) = \widetilde{\mathbb{P}}_i[X_i^j = 1] \times (1 - \widetilde{\mathbb{P}}_i[X_i^j = 1])(d_i)^h$$
$$= \Pi_i^j(1)(1-\Pi_i^j(1))(d_i)^h \text{ , en posant } \Pi_i^j(1) = \widetilde{\mathbb{P}}_i[X_i^j = 1] .$$

D'où $\mathrm{cov}(Z^j Z^{j+h}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \Pi_i^j(1)(1-\Pi_i^j(1))(d_i)^h$ qui est en général non nul.

On montre aisément le

<u>*THEOREME 10.2.*</u> X^j *a deux valeurs possibles* 0 *ou* 1

$$\mathbb{P}[X^j = 1] = E(X^j) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} E(X_i^j) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \widetilde{\mathbb{P}}_i[X_i^j = 1] = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \Pi_i^j(1).$$

Introduisons maintenant les notations suivantes :

$\vec{\Pi}^j$, le vecteur R^m de composantes $\Pi_i^j(1) = \widetilde{P}_i[X^j = 1]$

$\vec{\Pi}$, " " $\Pi_i(1)$

$\vec{\Pi}_o$, " " $\Pi_{o,i}(1)$

$\vec{D}^{(r)}$, " " $(d_i)^r$;

et plus généralement, si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont deux vecteurs de R^m , le vecteur $\vec{y}$ ayant ses composantes $y_i \neq 0$, $(\overrightarrow{x.y})$ est le vecteur de R^m de composante $(x_i y_i)$

$(\frac{\vec{x}}{y})$ " " $(\frac{x_i}{y_i})$

Nous noterons également $\bar{x}$ le produit scalaire $(\vec{x}, \vec{I})$.

Alors la relation $\widetilde{\mathbb{P}}_i[X_i^j = 1] = \Pi_i(1) + (d_i)^{j-1}(\Pi_{o,i}(1) - \Pi_i(1)$

s'écrit

$$\vec{\Pi}^j = \vec{\Pi} + \overrightarrow{D^{j-1}(\Pi_o - \Pi)}$$

et

$$\mathbb{P}[X^j = 1] = < \vec{\Pi}^j, \vec{I} > = \overline{\Pi}^j = \overline{\Pi} + < \vec{D}^{j-1}, \vec{\Pi}_o - \vec{\Pi} >$$

<u>*THEOREME 10.3.*</u> *a) L'item* j *a pour fidélité* $f^j = \dfrac{\|\vec{\Pi}^j - \overline{\Pi}^j \vec{I}\|^2}{\overline{\Pi}^j(1-\overline{\Pi}^j)}$

b) lorsque j *est grand, ou lorsque* $\vec{\Pi}^o = \vec{\Pi}$, $f^j \simeq \dfrac{\|\vec{\Pi} - \overline{\Pi}\,\vec{I}\|^2}{\overline{\Pi}(1-\overline{\Pi})}$ (= si $\vec{\Pi}^o = \vec{\Pi}$)

<u>Démonstration.</u>

On sait que X^j a pour valeurs 1 ou 0 avec les probabilités $\overline{\Pi}^j$ et $1 - \overline{\Pi}^j$;

on a donc $\sigma^2(X^j) = \overline{\Pi}^j(1-\overline{\Pi}^j)$

$$V^j(i,x) = v_i^j = \Pi_i^j(1)$$

$$E(V^j) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} E_i(V_i^j) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \Pi_i^j(1) = \overline{\Pi}^j$$

$$E(V^j)^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} E_i(V_i^j)^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} (\Pi_i^j)^{(2)} = \|\vec{\Pi}^j\|^2 = \overline{\Pi^{j(2)}}$$

$$\sigma^2(V^j) = \|\vec{\Pi}^j\|^2 - (\overline{\Pi}^j)^2 = \|\vec{\Pi}^j - \overline{\Pi}^j\vec{I}\|^2 ,$$

d'où le résultat.

On sait d'autre part que $\Pi_i^j = \Pi_i$ pour tout i , si $\vec{\Pi}^o = \vec{\Pi}$, on a

$f^j = \dfrac{\|\vec{\Pi} - \overrightarrow{\Pi I}\|^2}{\overline{\Pi}(1-\overline{\Pi})}$, l'égalité ayant lieu de manière approchée si j est grand sans condition sur $\vec{\Pi}_o$.

On a donc bien le résultat annoncé en b).

<u>*THEOREME 10.4.*</u> *Soit* V *la note vraie au test total*

$$\sigma^2(V) = k^2 \|\vec{\Pi} - \overrightarrow{\Pi I}\|^2 + 2k < \vec{\Pi} - \overrightarrow{\Pi I} , \overrightarrow{\frac{\Pi_o - \Pi}{I - D}} > + a_o$$

où a_o *est un terme complémentaire dont on peut donner l'expression exacte et qui reste borné lorsque* $k \to +\infty$.

Démonstration. $V(i,x) = V^1(i,x) + V^2(i,x) + \dots + V^k(i,x)$

$$= \sum_{j=1}^{k} \Pi_i^j(1) = v_i$$

Soit $\vec{V}$ le vecteur de composantes v_i

$$\vec{V} = \vec{\Pi}^1 + \vec{\Pi}^2 + \dots + \vec{\Pi}^k ,$$

alors $E(V) = \overline{V} = \sum_{j=1}^{k} \overline{\Pi}^j$,

$$E(V^2) = \| \vec{V} \|^2 = \langle \vec{\Pi}^1 + \vec{\Pi}^2 + \dots + \vec{\Pi}^k , \vec{\Pi}^1 + \vec{\Pi}^2 + \dots + \vec{\Pi}^k \rangle .$$

On sait que $\vec{\Pi}^j = \vec{\Pi} + \overrightarrow{(\Pi^o - \Pi).D^{j-1}}$

$$\vec{V} = k\vec{\Pi} + \sum_{j=1}^{k} \overrightarrow{(\Pi^o - \Pi)D^{j-1}} = k\vec{\Pi} + \overrightarrow{(\Pi_o - \Pi)\frac{(I-D^k)}{I-D}}$$

$$= k\vec{\Pi} + \overrightarrow{\frac{\Pi_o - \Pi}{I-D}} - \overrightarrow{\frac{(\Pi_o - \Pi)D^k}{I-D}} .$$

Il en résulte que $\overline{V} = k\overline{\Pi} + \frac{\overline{(\Pi_o - \Pi)(I-D^k)}}{(I-D)} = k\overline{\Pi} + \left(\frac{\overline{\Pi_o - \Pi}}{I-D}\right) - \frac{\overline{(\Pi_o - \Pi)D^k}}{(I-D)}$

$$\sigma^2(V) = E(V^2) - (\overline{V})^2$$

$$= \| \vec{V} - \overline{V}I \|^2$$

$$\vec{V} - \overline{V}\vec{I} = k(\vec{\Pi} - \overline{\Pi}\,\vec{I}) + \left(\overrightarrow{\frac{(\Pi_o - \Pi)}{I-D}} - \frac{\overline{\Pi_o - \Pi}}{I-D}.\vec{I}\right) + \vec{W} - \overline{W}\vec{I}$$

en posant $\vec{W} = -\overrightarrow{\left(\frac{\Pi_o - \Pi}{I-D}\right)D^k}$

D'où :

$$\| \vec{V} - \overline{V}\vec{I} \|^2 = k^2 \| \vec{\Pi} - \overline{\Pi}\vec{I} \|^2 + 2k\left(\langle \vec{\Pi} - \overline{\Pi}\,\vec{I}, \overrightarrow{\left(\frac{\Pi_o - \Pi}{I-D}\right)} \rangle - \frac{\overline{\Pi_o - \Pi}}{I-D} \langle \vec{\Pi} - \overline{\Pi}\vec{I} , \vec{I} \rangle\right)$$

$$+ a_o$$

où $a_o = \| \overrightarrow{\frac{\Pi_o - \Pi}{I-D}} - \left(\frac{\overline{\Pi_o - \Pi}}{I-D}\right)\vec{I} \|^2 + \| \vec{W} - \overline{W}\vec{I} \|^2$

$$+ 2k \langle \vec{\Pi} - \overline{\Pi}\vec{I}, \vec{W} - \overline{W}\,\vec{I} \rangle + 2 \langle \left(\frac{\overrightarrow{\Pi_o - \Pi}}{I-D}\right) - \frac{\overline{\Pi_o - \Pi}}{I-D} .\vec{I}, \vec{W} - \overline{W}\,\vec{I} \rangle$$

comme $\| \vec{W} \| \leqslant A.\delta^k$, il en résulte que a_o reste borné si $k \to +\infty$.

D'autre part $< \vec{\Pi}-\overline{\Pi}\vec{I},\vec{I} > = < \vec{\Pi},\vec{I} > - \overline{\Pi} < \vec{I},\vec{I} > = \overline{\Pi} - \overline{\Pi} = 0$

il vient finalement

$$\| \vec{V}-\overline{V}\,\vec{I} \|^2 = \sigma^2(V) = k^2 \| \vec{\Pi}-\overline{\Pi}\,\vec{I} \|^2 + 2k < \vec{\Pi}-\overline{\Pi}\,\vec{I}, \overrightarrow{\left(\frac{\Pi_o-\Pi}{I-D}\right)} > + a_o \,.$$

On montre de manière analogue le

THEOREME 10.5.

$$\sigma^2(T) = k^2 \| \vec{\Pi}-\overline{\Pi}\,\vec{I} \|^2 + 2k < \vec{\Pi}-\overline{\Pi}\,\vec{I}\,, \overrightarrow{\frac{\Pi_o-\Pi}{I-D}} > + 2k < \vec{\Pi}, \overline{\frac{D(I-\Pi)}{I-D}} > + k(\overline{\Pi} - \| \vec{\Pi} \|^2) + a_1$$

où a_1 *est un terme complémentaire qui reste borné lorsque* $k \to +\infty$.

Nous avons alors

$$F = \frac{\sigma^2(V)}{\sigma^2(T)} = \frac{k^2 \| \vec{\Pi}-\overline{\Pi}\,\vec{I} \|^2 + 2k < \vec{\Pi}-\overline{\Pi}\,\vec{I}\,, \overrightarrow{\frac{\Pi_o-\Pi}{I-D}} > + a_o}{k^2 \| \vec{\Pi}-\overline{\Pi}\vec{I} \|^2 + 2k < \vec{\Pi}-\overline{\Pi}\,\vec{I}, \overrightarrow{\frac{\Pi_o-\Pi}{I-D}} > + k(2 < \vec{\Pi}, \overrightarrow{\frac{D(I-\Pi)}{I-D}} + \overline{\Pi} - \| \vec{\Pi} \|^2) + a_1} \,,$$

on voit que si k *est grand*

$$F = \frac{1 + \frac{2}{k \| \vec{\Pi}-\overline{\Pi}\,I \|^2} < \vec{\Pi}-\overline{\Pi}\,\vec{I}\,, \overrightarrow{\left(\frac{\Pi_o\;\Pi}{I-D}\right)} > + \frac{a_o}{k^2 \| \vec{\Pi}-\overline{\Pi}\,I \|^2}}{1 + \frac{2}{k \| \vec{\Pi}-\overline{\Pi}\,I \|^2} < \vec{\Pi}-\overline{\Pi}\,\vec{I}\,, \overrightarrow{\frac{\Pi_o-\Pi}{I-D}} > + \frac{1}{k \| \vec{\Pi}-\overline{\Pi}\,I \|^2}[2 < \vec{\Pi}, \overrightarrow{\frac{D(I-\Pi)}{I-D}} + \overline{\Pi} - \| \vec{\Pi} \|^2)] + \frac{a_1}{k^2 \| \vec{\Pi}-\overline{\Pi}\,I \|^2}}$$

$$= 1 - \frac{1}{k \| \vec{\Pi}-\overline{\Pi}\,I \|^2} [2 < \vec{\Pi}\,, \overrightarrow{\frac{D(I-\Pi)}{I-D}} > + \overline{\Pi} - \| \vec{\Pi} \|^2] + \frac{1}{k^2} B \,,$$ *où* B *rest borné.*

On a donc, pour k grand

$$F \simeq 1 - \frac{1}{k \| \vec{\Pi}-\overline{\Pi}\,\vec{I} \|^2} (2 < \vec{\Pi}, \overrightarrow{\frac{D(I-\Pi)}{I-D}} > + \overline{\Pi} - \| \vec{\Pi} \|^2)$$

$$\simeq 1 - \frac{c}{k} \,.$$

On voit que dans la constante c, la loi initiale Π^{o} n'intervient pas. Si l'on cherche à estimer c sur la base d'un n-échantillon de sujets testés, on peut montrer les résultats suivants :

a) on peut estimer $\overline{\Pi}$ par $\hat{p}^{k}$, proportion de sujets ayant réussi le dernier item.

b) on peut estimer $\|\vec{\Pi}-\overline{\Pi}I\|^{2}$ par $\frac{\hat{\sigma}^{2}(T)}{k^{2}}$, $\hat{\sigma}^{2}(T)$ désignant la variance empirique des notes totales du test.

On estime alors $\|\vec{\Pi}\|^{2}$ par $\frac{\widehat{\sigma^{2}(T)}}{k^{2}} + (\hat{p}^{k})^{2}$

c) soit $\hat{p}^{j,j,h}$ la proportion des sujets de l'échantillon ayant réussi les items j et j+h.

$$< \vec{\Pi}\ ,\ \overrightarrow{\left(\frac{I-\Pi}{I-D}\right) D} > \text{ s'estime par } \sum_{k=1}^{j_o} \hat{p}^{j_o,j_o+h} - \left(\frac{\hat{\sigma}^{2}(T)}{k^{2}} + (\hat{p}^{k})^{2}\right) j_o$$

où j_o est l'entier le plus proche de $\sqrt{k}$.

La fidélité F est alors estimée par

$$\hat{F} = 1 - \frac{2}{\frac{\hat{\sigma}^{2}(T)}{k}} \left(\sum_{h=1}^{j_o} \hat{p}^{j_o,j_o+h} - j_o\left(\frac{\hat{\sigma}^{2}(T)}{k^{2}} + (\hat{p}^{k})^{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\hat{p}^{k}(1-\hat{p}^{k}) - \frac{\widehat{\sigma^{2}(T)}}{k^{2}}\right)\right)$$

B I B L I O G R A P H I E

[1] GUILFORD J.P., *Psychometric methods*, Bombay - New Dehli, Tata - McGraw-Hill, 1954.

[2] KUDER G.F., RICHARDSON M.W., "The theory of the estimation of test reliability", *Psychometrika*, 1937, 2, 95-101.

[3] LORD F.M., NOVICK M.R., *Statistical theories of mental test scores*, Reading Mass, Addison Wesley, 1968.

[4] MOSIER C.I., "On the reliability of a weighted composite", *Psychometrika*, 1943, vol.8, 161-168.

[5] HOEL P., STONE C., PORT S., *A first course in stochastic processes*, Boston, Houghton Mifflin, 1972.

[6] ZIMMERMAN D.W., WILLIAMS R.H., "The theory of test validity and correlated errors of measurement", *J. math. Psychol.*, 1977, vol. 16, 135-152.