O. COGIS

# À propos des quasi-ordres - Note

*Mathématiques et sciences humaines*, tome 72 (1980), p. 107-111
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1980__72__107_0>

*Math. Sci. hum.* (*18*$^e$ année, n°72, *1980*, p.107-111)

# A PROPOS DES QUASI-ORDRES - NOTE

O. COGIS *

## 1. INTRODUCTION

Dans "Axiomatiques et Propriétés des Quasi-Ordres", B. Monjardet [4] suggère qu'il pourrait être intéressant de relaxer la contrainte de réflexivité ou d'anti-réflexivité pour certains types de relations qu'il étudie.

Cette note, où sont notamment caractérisées les S-relations de Ferrers, est un élément de réponse au problème soulevé (les définitions et notations utilisées sont celles de l'article cité en référence).

## 2. UNE PROPRIETE DES RELATIONS DE FERRERS

D'après [1 p. 106, 2], on peut énoncer :

THEOREME 1

Q est une relation de Ferrers sur X ssi il existe deux applications $f_1$ et $f_2$ de X dans $\mathbb{R}$ satisfaisant : $\forall x,y \in X \quad x\,Q\,y \Leftrightarrow f_1(x) > f_2(y)$ .

Notons $T_1$ et $T_2$ les préordres totaux respectivement déterminés sur X par $f_1$ et $f_2$ de la manière suivante : pour $i = 1,2$ et pour tous $x,y \in X$, $x\,T_i\,y \Leftrightarrow f_i(x) \geq f_i(y)$ .

On peut alors compléter le résultat précédent :

PROPRIETE 1

Pour les deux applications du théorème 1 , on a $T_1 \subseteq T_+$ et $T_2 \subseteq T_-$ ; de plus, on peut exiger que $T_1$ (resp. $T_2$) soit l'un quelconque des préordres totaux inclus dans $T_+$ (resp. $T_-$).

*Institut de Programmation, Université Pierre et Marie Curie

démonstration :
rappelons que la condition du théorème 1 signifiant que Q est une relation de Ferrers, on a $T_+ = T_f$ et $T_- = T_c$ ; il est alors clair que $x\,T_1\,y \Leftrightarrow f_1(x) \geq f_1(y) \Rightarrow x\,T_f\,y \Leftrightarrow x\,T_+\,y$ ;
de plus, soient $f_1$ et $f_2$ deux applications satisfaisant la condition du théorème 1 , et $T_3 \subseteq T_+$ et $T_4 \subseteq T_-$ deux préordres totaux sur X ; on peut de plus supposer sans perte de généralité que $f_1(X) \cap f_2(X) = \emptyset$ ;
alors à chaque classe C de $E_f$ on peut associer un intervalle $\alpha_c$ de longueur non nulle et tel que $f_1(C) \subseteq \alpha_c$ et $f_2(X) \cap \alpha_c = \emptyset$ ;
comme $T_3 \subsetneq T_f$ , on peut définir une application $f_1'$ de X dans R telle que $f_1'(C) \subseteq \alpha_c$ et $T_1' = T_3$ (i,e; $f_1'(x) \geq f'_1(y) \Leftrightarrow x\,T_3\,y$);
on a alors $f_1'(x) > f_2(y) \Leftrightarrow f_1(x) > f_2(y)$ , et on construit de façon similaire une application $f_2'$ à partir de $f_1'$ , $f_2$ et $T_4$ (signalons qu'il est aisé de modifier l'algorithme de [2] pour construire directement deux applications $f_1'$ et $f_2'$ telles que $T_1' = T_3$ et $T_2' = T_4$) ∎

## 3. LES S-RELATIONS DE FERRERS

C'est-à-dire les relations qui sont à la fois des S-relations et des relations de Ferrers (ce sont les "step-type relations" de H. Sharp [5] qui s'y interesse lorsqu'elles sont transitives). Elles ont été souvent caractérisées dans le cas où elles sont réflexives (les quasi-ordres) ou au contraire anti-réflexives (les ordres quasi-forts). Le résultat suivant en permet une caractérisation dans le cas général :

THEOREME 2

Pour une relation Q sur un ensemble (fini) X , les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) Q est une S-relation de Ferrers

(2) T est un préordre total

(3) Q admet un tableau (Q,O) en escalier

(4) $T = T_s$

(5) pour tout ordre total $O \subseteq T_s$ , le tableau (Q,O) est en escalier

(6) $T = T_{+-}$ et/ou $T = T_{-+}$

(7) Q est une relation de Ferrers telle que $T_{+-} = T_{-+}$ (ou, de façon équivalente, $T_{fc} = T_{cf}$)

(8) il existe deux applications $f_1$ et $f_2$ de X dans $\mathbb{R}$ telles que
 (i) pour tous $x,y \in X$ $\quad f_1(x) \leq f_1(y) \Leftrightarrow f_2(x) \leq f_2(y)$
 (ii) pour tous $x,y \in X$ $\quad x\,Q\,y \Leftrightarrow f_1(x) > f_2(y)$

démonstration :

(1) ⇒ (6) : on sait que pour toute relation, $T \subseteq T_{+-}$ ; supposons alors que $x\ (T)^c\ y$ , c'est-à-dire que $Q(x) \not\supseteq Q(y)$ ou $Q^-(x) \not\subseteq Q^-(y)$ ; comme Q est une relation de Ferrers, on a $Q(x) \subset Q(y)$ ou $Q^-(x) \supset Q^-(y)$ ; dans le premier cas on a $d^+(x) < d^+(y)$ et donc $x\ (T_{+-})^c\ y$ , et dans le second cas, d'une part $d^-(x) > d^-(y)$ , d'autre part, puisque Q est une S-relation, on a $Q(y) \supseteq Q(x)$ , donc $d^+(x) \leq d^+(y)$ , et donc encore $x\ (T_{+-})^c\ y$ ; on en conclut que $T = T_{+-}$ ;

(6) ⇒ (2) : trivial ;

(2) ⇒ (1) : il est évident que Q est une relation de Ferrers; si ce n'est pas une S-relation, il existe x et y tels que $Q(x) \not\supseteq Q(y)$ et $Q^-(x) \not\supseteq Q^-(y)$; donc $Q(x) \subset Q(y)$ et $Q^-(x) \subset Q^-(y)$ , et par conséquent $x\ (T)^c\ y$ et $y\ (T)^c\ x$ ;

(2) ⇒ (4) : si $y\ T\ x$ , alors $Q(y) \supseteq Q(x)$ et $Q^-(y) \subseteq Q^-(x)$ , et donc $d^+(y) \geq d^+(x)$ et $d^-(y) \leq d^-(x)$ ;

si $x\ (T)^c\ y$ , alors $y\ T\ x$ et l'une au moins des deux inclusions ci-dessus ainsi que l'une au moins des deux inégalités ci-dessus, est stricte; on en déduit que $d^+(y) - d^-(y) > d^+(x) - d^-(x)$ , soit $x\ (T_s)^c\ y$ ;

d'autre part, on sait que $T \subseteq T_s$ ;

(4) ⇒ (5) ⇒ (3) ⇒ (2) : évident ;

(1) ⇒ (7) : immédiat puisque (1) ⇒ (6) ;

(7) ⇒ (8) : immédiat d'après le théorème 1 et la propriété 1 (il suffit d'imposer $T_1 = T_{+-}$ et $T_2 = T_{-+}$ ) ;

(8) ⇒ (1) : d'après le théorème 1 , Q est une relation de Ferrers; soient x et y tels que $Q(x) \not\supseteq Q(y)$ ; alors il existe $z \in Q(y) - Q(x)$ et on a $f_1(x) \leq f_2(z) < f_1(y)$ , donc $f_2(x) < f_2(y)$ , soit $Q^-(x) \supseteq Q^-(y)$ ■

## 4. APPLICATION AUX QUASI-ORDRES ET AUX ORDRES QUASI-FORTS

Rappelons que les relations d'intervalles et les ordres d'intervalles sont les relations de Ferrers qui sont respectivement réflexives et anti-réflexives, tandis que les quasi-ordres et les ordres quasi-forts sont les S-relations de Ferrers qui sont respectivement réflexives et anti-réflexives.

Il apparaît alors que le théorème 5 , l'équivalence (1)-(5)-(6) du corollaire 1 , le théorème 7 et le théorème 8 de la section 7 de [4] s'obtiennent en réécrivant le théorème 2 de cette note pour des relations réflexives, tandis que le théorème 5bis , l'équivalence (1)-(7)-(8) du corollaire 2 , le théorème 7bis et le théorème 8bis s'obtiennent en réécrivant ce même théorème pour des relations anti-réflexives.

D'autre part, l'égalité $\lambda(x) = [f_1(x), f_2(x)]$ établit une bijection entre les fonctions $\lambda$ (cf. la section 8 de [4]) et les couples de fonctions

$f_1$ et $f_2$ de X dans $\mathbb{R}$ telles que $f_1(x) \leq f_2(x)$ pour tout x de X .

Cette dernière condition traduisant l'anti-réflexivité pour une relation de Ferrers lorsque $f_1$ et $f_2$ satisfont la condition du théorème 1 , l'équivalence (1)-(3) du théorème 9 de la section 8 de [4] est une formulation équivalente au théorème 1 de cette note, écrite dans le cas particulier des relations anti-réflexives, tandis que l'équivalence (1)-(5) du théorème 10 de la section 8 de [4] traduit l'équivalence (1)-(8) du théorème 2 de cette note dans ce même cas particulier (à condition de se rappeler qu'on peut exiger dans le théorème 1 , et donc dans la condition (8) du théorème 2 , que $f_1$ et $f_2$ satisfassent à : pour $i = 1,2$ et pour tous $x,y \in X$ , $f_i(x) \neq f_i(y)$ ) .

## 5. UN ECHEC A LA RELAXATION DE LA CONTRAINTE DE REFLEXIVITE

A toute relation R sur X on peut associer un graphe simple (i.e. graphe non orienté, sans boucles ni arêtes multiples) que nous noterons $G_{sym}(R)$ , ayant X comme ensemble de sommets, et tel que deux sommets x et y distincts soient adjacents dans $G_{sym}(R)$ ssi $xRy$ et $yRx$ .

On définit classiquement un graphe d'intervalles comme un graphe simple G tel qu'on puisse définir une application de l'ensemble de ses sommets dans l'ensemble des intervalles d'un ensemble totalement ordonné de sorte que deux sommets distincts de G sont adjacents dans G ssi leurs intervalles associés ont une intersection non vide.

De cette définition et du théorème 9 de [4] , on déduit, en se rappelant que les relations d'intervalles sont les duales des ordres d'intervalles :

### THEOREME 3

Un graphe simple G est un graphe d'intervalles ssi il existe une relation d'intervalles R (i.e. une relation de Ferrers réflexive) telle que $G = G_{sym}(R)$.

Le contre-exemple suivant montre que la condition de réflexivité ne peut être supprimée de l'énoncé du théorème 3 : la relation R donnée ci-dessous par sa matrice est une relation de Ferrers (ni réflexive ni anti-réflexive), mais $G = G_{sym}(R)$ n'est pas un graphe d'intervalles : acadaeafghijkjljmjba est un cycle de $G^c$ , le graphe complémentaire de G , et c'est un cycle impair et sans corde triangulaire (au sens de [3]).

| | a | b | c | d | e | f | g | h | i | j | k | l | m |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| b | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| c | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| d | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| e | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| f | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| g | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| h | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| i | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| j | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| k | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| l | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| m | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

(autrement dit, bien que G n'ait pas de carré sans diagonale, ce qui est toujours le cas pour $G_{sym}(R)$ lorsque R est une relation de Ferrers, G n'est pas un graphe d'intervalles parce que $G^c$ n'est pas un graphe de comparabilité)

## 6. BIBLIOGRAPHIE


[1] BOUCHET A., "Etude Combinatoire des Ordonnés Finis. Applications", *thèse d'état*, Université Scientifique et Médicale de Grenoble, 1971.

[2] COGIS O., "Ferrers Digraphs and Threshold Graphs", *CR n°13, Gr. Rech. CNRS n°22*, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1979.

[3] GILMORE P.C., HOFFMAN A.J., "A Characterization of Comparability Graphs and of Interval Graphs", *Can. J. Math.*, 16 (1964), 539-548.

[4] MONJARDET B., "Axiomatiques et Propriétés des Quasi-ordres", *Math. Sc. Hum.*, 63 (1978), 51-82.

[5] SHARP H., "Enumeration of Transitive Step-type Relations", *Acta Math. Acad. Sc. Hung.*, 22 (1971), 365-371.