MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

T. DRIDI

Sur les distributions binaires associées à des distributions ordinales

Mathématiques et sciences humaines, tome 69 (1980), p. 15-31

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1980__69__15_0>

Math. Sci. hum. (*18*^{e} année, n°69, *1980*, p.15-31)

SUR LES DISTRIBUTIONS BINAIRES ASSOCIEES A DES DISTRIBUTIONS ORDINALES*

T. DRIDI**

INTRODUCTION

Soit S un ensemble fini d'objets, et E un ensemble fini d'ordres totaux sur S, où chacun des ordres O_i de E est affecté d'un coefficient réel $p_i \in]0,1]$ tel que $\sum_i p_i = 1$.

Ces données peuvent signifier qu'en présence de l'ensemble S, chacun des ordres O_i a la probabilité p_i d'être adopté comme étant l'ordre de préférence d'un certain sujet. Dans ce cas, E représente l'ensemble des ordres de préférences possibles du sujet sur l'ensemble S.

---

* Je tiens à remercier MM. B. MONJARDET et H. RAYNAUD pour leurs remarques au cours de la rédaction de cet article.

**Laboratoire I.M.A.G. - BP 53 X - 38041 Grenoble Cédex - FRANCE

A partir de telles données, il est évidemment facile de calculer pour tout couple (x,y) d'objets distincts de S la quantité v(x,y) probabilité que l'objet x soit préféré à l'objet y. Elle est égale à la somme des p_i des ordres contenant le couple (x,y) (la fonction v est dite distribution binaire associée à la distribution ordinale E).

Considérons le problème suivant :

Supposons qu'à tout couple (x,y) d'objets distincts de S soit associée une valeur numérique v(x,y) par laquelle le sujet exprime l'intensité de sa préférence sur x par rapport à y.

En pratique cette intensité peut être prise comme étant la fréquence théorique avec laquelle le sujet, en présence de x,y préfère x à y.

Serait-il possible d'expliquer ces préférences binaires par une structure latente (probabilisation d'ordres sur les objets) qu'on suppose régir le choix du sujet.

(Pour plus de détails sur la question, cf. Guilbaud [4], Marschak [9], qui étaient probablement les premiers à proposer ce modèle).

* * *

Dans la partie A de cet article, nous exposons des définitions, notations et résultats préliminaires.

Dans la partie B, nous rappelons des résultats sur la dimension des ordres partiels permettant de donner une nouvelle caractérisation de ces derniers lorsque leur dimension est inférieure ou égale à 2. Ce résultat nous permet de plus d'infirmer une conjecture de Marschak et un résultat de Guilbaud pour $|S| \geq 6$.

Enfin dans la partie C, nous montrons la validité de la conjecture pour un nombre d'objets inférieur ou égal à 5.

A - DEFINITIONS, NOTATIONS ET RESULTATS PRELIMINAIRES

Soient :

$S = \{x,y,z,u...\}$ un ensemble fini de cardinalité n

$S^{(2)} = \{(x,y),\ x\in S,\ y\in S,\ x \neq y\}$ (ensemble de couples d'éléments distincts de S).

T l'ensemble des ordres totaux* sur S ($|T| = n!$).

A.1 - Distribution ordinale ou état de l'opinion

Soit :

$R = \{o_1, o_2, \ldots, o_i, o_j, o_k, \ldots, o_r\} \subseteq T,$

une application $p : R \to]0,1]$ qui à o_i fait correspondre p_i avec $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$.

On dira que $E = (R,p)$ est un état de l'opinion (ou distribution ordinale) sur S. Autrement dit, un état de l'opinion sur S est un ensemble d'ordres totaux sur S, pondérés par des nombres réels $p_i \in]0,1]$, tels que la somme des p_i soit égale à l'unité.

A.2 - Fonction D.I.B.A.D.O. (Distribution Binaire Associée à une Distribution Ordinale) :

Si l'on pose pour $x \neq y$:

$R(x,y) = \{o_i \in R : x\ o_i\ y\}$,

$R(y,x) = \{o_i \in R,\ y\ o_i\ x\} = \overline{R(x,y)}$

l'application $V_E : S^{(2)} \to [0,1]$, qui à tout couple (x,y) d'éléments de $S^{(2)}$ fait correspondre $V_E(x,y) = \sum_{o_i \in R(x,y)} p_i$, sera dite D.I.B.A.D.O. associée à l'état de l'opinion E.

Inversement si V est une D.I.B.A.D.O., toutes les fois qu'on notera E_V un état de l'opinion, cela signifiera que sa fonction D.I.B.A.D.O. est égale à V.

Soit E un état de l'opinion donné, V_E la D.I.B.A.D.O. associée, on a :

$V_E(x,y) + V_E(y,x) = 1 \qquad \forall\ (x,y)\in S^{(2)}$

Soit $U \subseteq S^{(2)}$, on pose : $V_E(U) = \sum_{(x,y)\in U} V_E(x,y)$

---

* Ici les "ordres totaux" ne vérifient pas la réflexivité, ils sont, en fait, la restriction d'ordres totaux à $S^{(2)}$ (ordre total "strict").

Exemple :

$S = \{x,y,z,u\}$

$o_1 = (x,y,z,u)$, $p_1 = 1/2$

$o_2 = (y,z,u,x)$, $p_2 = 1/3$

$o_3 = (u,x,z,y)$, $p_3 = 1/6$

$E = (R,p)$ est un état de l'opinion ($R = \{o_1, o_2, o_3\}$, $p_i : R \rightarrow \{p_1,p_2,p_3\}$

$V_E(x,y) = p_1 + p_3 = \frac{1}{6}$, $V_E(u,y) = \frac{1}{6}$, etc... .

A.3 - Définition :

Soit C une partie de $S^{(2)}$ telle que :

$C = (x_1,x_2), (x_2,x_3), (x_3,x_4), \dots, (x_{\ell-1},x), (x_\ell,x_1)$

On dit que C est un ℓ-circuit de $S^{(2)}$ (ou un circuit de $S^{(2)}$, de longueur $\ell = |C|$). Quand il n'y aura pas de confusion à craindre, C sera désigné également par $[x_1,x_2,x_3,\dots,x_{\ell-2},x_{\ell-1},x_\ell]$.

La vérité des deux lemmes suivants est simple à vérifier :

LEMME 1 : $\forall\ U \subseteq S^{(2)}$

$$V_E(U) = \sum_{(x,y)\in U} \Big(\sum_{o_i\in R(x,y)} p_i \Big) = \sum_{o_i\in R} p_i \, |o_i \cap U|$$

LEMME 2 : Soient o_i un ordre total sur S, C un ℓ-circuit de $S^{(2)}$, on a :

$1 \leq |o_i \cap C| \leq (\ell-1)$

A.4 - Définition. Soit un ordre total o_i sur S, et un ℓ-circuit C de $S^{(2)}$, on dit que C est o_i-saturé ou que o_i sature C si et seulement si :

$|o_i \cap C| = \ell-1$

PROPOSITION 1 (Guilbaud [3]) : Soient V_E une D.I.B.A.D.O. et C un ℓ-circuit, on a :

$1 \leq V_E(C) \leq (\ell-1)$, (1)

et de plus on a :

$V_E(C) = \ell-1$ si et seulement si C est o_i saturé pour tout o_i de E.

Démonstration : Ceci est une conséquence immédiate des Lemmes 1 et 2. En effet :

$$1 = \sum_{o_i\in R} p_i \leq V_E(C) = \sum_{o_i\in R} p_i \, |o_i \cap C| \leq (\ell-1) \sum_{o_i\in R} p_i = \ell-1.$$

Corollaire 1 : Pour toute D.I.B.A.D.O. V_E et pour tout 3-circuit C on a :
$1 \leq V_E(C) \leq 2$ (2)

Remarque : Les propriétés du corollaire 1 et de la proposition 1 sont équivalentes [11].

A.5 - Définition : Soient V_E une D.I.B.A.D.O., C un ℓ-circuit.
On dit que C est V_E-saturé si et seulement si : pour tout o_i de E, C est o_i-saturé ($V_E(C) = \ell-1$).

A.6 - Fonction pseudo-D.I.B.A.D.O.

On dira qu'une fonction $\phi : S^{(2)} \to [0,1]$ est pseudo-D.I.B.A.D.O. si et seulement si :
C1) $\forall\ (x,y) \in S^{(2)}$: $\phi(x,y) + \phi(y,x) = 1$
C2) $\forall\ \{x,y,z\}^* \subseteq S$: $1 \leq \phi(x,y) + \phi(y,z) + \phi(z,x) \leq 2$.

B - FONCTIONS PSEUDO D.I.B.A.D.O. ET ORDRES PARTIELS
Rappels - Définitions

B.1 - Ordre partiel

Soit une relation binaire sur S.
On dira que P est un ordre partiel sur S si et seulement si elle est :
- réflexive ; si $x \in S$ alors xPx,
- antisymétrique : si $x,y \in S$, xPy et yPx alors $x = y$;
- transitive : si $x,y,z \in S$, xPy, yPz alors xPz.

B.2 - La relation d'incomparabilité associée à P qu'on désigne par I est définie comme suit :
$x,y \in S,\ xIy \iff \{(x,y),\ (u,x)\} \cap P = \emptyset$

(Si la relation I est vide, l'ordre P est un ordre total).

B.3 - Définition (Dushnik, Miller [5], 1941)
Soit P un ordre partiel sur S.
On dit qu'un ordre total qui contient (ou prolonge) P est séparant si et seulement si :

$$\exists x,y,z \in S \text{ tel que } xPy \text{ avec } xI_p z,\ yI_p z \text{ et } xoz,\ zoy.$$

* On précise que conformément à l'usage $x \neq y \neq z$.

B.4 - Définition (Dushnik,Miller [5], 1941)
La dimension d'un ordre partiel P sur S est définie comme étant la cardinalité minimale d'un ensemble d'ordres totaux (sur S) d'intersection P -on dira qu'ils réalisent P-.

Par ailleurs, il résulte d'un théorème de Szpilrajn [12] que pour tout ordre partiel P, il existe toujours un ensemble d'ordres totaux qui réalisent P.

<u>Fonctions pseudo-D.I.B.A.D.O. et ordres partiels</u>

Soient Q l'ensemble des ordres partiels sur S,
F l'ensemble des applications pseudo-D.I.B.A.D.O. à valeurs dans $\{0,1,1/2\}$.
A tout élément p de Q on associe une image ϕ_p dans F définie comme suit :
$\forall\ x \neq y$ tel que xPy on posera $\phi_p(x,y) = 1$, $\phi_p(y,x) = 0$
$\forall\ x \neq y$ tel que xIy on posera $\phi_p(x,y) = \phi_p(y,x) = 1/2$
On voit immédiatement que ϕ_p appartient effectivement à F.
Réciproquement, on constate que tout élément ϕ de F est l'image d'un élément unique P_ϕ de Q donné par :

$$\phi(x,y) = 1,\ \phi(y,x) = 0 \Rightarrow x\ P_\phi\ y$$
$$\phi(x,y) = \frac{1}{2} = \phi(y,x) \Rightarrow x\ I_{P_\phi}\ y.$$

On vient d'établir une bijection entre les ordres partiels sur S et les fonctions pseudo-D.I.B.A.D.O. $\phi : S^{(2)} \to \{0,1,\frac{1}{2}\}$.

B.5 - <u>Définition</u>
On dit que ϕ est une fonction pseudo-D.I.B.A.D.O. ordinale si elle prend ses valeurs dans l'ensemble $\{0,1,\frac{1}{2}\}$.

THEOREME 1 (Duschnik, Miller [5], 1941) : Soit P un ordre partiel sur S ; les conditions suivantes sont équivalentes :
(1) P est de dimension > 2
(2) Tout ordre total contenant P est séparant.

PROPOSITION 2 : Soient P un ordre partiel sur S, ϕ_P sa pseudo-D.I.B.A.D.O. ordinale associée, o un ordre total contenant P, alors :

o séparant $\Longleftrightarrow \exists$ un 3-circuit ϕ_p-saturé et non o-saturé.

Démonstration : Si o est un ordre total contenant P alors : "o est séparant" équivaut à dire d'après la définition (B.3) que :

$\exists x,y,z \in S$ tel que : xPy et xIz, zIy avec xoz et yoz

ou d'une manière équivalente :

le circuit $C = \{(x,y), (y,z), (z,x)\}$ est ϕ_p-saturé

$(\phi_p(C) = \phi_p(x,y) + \phi_p(y,z) + \phi_p(z,x) = 2)$ et $|C \cap o| = 1$.

c.q.f.d.

Corollaire 2 : Pour un ordre partiel P sur S on a :

$\dim(P) \leq 2 \Longleftrightarrow$ Il existe un ordre total o contenant P tel que tous les 3-circuits ϕ_p-saturés sont o-saturés.

THEOREME 2 : Soit P un ordre partiel, ϕ_p sa fonction ordinale associée, on a : ϕ_p D.I.B.A.D.O. $\Longleftrightarrow$ dim P ≤ 2.

Démonstration

Condition nécessaire : Supposons que ϕ_p soit une D.I.B.A.D.O.

Soit E_{ϕ_p} un état de l'opinion correspondant.

D'après la proposition (1) tout 3-circuit ϕ_p-saturé est o_i saturé, pour tout o_i de E_p.

En outre tout ordre o_i de E_{ϕ_p} contient nécessairement P puisque :

$(x,y)\ P \Longleftrightarrow \phi_p(x,y) = 1 \Longleftrightarrow (x,y) \in o_i \quad \forall o_i \in E_{\phi_p}$.

Par conséquent il existe un ordre total o contenant P tel que tous les 3-circuits ϕ_p-saturés soient o-saturés, ce qui montre d'après le corollaire 2 que P est de dimension inférieure ou égale à 2.

Condition suffisante : Si P est partiel de dimension 2, désignons pas o_1 et o_2 deux ordres totaux réalisant P.

Si l'on attribue à o_1 et o_2 le poids 1/2, il n'est pas difficile de vérifier que l'état de l'opinion E :

$E = (R,p)$, $R = \{o_1,o_2\}$, $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$

a pour fonction D.I.B.A.D.O. la fonction ϕ_p.

Par ailleurs, si P est un ordre total (de dimension 1), il est clair que ϕ_p est une D.I.B.A.D.O., l'état de l'opinion correspondant est formé de l'ordre total P pondéré par 1.

c.q.f.d.

Conséquences du Théorème 2 : Avant de tirer quelques conséquences du Théorème 2, rappelons le résultat suivant :

THEOREME 3 Hiraguchi 1955 [7]) : Soit P un ordre partiel sur S, $|S| \geq 4$. On a :

$$\dim(P) \leq \frac{|S|}{2}$$

Corollaire 3 : Pour $|S| \leq 5$ on a : $\dim(P) \leq 2$.

Par ailleurs, Hiraguchi [7], montre qu'il n'existe que 2 ordres de dimension 3 sur un ensemble à 6 éléments.

Leurs diagrammes de Hasse sont représentés à la figure (B.1).

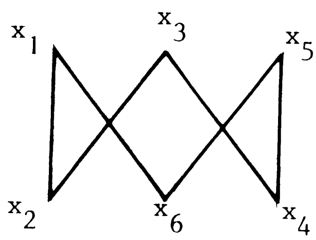


Figure 1

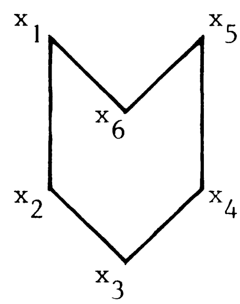


Figure 2

Figure (B-1)

PROPOSITION 3 : Pour un ensemble S de cardinalité ≥ 6, il existe des fonctions $\phi : S^2 \to [0,1] \subseteq R$, pseudo-D.I.B.A.D.O. et non D.I.B.A.D.O.

Démonstration : Il suffit de montrer l'existence d'une telle fonction ϕ pour un ensemble S de cardinalité égale à 6.

Représentons la fonction ordinale ϕ_p, associée à l'ordre partiel de la Figure 1 dans une matrice $\phi_p(i,j)$ 6×6, telle que la case (x_i,x_j) contienne la valeur $\phi_p(x_i,x_j)$.

On obtient le tableau suivant

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1		1	1/2	1/2	1/2	1
x_2	0		0	1/2	1/2	1/2
x_3	1/2	1		1	1/2	1/2
x_4	1/2	1/2	0		0	1/2
x_5	1/2	1/2	1/2	1		1
x_6	0	1/2	1/2	1/2	0	

L'ordre P étant de dimension 3 > 2, il résulte d'après le théorème 2 que la fonction ϕ_p n'est pas D.I.B.A.D.O.

c.q.f.d.

Remarque : La proposition précédente permet de construire des contre-exemples* à une conjecture de Marschak ([9], 1959), et à un résultat de Guilbaud ([3], 1970) sur n'importe quel ensemble de plus de 5 éléments.

B.6 - Test d'une fonction ϕ_p D.I.B.A.D.O.

P. Dushnik et Miller, 1941, ont montré qu'un ordre partiel P sur S est de dimension** 2 si et seulement si la relation d'incomparabilité qui lui est associée est une relation de comparabilité c'est à dire que les arêtes du graphe G = (S,E) tel que $(x,y) \in E$ si et seulement si xIy, peuvent être orientés de manière à obtenir le graphe d'une relation d'ordre.

D'autre part, on trouve dans [6], une procédure simple pour tester si un graphe donné est de comparabilité.

Par conséquent, on peut facilement tester si une fonction ϕ_p est D.I.B.A.D.O., car ceci revient d'après le théorème (2) à tester si I_p est une relation d'incomparabilité.

* Nous trouvons dans [10] un contre exemple sur 13 éléments.

**Il existe diverses caractérisations d'un ordre de dimension 2 ; à ce sujet nous renvoyons le lecteur à la référence [1] ou [2].

C - CARACTERISATION DES FONCTIONS D.I.B.A.D.O. POUR $|S| \leq 5$

Dans cette partie, il sera établi qu'une pseudo-D.I.B.A.D.O. $V : S^{(2)} \to Q$ (rationnelle) est D.I.B.A.D.O. lorsque $|S| \leq 5$.

La démonstration se fonde essentiellement sur une proposition démontrée de manière constructive, prouvant que dans le cas $|S| \leq 5$, il est toujours possible de construire un ordre total o contenant tous les arcs-unités (i.e. : $\{u \mid V(u)\} = 1$), et saturant tous les 3 circuits V-saturés.

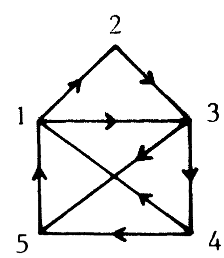
A partir de l'ordre o, on peut construire une D.I.B.A.D.O. à valeurs dans $\{0, \frac{\alpha-1}{\alpha-1}, \frac{\alpha-2}{\alpha-1}, \frac{\alpha-3}{\alpha-1}, \ldots, \frac{1}{\alpha-1}\}$, où $\alpha \geq 2$ désigne le plus petit dénominateur commun des valeurs de V.

Ceci permet d'utiliser la récurrence sur α pour démontrer la propriété énoncée.

C.1 - Définition

Pour 2 circuits C_1 et C_2, $|C_1| \geq 3$, $|C_2| \geq 3$, on dit que C_1 est un circuit partiel de C_2 si et seulement si pour tout ordre o tel que C_2 soit o-saturé, C_1 est o-saturé. Autrement dit, pour tout ordre o tel que $|C_2 \cap o| = |C_2|-1$, on a $|C_1 \cap o| = |C_1|-1$.

Remarque : Tous les circuits partiels de $C_2 = [xyz\ldots t]$ s'obtiennent en prenant une sous-suite de $[xyz\ldots t]$.



Exemple : Soient :

$C_5 = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,1)\}$,

$C_3 = \{(3,5), (5,1), (1,3)\}$,

$C_4 = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,1)\}$.

Les circuits C_3 et C_4 sont des circuits partiels de C_5. Voir figure ci-dessus.

LEMME 1 : Soit $V : S^{(2)} \to [0,1]$ une fonction pseudo-D.I.B.A.D.O.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un circuit C de $S^{(2)}$ soit V-saturé est que tout circuit partiel de C soit V-saturé.

Démonstration :

Condition nécessaire : Par récurrence sur ℓ, nous allons montrer la vérité du lemme pour tout ℓ-circuit V-saturé. Pour un 3-circuit C on voit trivialement que le seul circuit partiel est C_3, donc le lemme est vrai.

Supposons que le lemme soit vérifié jusqu'à $(\ell-1)$, et montrons qu'il est alors vrai pour ℓ.

Il est facile de vérifier que tout K-circuit partiel de C_ℓ, tel que $K \leq \ell-1$, est un circuit partiel d'un $(\ell-1)$ circuit partiel de C_ℓ.

Il va donc suffire de prouver que tout $(\ell-1)$ circuit partiel de C_ℓ est V-saturé.

Soit $C_\ell = [1,2,3,4,\ldots,\ell-1,\ell]$, voir figure (C.2).

Posons sans perte de généralité $C_{\ell-1} = [1,2,3,4,\ldots,\ell-1]$

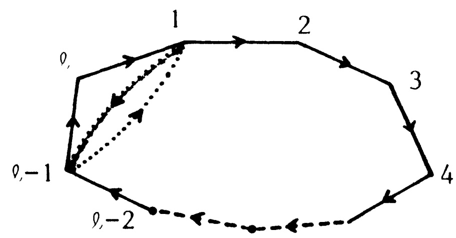


Figure (C-2)

et soit $C_3 = \{(\ell-1,\ell),\ (\ell,1),\ (1,\ell-1)\} = [\ell-1,\ell,1]$.

On a : $V(C_\ell) = \sum_{(i,j)\in C_\ell} V(i,j)+1-1 = \sum_{(i,j)\in C_\ell} V(i,j) + V(\ell-1,1) + V(1,\ell-1)-1$

En opérant une permutation convenable sur les termes de cette somme, on obtient :

$(V(\ell-1,\ell) + V(\ell,1) + V(1,\ell-1)) + (V(1,2)+V(2,3)+\ldots+V(\ell-2,\ell-1)+V(\ell-1,1))$
$= V(C_3) + V(C_{\ell-1}) - 1$

Comme $V(C_\ell) = \ell-1$ (C_ℓ est V-saturé par hypothèse), on a :
$V(C_\ell) = (\ell-1) = V(C_3) + V(C_{\ell-1}) - 1$,

(I) ou encore : $V(C_3) + V(C_{\ell-1}) - 1$,

(II) En outre on a $(V(C_3) \leq 2,\ V(C_{\ell-1}) \leq \ell-2)$ car V est pseudo-D.I.B.A.D.O.

De la relation I et II on déduit que :

$V(C_3) = 2$ et $V(C_{\ell-1}) = \ell-2$,

ce qui prouve que $C_{\ell-1}$ est V-saturé.

<u>Condition suffisante</u> : Si tout circuit partiel de C_ℓ est V-saturé, on a en particulier :
$V(C_3) = 2$ et $V(C_{\ell-1}) = \ell-2$

Comme $V(C_\ell) = V(C_{\ell-1}) + V(C_3) - 1$

il vient : $V(C_\ell) = (\ell-2) + 2 - 1 = \ell-1$

Donc C_ℓ est V-saturé.

c.q.f.d.

LEMME 2 : Soit $G = (S,U_0)$ un graphe simple orienté sans boucle. Si G est sans circuit, on peut toujours rajouter des arcs dans G, de manière à obtenir un tournoi transitif.

Autrement dit :

$\exists\ U_1 \subseteq S^{(2)}$ tel que :

. $U_0 \subseteq U_1$, $(x,y) \in U_1 \Longleftrightarrow (y,x) \notin U_1$. $\quad \forall (x,y) \in S^{(2)}$

. $(x,y) \in U_1$, $(y,z) \in U_1 \Rightarrow (x,z) \in U_1$.

Démonstration : Facile

LEMME 3 : Soient V une pseudo-D.I.B.A.D.O., C un circuit V-saturé. S'il existe un arc (x_0,y_0) appartenant à C tel que $V(x_0,y_0) = 0$ alors : $\forall (x,y) \in C$, $(x,y) \neq (x_0,y_0)$ on a :

$V(x,y) = 1$

Démonstration : Immédiate

LEMME 4 : Soit C_ℓ un ℓ-circuit dont l'ensemble des sommets est S. Si l'on suppose que C_ℓ est V-saturé, alors il existe un ordre saturant C_ℓ et contenant tous les arcs-unités de $S^{(2)}$.

Démonstration : Pour $\ell = 3$, on vérifie trivialement le lemme.
Soit maintenant $C_\ell = \{(x_1,x_2), (x_2,x_3), (x_3,x_4), \dots, (x_{\ell-1},x_\ell), (x_\ell,x_1)\}$
$\ell > 3$, voir figure C.3.

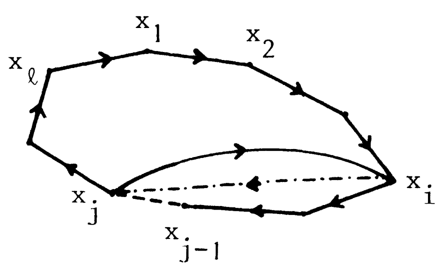


Figure (C-3)

Il est facile de voir qu'il existe un sommet qui ne soit pas l'extrémité terminale d'un arc unité de $S^{(2)}$.

Sans perte de généralité, désignons un tel sommet par x_1.

Nous prétendons que l'ordre $o_0 = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\ell)$ vérifie les conditions du lemme.

Il suffit de montrer que o_0 contient tous les arcs-unités de $S^{(2)}$. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi, ce qui implique l'existence d'un couple (x_i, x_j) de S^2 avec $1 < i < j$, $V(x_j, x_i) = 1$.

Le circuit :

$C = \{(x_j, x_{j+1}), (x_{j+1}, x_{j+2}), \ldots, (x_{\ell-1}, x_\ell), (x_\ell, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{i-1}, x_i), (x_i, x_j)\}$

est un circuit partiel de C_ℓ.

Il en résulte, d'après le lemme précédent, que C est V-saturé.

Comme $(x_i, x_j) \in C$, $V(x_j, x_i) = 1$, l'application du lemme précédent montre que x_1 est l'extrémité terminale d'un arc unité, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle x_1 n'aurait pas cette propriété.

Par conséquent o_0 contient tous les arcs unités éventuels de $S^{(2)}$.

c.q.f.d.

PROPOSITION 5 : <u>Soit</u> $V : S^{(2)} \to [0,1] \subseteq R$ <u>une fonction pseudo-D.I.B.A.D.O. Pour</u> $|S| \leq 5$, <u>il existe un ensemble</u> E_0 <u>de</u> $S^{(2)}$ <u>vérifiant les propriétés suivantes</u> :

(1) E_0 <u>est un ordre</u>.

(2) $\{(x,y) \in S^2 \mid V(x,y) = 1\} \subseteq E_0$, <u>autrement dit</u> : E_0 <u>contient tous les arcs-unités de</u> $S^{(2)}$.

(3) $\forall \mathcal{C} = \{(x_1,x_2),(x_2,x_3),(x_3,x_4)\}$ <u>3-circuit V-saturé</u>

<u>On a</u> :

<u>soit</u> $|\mathcal{C} \cap E_0| = 2$,

<u>soit</u> $|\mathcal{C} \cap E_0| = 1$, <u>et si</u> $\mathcal{C} \cap E_0 = \{(x_1,x_2)\}$ <u>on a</u>

$x_1 I x_3$ et $x_2 I x_3$ (<u>I étant la relation d'incomparabilité de</u> E_0).

<u>Démonstration</u> : La démonstration est constructive. Nous ne la détaillons pas ici*. Nous nous contentons de donner les principaux éléments de la démonstration qui se fonde essentiellement sur les lemmes précédents.

---

* Pour un exposé complet de cette démonstration, cf. T. DRIDI, Analyse des données ordinales et modélisation explicative, Thèse de 3ème cycle, Grenoble, I.M.A.G., 1979.

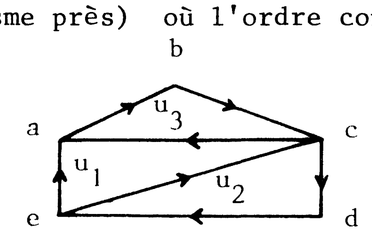
I) Pour $|S| = 3$, la vérité de la proposition est simple, il suffit d'envisager successivement les cas dans lesquels V a 2, 3, 1 ou 0 arcs-unités.
Avant d'aborder les autres cas, remarquons que tout ordre total sur S contenant les arcs-unités et saturant les circuits V-saturés, vérifie les conditions de la proposition.

En outre, si $|S| = 4$ (respectivement $|S| = 5$) et si $S^{(2)}$ comporte un 4-circuit V-saturé (respectivement un 5-circuit V-saturé), la vérité de la proposition est une conséquence du lemme 2 et de la remarque précédente.

II) $|S| = 4$ et $S^{(2)}$ ne contient pas de 4-circuit V-saturé :
auquel cas, on construit, suivant la position et le nombre des arcs unités relativement aux circuits saturés, un ordre qui vérifie les conditions de la proposition.

III) $|S| = 5$
Le problème est relativement plus délicat.
III-a) Il est tout d'abord supposé que $S^{(2)}$ contient uniquement des 3-circuits V-saturés, ce qui nous amène à construire un tournoi contenant les arcs-unités s'il en existe, les arcs éventuels appartenant à des circuits saturés et d'autres arcs dont l'orientation est arbitraire.

Si un tel tournoi ne contient pas de circuit hamiltonien H, l'utilisation des cas $|S| = 3,4$ permet de construire aisément un ordre qui remplit les conditions de la proposition ; sinon on arrive également à générer un ordre saturant H (H est désigné par a b c d e) qui répond à la question sauf dans le cas où l'on a trois arcs-unités u_1, u_2, u_3 comme dans la figure ci-dessous (à un isomorphisme près) où l'ordre construit ne sature pas H.



III-b) Le cas où $S^{(2)}$ contient un 4-circuit (ou plus) V-saturé et ne contient pas de 5-circuit V-saturé est traité sans difficulté en utilisant les lemmes précédents.

THEOREME 5 : <u>Soit</u> V : $S^{(2)} \to [0,1] \subseteq Q$, $|S| \leq 5$; <u>on a</u> :
V <u>est pseudo-D.I.B.A.D.O.</u> $\Longleftrightarrow$ V <u>est D.I.B.A.D.O.</u>

<u>Démonstration</u> : Nous allons effectuer la démonstration par récurrence sur le plus petit dénominateur commun des valeurs de V, qu'on désigne par α.

Si $\alpha = 1$, le théorème est vrai, et ceci peut être vérifié aisément. Pour $\alpha = 2$, la fonction V prend ses valeurs dans l'ensemble $\{0,1,\frac{1}{2}\}$. Il résulte du théorème 3 que l'ordre $\{u \in S^{(2)} \mid V(u) = 1\}$ est de dimension inférieure ou égale à 2. Donc le théorème est aussi vrai d'après le théorème 2.

Supposons que le théorème soit vrai pour $(\alpha-1) \geq 2$, et montrons qu'il est alors vrai pour α.

Soit P un ordre vérifiant les conditions de la proposition 5, en vertu du théorème 3, P est de dimension inférieure ou égale à 2. D'autre part, le théorème 1 entraîne l'existence d'un ordre o_0 prolongeant P et non séparant.

La condition 3 de la proposition 5 implique que o_0 sature tous les 3-circuits saturés relativement à V, en effet :

Si C est un 3-circuit saturé, on a :
soit $|C \cap P| = 2$ ce qui implique $|o_0 \cap C| = 2$

soit $|C \cap P| = 1$ ce qui implique également $|o_0 \cap C| = 2$, puisque o_0 est non séparant.

On définit la fonction V' comme suit :

$V : S^{(2)} \to [0,1] \subseteq Q$

$$\forall\ (i,j) \in S^{(2)} \quad V'(i,j) = \begin{cases} \dfrac{\alpha V(i,j)-1}{\alpha-1} & \text{si } (i,j) \in o_0 \\ \dfrac{\alpha V(i,j)}{\alpha-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On voit que si U est une partie de $S^{(2)}$ telle que $|U \cap o_0| = \lambda$, alors :

$$V'(U) = \sum_{(i,j)\in U} V'(i,j) = \frac{\alpha\left(\sum\limits_{(i,j)\in U} V(i,j)\right)-\lambda}{\alpha - 1}$$

Montrons que V' est une fonction pseudo-D.I.B.A.D.O.

a) Remarquons tout d'abord que : $\forall\ (i,j) \in S^{(2)}$: $V'(i,j) \geq 0$ car o_0 contient tous les arcs unités de $S^{(2)}$.

b) $\forall\ (i,j) \in S^{(2)}$: $V'(i,j) + V'(j,i) = \dfrac{\alpha(V(i,j)+V(j,i))-1}{\alpha-1} = \dfrac{\alpha-1}{\alpha-1}$

c) Soient :

$C = \{(i,j),(j,k),(k,i)\}$ un 3-circuit,

$C^{-1} = \{(i,k),(k,j),(j,i)\}$ le circuit inverse.

$\lambda = |C \cap o_0|$, $(\lambda \in \{1,2\})$.

C.1 - Supposons qu'aucun des circuits C et C^{-1} n'est saturé relativement à V : on peut alors écrire : $V(C) = 2 - \frac{\varepsilon}{\alpha}$, ε étant entier positif tel que : $1 \leq \varepsilon < \alpha$

d'où $1 + \frac{1}{\alpha} \leq V(C) \leq 2 - \frac{1}{\alpha}$

ce qui est équivalent à : $1 + \alpha \leq \alpha V(C) \leq 2\alpha - 1$

ou encore : $\alpha - 1 + 2 - \lambda \leq \alpha V(C) - \lambda \leq 2\alpha - 2 + 1 - \lambda$

donc : $1 + \frac{2-\lambda}{\alpha-1} \leq \frac{\alpha V(C)-\lambda}{\alpha-1} \leq 2 + \frac{1-\lambda}{\alpha-1}$

Comme $V'(C) = \frac{\alpha V(C)-\lambda}{\alpha-1}$, il vient : $1 \leq V'(C) \leq 2$.

C.2 - Supposons que C soit saturé relativement à V ;
donc $|C \cap o_0| = \lambda = 2$ et $V(C) = 2$.

Il en résulte que : $V'(C) = \frac{\alpha V(C)-2}{\alpha-1} = \frac{2\alpha-2}{\alpha-1} = 2$.

D'où : $1 \leq V'(C) \leq 2$.

C.3 - C n'est pas saturé et C^{-1} est saturé :

On a : $V'(C) + V'(C^{-1}) = 3$, $V'(C^{-1}) = 2$

on conclut que : $1 \leq V'(C) = 1 \leq 2$.

Donc V' est une fonction pseudo-D.I.B.A.D.O. à valeurs dans :

$$\left\{0, \frac{1}{\alpha-1}, \frac{2}{\alpha-1}, \frac{3}{\alpha-1}, \ldots, \frac{\alpha-2}{\alpha-1}, \frac{\alpha-1}{\alpha-1}\right\}.$$

Le dénominateur commun des valeurs V' étant $(\alpha-1)$, comme V' est pseudo-D.I.B.A.D.O., d'après l'hypothèse de récurrence il existe un état de l'opinion $E_1(S)$ ayant pour fonction D.I.B.A.D.O. la fonction V'.

Construisons un autre état de l'opinion $E_0(S)$ de la manière suivante : l'ensemble des ordres de $E_0(S)$ est constitué des ordres de $E_1(S)$ et de o_0. On associe à o_0 la pondération $\frac{1}{\alpha}$.

La pondération de tout ordre de $E_0(S)$, différent de o_0, est égale à sa pondération dans $E_0(S)$ multipliée par $\frac{\alpha-1}{\alpha}$.

L'état de l'opinion $E_0(S)$ ainsi obtenu a pour fonction D.I.B.A.D.O. la fonction V, ce qui peut être vérifié aisément.

c.q.f.d.

PROPOSITION 6 : Si V : $S^{(2)} \to Q$ est une pseudo-D.I.B.A.D.O. rationnelle contenant un $|S|$-circuit V-saturé C, i.e. : un circuit à $|S|$ éléments, alors V est D.I.B.A.D.O.

Démonstration : C étant un circuit V-saturé, le lemme (3) montre l'existence d'un ordre E_0 (total) saturant C et contenant tous les arcs unités. Donc E_0 vérifie les conditions de la proposition (5).

La démonstration est ainsi ramenée à celle du théorème précédent.

c.q.f.d.

N.B. D'intéressants résultats sur le polyèdre associé aux DIBADO se trouvent dans [10] et [13].

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAKER K., FISHBURN P., ROBERTS F., "Partially orders of dimension 2", *Networks*, 2 (1972) pp. 11-28.

[2] BARBUT M., MONJARDET B., *Ordre et classification, algèbre et combinatoire*, Tomes 1 et 2, Paris, Hachette, 1970.

[3] GUILBAUD G.Th., "Préférences stochastiques", *Math. Sci. hum.*, 32 (1970).

[4] GUILBAUD G.Th., "Sur une difficulté de la théorie du risque", *in Colloques internationaux du C.N.R.S.*, *n°40, Econométrie, Paris, 12-17 Mai 1952*, Paris, Editions du C.N.R.S., 1953, pp.19-28.

[5] DUSHNIK B., MILLER E.W., "Partially ordered sets", *Amer. J. Math.*, 63 (1941) pp. 600-610.

[6] EVEN S., PNUELI A., LEMPEL A., "Permutation graphs and transitive graphs", *Journal of the Association for Computing Machinery*, 19 (1972), pp. 400-410.

[7] HIRAGUCHI T., "Note on the orders of finite cardinality", *Ann. Sci. Kanazawa Univ.*, 3 (1966) pp.1-28.

[8] HIRAGUCHI T., "On the dimension of orders", *Sc. Rep. Kanazawa Univ.*, 4 (1955), pp.1-20.

[9] MARSCHAK J., "Binary choice constraints and random utility indicators", *in Mathematical Methods in Social Sciences*, K.J. Arrow, S. Karlin and P. Suppes eds, Stanford, Stanford Univ. Press, 1960, pp. 312-329.

[10] MEGIDDO N., "Mixtures of order matrices and generalized order matrices", *Discrete Math.* , 19 (1977), pp. 177-81.

[11] MONJARDET B., "Tournois et ordres médians pour une opinion", *Math. Sci. hum.*, 43 (1973) pp. 55-70.

[12] SZPILRAJN E., "Sur l'extension d'un ordre partiel", *Fundamunta Mathematicae*, 16 (1930) pp. 386-389.

[13] YOUNG H.P., "On permutation and permutation polytopes", *Math. Programming Study*, 8 (1978) pp. 128-140.