MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

JEAN-PIERRE BARTHELEMY

Caractérisations axiomatiques de la distance de la différence symétrique entre des relations binaires

Mathématiques et sciences humaines, tome 67 (1979), p. 85-113

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1979__67__85_0>

Math. Sci. hum. (*17^e* année, n°67, *1979*, p.85-113)

CARACTERISATIONS AXIOMATIQUES DE LA DISTANCE DE LA DIFFERENCE SYMETRIQUE ENTRE DES RELATIONS BINAIRES

Jean-Pierre BARTHELEMY*

INTRODUCTION

L'usage de la distance de la différence symétrique δ est fort répandu en analyse des données relationnelles :

Dans les problèmes d'ajustement, L et L' étant deux ensembles de relations binaires, on approche un élément r de L par une solution de

$$\min_{r' \in L'} \delta(r, r') .$$

Il est classique de "résumer" une famille $(r_1, \ldots, r_p) \in L^p$ par une solution de :

$$\min_{r' \in L'} \sum_{i=1}^{p} \delta(r_i, r') ,$$

(c.f. Barthélemy - Monjardet [8] pour une présentation générale de ces sujets, Monjardet [28] pour une bibliographie complète).

Considérée comme une mesure de dissimilarité : (c.f. Arabie-Boorman [1] pour les relations d'équivalence, Barthélemy [7] pour les préordres totaux) δ peut servir de base à la construction d'une typologie sur un ensemble de classifications ou de préférences. Cette utilisation jointe à la précédente conduit à la notion d'agrégation typologique développée par

* E N S M M - 25030 Besançon Cedex.

J. Lemaire [25] .

δ se rencontre également dans l'étude statistique des séries ordonnées (c.f. Kendall [24], le coefficient τ est donné par la formule :
$= 1 - 2 \frac{\delta}{n^2 - n}$, c.f. aussi Degenne [18]).

Cependant, si la "formule" qui définit δ justifie parfois son usage (c'est le cas -par exemple- des ordres totaux et des tournois : $\delta(r,s)$ dénombre les désaccords entre r et s), cette situation est loin d'être générale. Ainsi, si r et s sont des préordres totaux (ou des matchs), chaque désaccord "total" sur une paire $\{x,y\}$ (par exemple : $(x,y) \in r$, $(y,x) \notin r$, $(x,y) \notin s$, $(y,x) \in s$) contribuera de 2 à la valeur de δ , tandis que chaque désaccord "partiel" (par exemple : $(x,y) \in r$, $(y,x) \in r$, $(x,y) \in s$, $(y,x) \notin s$) aura 1 pour contribution. N'y a-t-il pas quelque arbitraire à déclarer qu'un désaccord total "compte deux fois plus" qu'un désaccord partiel ? (la situation est d'ailleurs pire pour les relations non totales ou les notions d'accord et de désaccord cessent d'être limpides !)

Une démarche, inaugurée semble-t-il par Kemeny [22] , consiste à légitimer l'usage de δ en la définissant par un ensemble de conditions qui semblent "naturelles" dans le contexte où l'on travaille. On peut relever dans ces axiomatiques deux tendances :

1°) δ vérifie des conditions de nature géométrique, il s'agit essentiellement de l'inégalité triangulaire ($\delta(r,s) \leqslant \delta(r,t) + \delta(t,s)$) et du respect de l'intermédiarité ($\delta(r,s) = \delta(r,t) + \delta(t,s)$ lorsque t est située "entre " r et s). Cette notion d'intermédiarité demande à être explicitée : dire que l'opinion de Paul est située entre celles de Jean et de Pierre (lorsque ces "opinions" sont issues de comparaisons par paires, donc représentées par des relations binaires) signifie que, chaque fois que

Pierre et Jean sont en accord sur un couple (x,y), ils sont en accord, sur ce couple, avec Paul ; ce dernier étant nécessairement en accord, sur chaque couple, avec Pierre, ou sinon avec Jean. Ainsi, si les opinions de Jean, Pierre et Paul admettent respectivement pour modèles les relations binaires r,s,t, on a : $r \cap s \subseteq t \subseteq r \cup s$.

2°) δ s'interprète comme un cheminement minimal dans un graphe qui sera, le plus souvent, le graphe non orienté de couverture d'un ensemble ordonné, par inclusion, de relations binaires.

Le premier point de vue a été illustré, à la suite de Kemeny [22] par Kemeny-Snell [23] (ordres totaux, préordres totaux), Bogart [11] (ordres stricts) et [12] (relations asymétriques), Chernyil-Mirkin [16] (relations d'équivalence). Le second point de vue se place dans le contexte général des distances de graphe sur un ensemble ordonné E (Haskins-Gudder [21] , Monjardet [26] , Comyn-Van Dorpe [17] , Grimonprez-Van Dorpe [19] , Barthélemy [6]), thème équivalent à celui des "valuations" sur E (c.f., outre les auteurs précédents, Birkhoff [9] , Arabie-Boorman [1] , Boorman-Oliver [13] , Bordes [14] , Cailles et Pagès [15]).

Par ailleurs, certains travaux liés à "l'opération médiane" dans un treillis distributif (Barbut [2] , [3] , Barbut-Monjardet [5]) éclairent les axiomatiques géométriques et montrent qu'elles ne sont pas sans redondance ...(par exemple, l'inégalité triangulaire est impliquée par l'intermédiarité. Au sujet de la médiane et de l'intermédiarité, on pourra consulter également Sholander [30] , Mulder-Schrijner [29]). Ceci, joint au fait que des conditions affaiblies d'intermédiarité interviennent également dans les "distances de graphe", fait perdre leur caractère typiquement géométrique à ces axiomatiques.

Cet article est un travail de synthèse qui, s'appuyant sur des résultats mathématiques connus (et non re-démontrés, les références à cet égard sont Birkhoff [9] , Barbut-Monjardet [5] ; on suppose, en particulier, que le lecteur est familier avec la terminologie des ensembles ordonnés) améliore et prolonge les axiomatiques de Kemeny, Bogart, Chernyil-Mirkin en donnant des listes de conditions indépendantes (ce qui n'était pas le souci de ces auteurs) et ... -espérons le- pertinentes du point de vue des sciences sociales (ce qui était leur principale préoccupation).

Tous les ensembles considérés dans ce texte sont supposés finis.

1. DESCRIPTION DE QUELQUES ENSEMBLES DE RELATIONS BINAIRES - CONDITIONS POUR δ

1.1. Notations

Les relations binaires envisagées dans ce texte sont des modèles pour des données de préférences ou de ressemblances ; aussi seront-elles supposées réflexives.

Soit X un ensemble fini, on désigne par R l'ensemble des relations réflexives sur X ; on note r_α la relation discrète et r_ω la relation grossière : $r_\alpha = \{ (x,x) , x \in X \}$, $r_\omega = X \times X$. Pour $r \in R$, on désigne par :

P(r), la <u>partie stricte</u> de r : $P(r) = \{ (x,y) \mid (x,y) \in r \text{ et } (y,x) \notin r \}$;

I(r), la <u>partie symétrique</u> de r : $I(r) = \{ (x,y) \mid (x,y) \in r \text{ et } (y,x) \in r \}$;

J(r), la <u>partie d'indécision</u> de r : $J(r) = \{ (x,y) \mid (x,y) \notin r \text{ et } (y,x) \notin r \}$.

Nous considérerons les sous-ensembles suivants de R :

S, l'ensemble des <u>relations symétriques</u> (r est symétrique lorsque $I(r) = r$);

A, l'ensemble des <u>relations antisymétriques</u> (r est antisymétrique, lorsque $I(r) = r_\alpha$) ;

P, l'ensemble des <u>préordres</u> (i.e. des relations transitives ; r est transitive lorsque $(x,y) \in r$ et $(y,z) \in r$ implique $(x,z) \in r$) ;

M, l'ensemble des <u>matchs</u> (i.e. des relations totales, r est totale lorsque $J(r) = \emptyset$) ;

E, l'ensemble des <u>relations d'équivalence</u> : $E = S \cap P$;

Q, l'ensemble des <u>matchs quasi-transitifs</u> (r est quasi-transitive lorsque $P(r)$ est transitive) ;

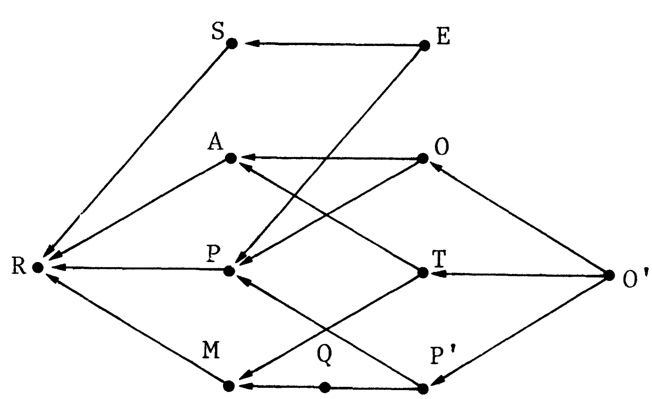
O, l'ensemble des <u>ordres</u> : $O = P \cap A$;

P', l'ensemble des <u>préordres totaux</u> : $P' = M \cap P$;

T, l'ensemble des <u>tournois</u> : $T = M \cap A$;

O', l'ensemble des <u>ordres totaux</u> : $O' = T \cap O$.

P, M, A, Q, O, P', T, O' sont utilisés pour représenter des préférences, S et E pour représenter des ressemblances. Relativement à l'inclusion, ces ensembles s'organisent comme ci-dessous :



1.2. <u>Structures</u>

Relativement à l'inclusion :

R est un treillis booléen et S est un sous-treillis booléen de R. R est gradué par $\rho(r) = |r|$; S est gradué par $\rho(r) = \frac{|r|}{2}$.

P est un treillis (non gradué) : la borne inférieure est l'intersection et la borne supérieure est la fermeture transitive de l'union.

P' est un sous-sup-demi-treillis de P semi-modulaire supérieurement et gradué par $\rho(r) = |X|$ - nombre de classes de r (rappelons qu'un ensemble ordonné est <u>semi-modulaire supérieurement</u> lorsque pour tout (x,y,t) tel que x couvre t - x > t et il n'existe pas d'élément z tel que x > z > t - y couvre t, il existe u couvrant x et y).

A est un sous-inf-demi-treillis de R, gradué par $\rho(r) = |r|$ et semi-modulaire inférieurement.

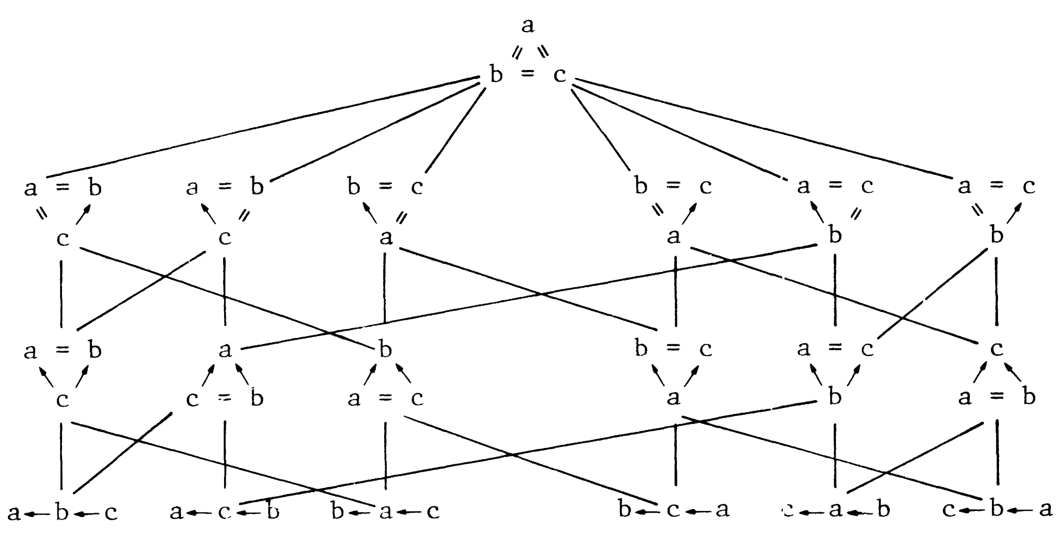
M est un sous-sup-demi-treillis de R, gradué par $\rho(r) = |r|$ et semi-modulaire supérieurement.

E est un sous-treillis de P, semi-modulaire supérieurement et gradué par $\rho(r) = |X|$ - nombre de classes de r.

O est un sous-inf-demi-treillis de R, semi-modulaire inférieurement et gradué par $\rho(r) = |r|$.

O' et T sont des ordres discrets (deux éléments distincts sont incomparables).

Q se déduit de l'ensemble des ordres stricts par involution (c.f. Monjardet [27]). C'est donc un sup-demi-treillis, semi-modulaire supérieurement et gradué par $\rho(r) = |r|$.



L'ordre de Q pour $|X| = 3$.

1.3. Conditions pour δ

Nous indiquons ci-dessous une liste de onze propriétés de la distance de la différence symétrique δ sur R : $\delta(r,s) = |r \Delta s|$. C'est l'exigence des applications aux sciences sociales -plus que leur pertinence mathématique- qui a prévalu pour la sélection de ces propriétés (que doit vérifier une mesure du désaccord entre deux opinions ?). Outre l'intermédiarité, explicitée dans l'introduction, on trouvera les justifications de la plupart de ces "axiomes" dans Kemeny [22] , Kemeny-Snell [23] , Bogart [11] , [12] .

Soit $L \subseteq R$ un ensemble de relations binaires et soit d une application de $L \times L$ dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. d pourra possèder -ou non- les propriétés suivantes :

(a) Propriété de symétrie

A_1(symétrie faible) : $d(r,s) = d(s,r)$, pour tout $r, s \in L$ avec $r \subseteq s$.

(b) Propriétés d'intermédiarité

A_2 (respect de l'intermédiarité) : $d(r,s) = d(r,t) + d(t,s)$ pour tout $r,s,t \in L$ tels que $r \cap s \subseteq t \subseteq r \cup s$.

A_3 (respect de l'intermédiarité forte) : $d(r,s) = d(r,t) + d(t,s)$, pour tout $r,s,t \in L$ avec $r \subseteq t \subseteq s$.

A_4 (respect de l'intermédiarité supérieure) : $d(r,s) = d(r,r \cup s) + d(r \cup s,s)$, pour tout $r,s \in L$ tels que $r \cup s \in L$.

A_5 (respect de l'intermédiarité inférieure) : $d(r,s) = d(r,r \cap s) + d(r \cap s,s)$, pour tout $r,s \in L$ tels que : $r \cap s \in L$.

(c) Neutralité des éléments de X

A_6 : pour toute transposition τ de X, pour tout $r,s \in L$ tels que $r^{\tau} \in L$, $s^{\tau} \in L$, $d(r,s) = d(r^{\tau},s^{\tau})$, en posant : $r^{\tau} = \{(\tau(x), \tau(y)) \quad (x,y) \quad r\}$.

(d) Propriétés d'équidistance

A_7 (équidistance par adjonction d'un couple) : si $r,s \in L$ et $a,b,c,d \in X$ sont tels que $(a,b) \in r$, $(c,d) \in s$, $r' = r \cup \{(a,b)\} \in L$, $s' = s \cup \{(c,d)\} \in L$, $d(r,r') = d(s,s')$.

A_8 (équidistance par adjonction d'une paire) : si $r,s \in L$ et $a,b,c,d \in X$ sont tels que : $(a,b) \in J(r)$, $(c,d) \in J(s)$, $r' = r \cup \{(a,b), (b,a)\} \in L$, $s' = s \cup \{(c,d), (d,c)\} \in L$, $d(r,r') = d(s,s')$.

A_9 (équidistance par inversion d'un couple) : si $r,s \in L$ et $a,b,c,d \in X$ sont tels que $(a,b) \in P(r)$, $(c,d) \in P(s)$, $r' = (r - \{(a,b)\}) \cup \{(b-a)\} \in L$, $s' = (s - \{(c,d)\}) \cup \{(d,c)\} \in L$, $d(r,r') = d(s,s')$.

(e) Propriété de stabilité

A_{10} : pour toute partition en deux classes Y, V de X et pour tout $r,s,t,u \in L$ tels que :

$r \cap (V \times X) = t \cap (V \times X)$, $r \cap (Y \times V) = t \cap (Y \times V)$;

$s \cap (V \times X) = u \cap (V \times X)$, $s \cap (Y \times V) = u \cap (Y \times V)$;

$r \cap (Y \times Y) = s \cap (Y \times Y)$, $t \cap (Y \times Y) = u \cap (Y \times Y)$;

$d(r,t) = d(s,u)$.

(f) Propriété d'unité

A_{11} : la valeur strictement positive minimum de d existe et vaut 1.

Il est clair que la restriction de δ à L vérifie toutes les conditions ci-dessus à l'exception de A_{11}.

2. UTILISATION DE L'INTERMEDIARITE

2.1. Axiomatique formelle

Par "axiomatique formelle", nous entendons un système de conditions ne s'appuyant que sur la structure ordonnée de L. Les treillis distributifs jouent ici un rôle central et rendent clair le lien entre "respect de l'intermédiarité" et "inégalité triangulaire".

Soit Z un treillis, pour $x,y \in Z$, <u>l'intervalle</u> $[x,y]$ est l'ensemble $\{t \mid x \wedge y \leq t \leq x \vee y\}$. On dit qu'une application q de Z x Z dans $\mathbb{R}$ <u>respecte l'intermédiarité</u>, lorsque, pour tout $x,y \in Z$ et pour tout $t \in [x,y]$: $q(x,y) = q(x,t) + q(t,y)$. Cette notion est fort liée à la distributivité de Z et à l'opération médiane :

Rappelons qu'une <u>valuation</u> sur Z est une application v (supposée, ici, strictement croissante) de Z dans $\mathbb{R}$ telle que : $v(x) + v(y) = v(x \wedge y) + v(x \vee y)$, pour tout $x, y \in Z$. On sait (Birkhoff [9]) que v est une va ua tion si et seulement si d_v est une distance, avec $d_v(x,y) = v(x \vee y) - v(x \wedge y)$. On dit que v(strictement croissante) est une <u>valuation distr - butive</u> lorsque, pour tout $x, y, z \in Z$:
$2\,(v(x \vee y \vee z) - v(x \wedge y \wedge z)) = v(x \vee y) - v(x \wedge y) + v(y \vee z) - v(y \wedge z) + v(x \vee z) - v(x \wedge z)$. <u>Les assertions ci-dessous sont équivalentes</u> :

(i) v <u>est une valuation distributive</u>,

(ii) d_v <u>respecte l'intermédiarité</u>,

(iii) <u>le treillis</u> Z <u>est distributif</u>.

Rappelons aussi que, pour $x,y,z \in Z$, <u>l'intervalle médian</u> $[x,y,z]$ est l'ensemble $[x,y] \cap [y,z] \cap [x,z] = [(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (x \wedge z), (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (x \vee z)]$. On sait (c.f. Barbut-Monjardet [5]) que Z est distributif si et seulement si, pour tout $x,y,z \in Z$, $[x,y,z]$ est réduit à un seul élément (appelé la <u>médiane</u> de (x,y,z)). On dira qu'un sous-ensemble Y de Z est <u>médian</u>, lorsque, pour tout $x,y,z \in Y$, $[x,y,z] \cap Y$ est non vide.

Proposition 1 : Soit Y un sous-ensemble médian de Z et soit d une application de Y x Y dans $\mathbb{R}$ telle que :

-$d(x,y) \geq 0$ pour tout $x,y \in Y$;

-$d(x,y) = d(x,t) + d(t,y)$, pour tout $x,y,t \in Y$, avec $t \in [x,y]$.

Alors, d vérifie l'inégalité triangulaire.

Preuve* : pour $x,y,z \in Y$ et $t \in [x,y,z] \cap Y$ il vient :

$d(x,t) + d(t,y) = d(x,y)$ et $d(y,t) + d(t,z) = d(y,z)$.

D'où $d(x,y) + d(y,z) = d(x,t) + d(t,z) + d(y,t) + d(t,y)$. Le résultat s'ensuit puisque : $d(x,t) + d(t,z) = d(x,y)$, $d(y,t) \geq 0$, $d(t,y) \geq 0$. C.Q.F.D.

Ainsi, la condition pertinente d'un point de vue "mathématique" (l'inégalité triangulaire) se trouve impliquée par une condition pertinente en "sciences sociales" (le respect de l'intermédiarité). Par ailleurs, dans [2] , Barbut montre que : Z est distributif si et seulement si il existe une application d de Z x Z dans $\mathbb{R}$ qui respecte l'intermédiarité et telle que $d(x,y) \geq 0$ pour tout $x,y \in Z$, $d(x,y)$ n'étant nul que si $x=y$.

Proposition 2 : Soit Z un treillis, les deux assertions ci-dessous sont équivalentes :

(i) Z est distributif.

(ii) Il existe une application d de Z x Z dans $\mathbb{R}$ telle que :

(1) pour tout $x, y \in Z$ avec $x \leqslant y$, $d(x,y) = d(y,x)$.

(2) d respecte l'intermédiarité.

(3) $d(x,y) = 1$ lorsque y couvre x.

La fonction d est alors unique et est une distance.

---

* Cette démonstration est l'extension immédiate de la preuve donnée par Barbut ([2]) dans le cas Y = Z.

Preuve : (i) entraîne (ii). Si E est distributif, il est modulaire, donc gradué et une fonction de rang h est une valuation distributive (c.f. Birkhoff [9]). La distance d_h vérifie les conditions (1), (2) et (3).

(ii) entraîne (i). En vertu du résultat de Barbut, rappelé plus haut, il suffit de montrer que, si d vérifie (1), (2), (3), $d(x,y) \geqslant 0$ et $d(x,y) = 0$ si et seulement si $x = y$. Il découle de (2) que :
$d(x,y) = d(x,x \vee y) + d(x \vee y,y) = d(x,x \wedge y) + d(x \wedge y,y)$, donc (en utilisant (1)) $d(x,y) = d(x \vee y,x \wedge y)$. Considérons une chaîne maximale $x \wedge y = t_o < t_1 < \ldots < t_p = x \vee y$. En vertu de (2) : $d(x \wedge y, x \vee y) = \sum_{i=1}^{p-1} d(t_i,t_{i+1}) = p$ (d'après (3)). $d(x,y)$ est positif et ne sera nul que si $x = y$.

L'unicité découle de l'égalité $d(x,y) = p$. Par ailleurs, d est symétrique et -en vertu de la proposition 2- vérifie l'inégalité triangulaire.
C.Q.F.D.

Rappelons qu'un sous-ensemble Y de Z est <u>héréditaire</u> lorsque, pour tout $x \in Y$ et pour tout $y \in Z$ tel que $x \leqslant y$, $y \in Y$ (Y est alors un sous-sup-demi-treillis).

<u>Proposition 3</u> : <u>Soit</u> Y <u>un sous-ensemble héréditaire du treillis distributif</u> Z. <u>Il existe une application</u> k <u>de</u> $Y \times Y$ <u>dans</u> $\mathbb{R}$ <u>et une seule telle que</u> :

(1) <u>pour tout</u> $x,y \in Y$, <u>avec</u> $x \leqslant y$, $k(x,y) = k(y,x)$;

(2) <u>pour tout</u> $x,t,y \in Y$, <u>avec</u> $x \leqslant t \leqslant y$, $k(x,y) = k(x,t) + k(t,y)$;

(3) <u>pour tout</u> $x, y \in Y$, $k(x,y) = k(x,x \vee y) + k(x \vee y,y)$;

(4) <u>pour tout</u> $x,y,z,t \in Y$, <u>tels que</u> y <u>couvre</u> x et z <u>couvre</u> t, $k(x,y) = k(t,z)$;

(5) <u>la valeur strictement positive minimum de</u> k <u>existe et vaut</u> 1.

k <u>sera alors une distance</u>.

Preuve : l'existence de k provient, par restriction à Y, de la proposition 2. Pour l'unicité, il suffit de remarquer que $k(x,y) = p+q$ où p (resp.q) est la longueur d'une chaîne maximale de x vers $x \vee y$(resp. de y vers $x \vee y$)

C.Q.F.D.

2.2. Axiomatique de δ pour R,S,M,A

Proposition 4 : Pour L = R ou L = M, la restriction de δ à L est la seule application de L x L dans $\mathbb{R}$ vérifiant A_1, A_3, A_4, A_7, A_{11}.

La restriction de δ à A est la seule application de A x A dans $\mathbb{R}$ vérifiant A_1, A_3, A_5, A_7, A_{11}.

La restriction de $\delta/2$ à S est la seule application de S x S dans $\mathbb{R}$ vérifiant A_1, A_3, A_4, A_8, A_{11}.

Preuve : on se ramène aux quatre conditions de la proposition 3 qu'il faut dualiser pour A. C.Q.F.D.

Remarquons que la proposition 3 peut également être utilisée pour axiomatiser δ sur les treillis distributifs d'ordres blackiens (c.f. Black [10], Barbut-Frey [4]).

2.3. Axiomatique de δ pour T et O'

Proposition 5 : Pour L = T ou L = O', $d(r,s) = \frac{\delta(r,s)}{2}$ est la seule application de L x L dans $\mathbb{R}$ vérifiant A_2, A_9, A_{11}.

Preuve : Pour a, b $\in$ X et t $\in$ T, notons t_{ab} le tournoi obtenu en échangeant a et b : $t_{ab} = (t - \{(a,b)\}) \cup \{(b,a)\}$ si $(a,b) \in t$, $t_{ab} = (t - \{(b,a)\} \cup \{(a,b)\}$ si $(b,a) \in t$. Lorsque $t \in O'$, on suppose que a et b sont des éléments consécutifs (l'un couvre l'autre) de t.

Considérons deux tournois (resp. deux ordres totaux) s et t. Soit (a_1,b_1), ..., (a_q,b_q) une suite minimale de couples d'éléments à échanger pour passer de s à t. On obtient la suite de tournois (resp. d'ordres totaux, dans ce cas a_i et b_i sont consécutifs dans r_{i-1}) $s = r_o, r_1,\dots,r_q = t$, $r_i = (r_{i-1})_{a_i\, b_i}$. Pour $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant k \leqslant q$, il vient :
$r_i \cap r_k \subseteq r_j \subseteq r_i \cup r_k$. Donc, en vertu de A_2, $d(r_i,r_k) = d(r_i,r_j) + d(r_j,r_k)$. Il s'ensuit, en désignant par α la valeur commune à tous les $d(r_{ab},r) = d(r_{a_b}, (r_{ab})_{ab}$, que$(A_9)$: $d(r_{ab},r) = d(r_{ab})_{ab}, r_{ab})$, que :
$d(s,t) = q\alpha$. Cette égalité montre que :
- $\alpha > 0$ (sinon tous les $d(s,t)$ seraient $\leqslant 0$, ce qui contredirait A_{11}) ;
- $\alpha \leqslant d(s,t)$, pour tout $s,t \in T$, donc - en vertu de A_{11} - $\alpha = 1$ et $d(s,t) = \frac{|s \Delta t|}{2} = q$. C.Q.F.D.

3 - UTILISATION DE LA STABILITE

3.1. Remarque préliminaire

L désignant toujours un sous-ensemble de R, pour chaque $Y \subseteq X$ et $r \in L$, désignons par r^Y la relation $r \cap (Y \times Y)$ et posons $L^Y = \{r^Y, Y \in X\}$. Si d est une application de $L \times L$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la condition A_{10}, on peut définir la "restriction" d^Y de d à L^Y :

Si $\tilde{r}$ (resp. $\tilde{s}$) $\in L^Y$, il existe r (resp. s) $\in$ L tel que $\tilde{r} = r^Y$ (resp. $\tilde{s} = s^Y$) et, en posant $V = X - Y$, $r \cap (V \times X) = s \cap (V \times X)$, $r \cap (Y \times V) = s \cap (Y \times V)$. En vertu de A_{10}, la valeur de $d(r,s)$ est indépendante du choix de r et de s. On pose donc : $d^Y(\tilde{r},\tilde{s}) = d(r,s)$.

Il est clair que si d vérifie l'une des conditions de 1.3, à l'exception de A_{11}, d^Y vérifiera également cette condition. Cette remarque va nous permettre d'axiomatiser δ sur O', P' et E : pour tout $Y \subseteq X$, O'^Y (resp.

P'^Y, resp. E^Y) est l'ensemble des ordres totaux (resp. des préordres totaux, resp. des relations d'équivalence) de Y.

3.2. <u>Axiomatique de δ pour O'</u>

<u>Proposition 6</u> : <u>La restriction de</u> $\delta/2$ <u>à</u> O' <u>est la seule application</u> d <u>de</u> $O' \times O'$ <u>dans</u> $\mathbb{R}$ <u>telle que</u> :

(i) d <u>vérifie</u> A_2 <u>et</u> A_{10} ;

(ii) <u>pour tout sous-ensemble à deux éléments</u> Y <u>de</u> X, <u>la restriction</u> d^Y <u>vérifie</u> A_6 <u>et</u> A_{11}.

Preuve : Nous allons effectuer une récurrence sur le nombre n d'éléments de X.

- Pour n = 2, il y a deux ordres totaux : r : a < b, s : b < a et il découle de (i) et (ii) que d(r,r) = d(s,s) = 0, d(r,s) = d(s,r) = 1. Donc d = $\delta/2$.

- Supposons la proposition démontrée pour tout ensemble de cardinal < n. Si $|X| = n$ $(n > 2)$, on considère deux ordres totaux r et s. Soit a l'élément maximum de r, distinguons deux cas :

(1) a est maximum dans s, il vient -par stabilité- $d(r,s) = d^{X-\{a\}}(r^{X-\{a\}}, s^{X-\{a\}})$, d'où le résultat par récurrence.

(2) a n'est pas maximum dans s ; considérons l'ordre total $\hat{s}$ obtenu en mettant a en tête sans modifier le classement des autres éléments. Il est clair que :

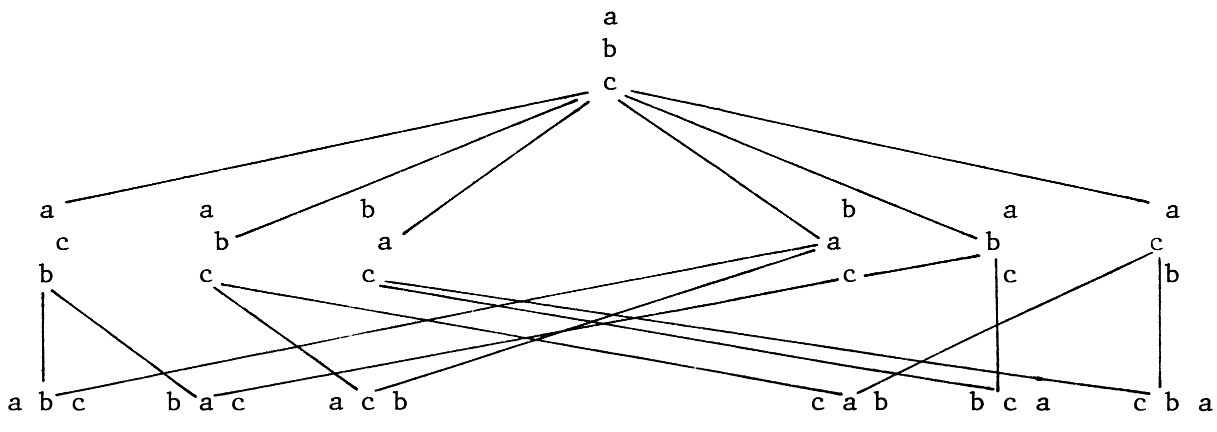
$s \cap r \subseteq \hat{s} \subseteq r \cup s$, donc : $d(r,s) = d(r,\hat{s}) + d(\hat{s},s)$. Pour $d(r,\hat{s})$, on est dans le cas précédent. Si a n'est pas minimum dans s, $\hat{s}$ et s coïncident sur l'ensemble des prédécesseurs de a dans s et par stabilité et par par récurrence $d(\hat{s},s) = \frac{\delta(r,s)}{2}$. Lorsque a est minimum dans s, on considère l'ordre total obtenu, à partir de s en échangeant a et son successeur : $s \cap \hat{s} \subset t \subset s \cup \hat{s}$ et $d(\hat{s},s) = d(\hat{s},t) + d(t,s)$. Par stabilité et par récurrence :

$$d(\hat{s},s) = \frac{\delta(\hat{s},t)}{2} + \frac{\delta(t,s)}{2} = \frac{\delta(\hat{s},s)}{2} .$$

Ainsi, $d(r,s) = \dfrac{\delta(r,\hat{s})}{2} + \dfrac{\delta(\hat{s},s)}{2} = \dfrac{\delta(r,s)}{2}$ C.Q.F.D.

3.3. Axiomatique de δ pour P'

Remarquons tout d'abord que les onze conditions de 1.3. ne suffisent pas à définir δ sur P'. Il suffit, pour s'en convaincre, de considérer la distance du plus court chemin dans le graphe non orienté de couverture de P' pour $|X| = 3$. Cette distance diffère de δ et vérifie toutes les conditions de 1.3.



Nous allons introduire la condition supplémentaire ci-dessous :

A_{12} : Si r est un préordre en deux classes {a} et X - {a} avec {a} < X -{a}, $d(r,r_\omega) = n-1$ (avec $|X| = n$).

Lemme : Soit d une application de P' x P' dans $\mathbb{R}$ qui vérifie A_3, A_{10} et telle que, pour tout $Y \subseteq X$, d^Y vérifie A_{12}. Pour $r \subseteq s$, $d(r,s) = \delta(r,s)$.

Preuve : Effectuons une récurrence sur le nombre n d'éléments de X.

Pour n=2, il y a trois préordres totaux r_o : a < b, r_1 : b < a, r_ω : a=b.

En vertu de A_3 $d(r_o,r_o) = d(r_1,r_1) = d(r_\omega,r_\omega) = 0$. En vertu de A_{12} $d(r_o,r_\omega) = d(r_1,r_\omega) = 1$. D'où le résultat.

Pour n > 2, supposons le résultat vrai pour tout ensemble de cardinal < n. Pour $r \subseteq s$, $d(r,s) = d(r,r_\omega) - d(s,s_\omega)$. Il suffit donc de montrer que $d(r,r_\omega) = \delta(r,r_\omega)$. Désignons par $A_1, \ldots, A_q$ les classes de r avec $A_1 < \ldots < A_q$. Soit r_k le préordre total dont les classes sont $\bigcup_{i<k} A_i < A_{k+1} < \ldots < A_q$: $r = r_1 \subseteq r_2 \ldots \subseteq r_q = r_\omega$. En vertu de A_3 $d(r,r_\omega) = \sum_{i=1}^{q-1} d(r_i,r_{i+1})$. Par stabilité, pour $i < q-1$, avec $B = \bigcup_{j<i+1} A_j$ $d(r_i,r_{i+1}) = d^B(r_i^B,r_{i+1}^B) = \delta^B(r_i^B,r_{i+1}^B) = \delta(r_i,r_{i+1})$, par récurrence.

Il reste donc à examiner le cas d'un préordre en deux classes r : $A < C$. Considérons pour cela un ordre total s compatible avec s(il suffit d'ordonner totalement A et C) ; en vertu de A_3, $d(r,r_\omega) = d(s,r_\omega) - d(s,r)$. Le calcul de $d(s,r_\omega)$ s'effectue selon le principe décrit plus haut : s admettant n classes $d(s,r\ ) = \sum_{i=1}^{n-1} d(r_i,r_{i+1})$, pour $i < q-1$, par stabilité et récurrence $d(r_i,r_{i+1}) = \delta(r_i,r_{i+1})$ tandis que -en vertu de A_{12}- $d(r_{q-1},r_\omega) = n-1 = \delta(r_{q-1}, r_\omega)$. Donc $d(s,r_\omega) = \delta(s,r_\omega)$. Pour le calcul de $d(s,r)$, on considère le préordre total t, compatible avec r qui coïncide avec s sur A et avec r sur C : $d(s,r) = d(s,t) + d(t,r)$; par stabilité et récurrence $d(s,t) = \delta(s,t)$, $d(t,r) = \delta(t,r)$. C.Q.F.D.

<u>Proposition 7</u> : <u>La restriction de</u> δ <u>à</u> P'<u>est la seule application</u> d <u>de</u> P'xP' <u>dans</u> $\mathbb{R}$ <u>telle que</u> :

(i) d <u>vérifie</u> A_1, A_2 <u>et</u> A_{10}

(ii) d^Y, <u>pour tout</u> $Y \subseteq X$ <u>vérifie</u> A_{12}.

Preuve : on effectue une récurrence sur le nombre n d'éléments de X.

- Pour n=2, on utilise le lemme, de plus (A_1) $d(r_\omega,r_o) = d(r_\omega,r_1)$ et $d(r_o,r_1) = d(r_o,r_\omega) + d(r_\omega,r_1) = 2 = d(r_1,r_o)$, d'où le résultat.

- Pour $n > 2$, on considère $r,s \in P'$. Soit M l'ensemble des éléments maximaux de r, si M est également l'ensemble des éléments maximaux de s, $d(r,s) = \delta(r,s)$ par stabilité de récurrence.

Sinon, on désigne par a un élément de M minimal dans s. Soit $\hat{s}$ le préordre total obtenu, à partir de s, en plaçant en tête tous les éléments x tels que : $(a,x) \in s$ sans modifier le classement des autres éléments : $r \cap s \subset \hat{s} \subset r \cup s$ et $d(r,s) = d(r,\hat{s}) + d(\hat{s},s)$. On distingue deux cas :

1°) $\hat{s}$ n'est pas le préordre grossier : $\hat{s}$ et s coïncident sur les prédécesseurs de a ; donc, par stabilité et par récurrence, $d(\hat{s},s) = \delta(\hat{s},s)$. On désigne par t le préordre total obtenu à partir de $\hat{s}$ en plaçant les éléments de M en tête, sans modifier le classement des autres éléments $r \cap \hat{s} \subseteq t \subseteq r \cup \hat{s}$, r et t coïncident sur M, $\hat{s}$ et t coïncident sur les prédécesseurs de la classe de a dans $\hat{s}$. Par intermédiarité, stabilité et récurrence : $d(r,\hat{s}) = \delta(r,\hat{s})$.

2°) $\hat{s}$ est le préordre grossier r_ω, il découle du lemme et de A_1 que $d(\hat{s},s) = \delta(\hat{s},s)$, $d(r,\hat{s}) = \delta(r,\hat{s})$.

Il s'ensuit que $d(r,s) = d(r,\hat{s})+ d(\hat{s},s)= \delta(r,\hat{s})+ \delta(\hat{s},s) = \delta(r,s)$.

C.Q.F.D.

3.4. <u>Axiomatique de δ pour E</u>

Ici encore les onze conditions de 1.3 ne suffisent pas à définir δ et nous allons considérer :

A_{13} : Si r est une partition en deux classes dont l'une est réduite à un seul élément $d(r,r_\omega) = n-1$

<u>Lemme</u> : <u>Soit</u> d <u>une application de</u> $E \times E$ <u>dans</u> $\mathbb{R}$ <u>qui vérifie</u> A_3 <u>et telle que, pour tout</u> $Y \subseteq X$, d^Y <u>vérifie</u> A_{13}. <u>Pour tout</u> $r \subseteq s, d(r,s) = \frac{\delta(r,s)}{2}$.

Preuve : la démonstration, analogue à celle du lemme, de 3.3 a été omise.

<u>Proposition 8</u> : <u>La restriction à</u> E <u>de</u> $\delta/2$ <u>est la seule application de</u> d : E x E <u>dans</u> $\mathbb{R}$ <u>telle que</u> :

(i) d <u>vérifie</u> A_1, A_3, A_5 et A_{10}.

(ii) <u>pour tout</u> $Y \subset X$, d^Y <u>vérifie</u> A_{13}.

Preuve : Pour r, s $\in$ E, en vertu de A_5, $d(r,s) = d(r,r \cap s) + d(r \cap s,s)$. En utilisant le lemme et A_1, il vient $2d(r,r \cap s) = \delta(r,r \cap s)$, $2d(r \cap s,s) = \delta(r \cap s,s)$. D'où le résultat. C.Q.F.D.

4 - δ COMME UNE DISTANCE DE GRAPHE

4.1. Axiomatique formelle

Soit Z un ensemble ordonné connexe. On désigne par G(Z) le <u>graphe non orienté de couverture</u> de Z ; les sommets de G(Z) sont les éléments de Z et u_{xy} est une arête si et seulement si y couvre x ou x couvre y. Pour $x,y \in Z$, on désigne par g(x,y) la longueur d'un chemin de G(Z) minimal entre x et y. g est une distance sur Z.

Supposons que Z est gradué par h(h(y) = h(x) + 1, lorsque y couvre x):

- Lorsque Z est un sup-demi-treillis, on pose :

  $h^+(x,y) = 2\,h(x \vee y) - h(x) - h(y)$.

- Lorsque Z est un inf-demi-treillis, on pose :

  $h^-(x,y) = h(x) + h(y) - 2\,h(x \wedge y)$.

(Pour $x \leqslant y$, $g(x,y) = h(y) - h(x) = h^+(x,y) =$ $h^-(x,y)$, $h^+(x,y) = g(x,x \vee y) + g(x \vee y, y)$, $h^-(x,y) = g(x, x \wedge y) + g(x \wedge y,y)$).

Dans [26], Monjardet démontre que, lorsque Z est un sup-demi-treillis, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Z est semi-modulaire supérieurement ;

(ii) h^+ vérifie l'inégalité triangulaire ;

(iii) pour tout x, y, $t \in Z$ tels que $t \leqslant x$, $t \leqslant y$,

$h(x) + h(y) \geqslant h(t) + h(x \vee y)$;

(iv) $h^+ = g$.

De ce résultat, il découle :

Proposition 9 : Soit Z un sup-demi-treillis semi-modulaire supérieurement, g est la seule application de $Z \times Z$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

(1) pour tout x, $y \in Z$, avec $x \leqslant y$, $g(x,y) = g(y,x)$;

(2) pour tout x, t, $y \in Z$, avec $x \leqslant t \leqslant y$, $g(x,y) = g(x,t) + g(t,y)$;

(3) pour tout $x,y \in Z$, $g(x,y) = g(x,x \vee y) + g(x \vee y,y)$;

(4) pour tout x,y,t,z tels que y couvre x et z couvre t, $g(x,y) = g(t,z)$;

(5) la valeur strictement positive minimum de g existe et vaut 1.

Preuve : Il est clair que g vérifie les cinq conditions de l'énoncé. Réciproquement, soit d vérifiant ces conditions ; notons $\underline{1}$ le plus grand élément de Z et posons $h(x) = - g(x, \underline{1})$. Pour $x \leqslant y$, en vertu de (2) : $d(x,y) = h(y) - h(x)$; donc -dans le cas général- d'après (3) $d(x,y) = h^+(x,x \vee y) + h^+(x \vee y,y)$. Donc $h^+(x,y) = d(x,y)$ et le résultat est acquis si l'on montre que h est une graduation. Or -d'après (3) et (2), $d(x,y) = (p + q)\alpha$, α désignant la valeur commune aux $d(u,v)$ lorsque v couvre u, p(resp. q) étant la longueur d'une chaîne maximale de x (resp. de y) vers $x \vee y$. Donc, d'après (5), $\alpha = 1$. C.Q.F.D.

Ainsi, la proposition 3 apparaît-elle comme un cas particulier de la proposition 9 (tout sous-ensemble héréditaire d'un treillis distributif est un sup-demi-treillis semi-modulaire supérieurement) de telle sorte que les axiomatiques de δ, comme distance de graphe, sur R, S, M, A, sont celles du paragraphe 2 (proposition 4).

4.2. Axiomatique de δ pour O et Q

Le sup-demi-treillis Q étant semi-modulaire supérieurement, on obtient (pour la proposition 11, on dualise la proposition 9) :

Proposition 10 : La restriction de δ à Q est la seule application de Q x Q dans $\mathbb{R}$ vérifiant A_1, A_3, A_4, A_7, A_{11}.

Proposition 11 : La restriction de δ à O est la seule application de O x O dans $\mathbb{R}$ vérifiant A_1, A_3, A_5, A_7, A_{11}.

4.3. Généralisations

On suppose toujours que Z est un sup-demi-treillis (pour une extension aux ensembles ordonnés non latticiels c.f. Barthélemy [6]). Si v est une application strictement croissante de Z dans $\mathbb{R}$ et si c : $x = x_o\, x_1 \ldots x_p = y$ est un chemin de G(Z) entre x et y, on pose $\tilde{v}(c) = \sum_{i=o}^{p-1} |v(x_i) - v(x_{i+1})|$ et $g_v(x,y) = \min_{c \in C(xy)} \tilde{v}(c)$, C(x,y) désignant l'ensemble des chemins entre x et y. g_v est une distance sur Z (lorsque v est une graduation, $g_v = g$). Par ailleurs, on pose : $v^+(x,y) = 2\, v(x \vee y) - v(x) - v(y) = g_v(x, x \vee y) + g_v(x \vee y, y)$. On sait (c.f. Comyn-Van Dorpe [17] , Barthélemy [6]) que les conditions ci-dessous sont équivalentes :

(i) v^+ vérifie l'inégalité triangulaire ;

(ii) $v(x) + v(y) \geqslant v(x \vee y) + v(t)$ pour tout $x,y,t \in Z$ avec $t \lessdot x$, $t \lessdot y$

(v <u>est une "valuation supérieure"</u>)

(iii) $g_v = v^+$

De même, sur un inf-demi-treillis, on poserait $v^-(x,y) = v(x) + v(y) - 2\,v(x \wedge y) = g_v(x, x \wedge y) + g_v(x \wedge y, y)$ et on obtiendrait le résultat dual (dans ce cas, on dira que v est une <u>valuation inférieure</u>). Or, sur E et sur P, δ est de la forme v^- où v est une valuation inférieure. Explicitons v.

1) Pour E, on désigne par $A_1, A_2, \ldots, A_q$ les classes de $r \in E$, il vient alors $v(r) = \sum_{i=1}^{q} |A_i|^2$ et $\delta(r,s) = v(r) + v(s) - 2\,v(r \wedge s)$.

2) Pour P, notons $A_1, A_2, \ldots, A_q$ les classes de $s \in P$ et posons $A_i^+ = \{y \mid x \in A_i \text{ entraîne } (x,y) \in r\}$, il vient alors $v(r) = \sum_{i=1}^{q} |A_i|\,|A_i^+|$ et $\delta(r,s) = v(r) + v(s) - 2v(r \wedge s)$.

On obtient donc les axiomatiques suivantes :

<u>Proposition 12</u> : <u>La restriction de</u> δ <u>à</u> E <u>est la seule application</u> d <u>de</u> E x E <u>dans</u> $\mathbb{R}$ <u>vérifiant, outre les conditions</u> A_1, A_3, A_5 <u>la condition</u> :

A_{13} : Si s est obtenue à partir de r en réunissant les classes A et B de r, $d(r,s) = 2\,|A|\,|B|$.

La relation de couverture de P étant quelques peu tracassante, nous allons remplacer la condition A_{13}.

<u>Proposition 13</u> : <u>La restriction de</u> δ <u>à</u> P <u>est la seule application</u> d <u>de</u> P x P <u>dans</u> $\mathbb{R}$ <u>vérifiant, outre les conditions</u> A_1, A_3, A_5, <u>la condition</u> :

A_{14} : <u>pour tout</u> $r \in P$, $d(r,r_\alpha) = \sum_{i=1}^{q} |A_i|\,|A_i^+| - n$ ($A_1, \ldots, A_q$ <u>désignant les classes de</u> r).

5 - UTILISATION DE L'ADDITIVITE DE L'UNION

5.1. La condition A_{15}

Considérons p opinions $r_1, \ldots, r_p$ et supposons que toutes ces opinions prises deux à deux, ont la même partie communes: $r_i \cap r_j = s$ pour tout i,j, $1 \leqslant i < j \leqslant p$. Désignons par t l'opinion obtenue en "sommant" les opinions r_i : $t = \bigcup_{i=1}^{p} r_i$. Il est naturel d'exiger que la "mesure du désaccord" entre s et t soit égale à la somme des mesures du désaccord entre s et les diverses r_i.

En fait, il nous suffira de considérer le cas particulier où les opinions $r_1, \ldots, r_p$ sont "disjointes" :

A_{15} : on suppose que $r_\alpha \in L$ et que $r_1, \ldots, r_p \in L$ sont telles que, $r_i \cap r_j = r_\alpha$ pour $i \neq j$ et $\bigcup_{i=1}^{p} r_i \in L$, alors $d(\bigcup_{i=1}^{p} r_i, r_\alpha) = \sum_{i=1}^{p} d(r_i, r_\alpha)$.

5.2. Axiomatique formelle

Soit Z un ensemble ordonné avec un plus petit élément $\underline{0}$. Un atome de Z est un élément couvrant $\underline{0}$. Pour $x \in Z$, on note $A(x)$ l'ensemble des atomes majorés par x.

Proposition 14 : Si Z est un inf-demi-treillis, il existe une application ℓ et une seule de L x L dans $\mathbb{R}$ telle que :

(1) pour tout $x \in Z$, $\ell(x,\underline{0}) = \sum_{a \quad A(x)} \ell(a,\underline{0})$;

(2) $\ell(x,y) = \ell(x,t) + \ell(t,y)$, pour tout $x,y,t \in Z$ avec $x \leqslant t \leqslant y$.

(3) $\ell(x,y) = \ell(x,x \wedge y) + \ell(x \wedge y,y)$, pour tout $x,y \in Z$.

(4) $\ell(\underline{0},a) = 1$, pour tout atome a de Z.

(5) $\ell(x,y) = \ell(y,x)$, pour tout $x,y \in Z$ avec $x \leqslant y$.

Preuve : Soit x,y, tels que $x \leqslant y$. En vertu de (2), $\ell(x,y) = \ell(\underline{0},y) - \ell(\underline{0},x)$ et, d'après (1) et (4), $\ell(x,y) = |A(y)| - |A(x)|$. Lorsque x et y sont quelconques, il découle de (3), (5) et de la remarque précédente que :
$\ell(x,y) = |A(x)| + |A(y)| - 2\,|A(x \wedge y)|$, ce qui prouve l'existence l'unicité de ℓ. C.Q.F.D.

On dit que Z est <u>atomique</u> lorsque tout élément de Z est borne supérieure des atomes qu'il majore. D'une manière générale, pour $x \in Z$, posons $m(x) = |A(x)|$.

<u>Lemme</u> : <u>Si</u> Z <u>est un inf-demi-treillis les conditions ci-dessous sont équivalentes</u> :
(i) Z <u>est atomique</u>
(ii) m <u>est strictement croissante de</u> Z <u>dans</u> $\mathbb{R}$.

Preuve : Il est clair que (i) entraîne (ii). Réciproquement, soient $x,y \in Z$ tels que $A(x) \subseteq A(y)$. Il vient alors $A(x \wedge y) = A(x) \cap A(y) = A(x)$, donc puisque m est strictement croissante $x \wedge y = x$ et $x \leqslant y$: x est borne supérieure de A(x). C.Q.F.D.

<u>Proposition 15</u> : <u>Lorsque</u> Z <u>est un inf-demi-treillis atomique</u>, ℓ <u>est une distance</u>.

Preuve : puisque $\ell = d_m^-$, il suffit -en vertu du lemme- de vérifier que m est une valuation inférieure. Soit x, y, $z \in L$ tels que $x \leqslant z$, $y \leqslant z$:
$|A(x)| + |A(y)| = |A(x) \cap A(y)| + |A(x) \cup A(y)|$. Or, $A(x) \cup A(y) \subseteq A(z)$ et $A(x) \cap A(y) = A(x \wedge y)$. D'où le résultat. C.Q.F.D.

5.2. Axiomatique de δ pour R, S, P, E, O

Proposition 16 : Soit L un sous-inf-demi-treillis de R tel que $r_\alpha \in$ L et pour tout x, $y \in X$, $r_\alpha \cup \{(x,y)\} \in$ L (cette hypothèse est vérifiée par L = R, A, P, O). La restriction de δ à est la seule application de L x L dans $\mathbb{R}$ vérifiant A_1, A_3, A_5, A_6, A_{11}, A_{15}.

Preuve : Les cinq conditions de la proposition 13 sont en effet vérifiées par L : A_1 est la condition 5, A_3 la condition 2, A_5 la condition 3, A_{15} la condition 1. Par ailleurs, en vertu de A_6, tous les $d(r_\alpha, r_\alpha \cup \{(x,y)\})$ ont même valeur λ et en vertu de A_5, $\lambda \leqslant d(r,s)$, pour tout $r,s \in$ L. Donc (A_{11}) $\lambda = 1$: c'est la condition 4 . C.Q.F.D.

Dans le cas de relations symétriques, on obtient l'analogue de la proposition 15. Par exemple :

Proposition 17 : Pour L = S ou E, la restriction de $\delta/2$ à L est la seule application de L x L dans $\mathbb{R}$ vérifiant A_1, A_3, A_5, A_6, A_{11}, A_{15}.

6 - QUELQUES REMARQUES

Le résultat rappelé en 4.3 ($g_v = v^+$ lorsque v est une valuation supérieure) joue un rôle central et les axiomatiques formelles que nous avons indiquées (propositions 4, 10, 13) n'en sont que des corollaires. Seuls échappent au domaine qu'il gouverne les ensembles O', T et P' : l'inclusion sur O' et T est discrète et δ n'est pas une distance de graphe sur P' ordonné par inclusion. Il est cependant remarquable que δ est une distance de graphe, sur O' et T, si l'on déclare que deux tournois -resp. deux ordres totaux- sont adjacents lorsqu'on passe de l'un à l'autre en inversant un couple

(x,y) -resp. en inversant un couple d'éléments consécutifs- la longueur d'un chemin minimum -entre r et s- de ce graphe est $\frac{\delta\,(r,s)}{2}$; c'est d'ailleurs cette remarque qui est utilisée dans la preuve de la proposition 6. Il est encore plus remarquable que, pour O', le graphe que nous venons de mentionner est le graphe non orienté de couverture d'un ensemble ordonné : le permutoèdre (c.f. Guilbaud-Rosenthiel [20]). Malheureusement δ n'est pas définie par une "valuation" sur le permutoèdre (ce qui pose le problème général de caractériser la "distance du plus court chemin" sur un ensemble ordonné quelconque ; le théorème de Monjardet, dans [26] ne répondant à cette question que sous une hypothèse de semi-modularité).

Par ailleurs la notion de valuation (inférieure ou supérieure) permet de caractériser d'autres distances que δ, par exemple la distance du plus court chemin (non valué) sur P' ou E obtenu -par semi-modularité- à partir de la graduation $\rho(r) = n$ - nombre de classes de r. A titre d'exemple, indiquons une caractérisation axiomatique de la <u>distance en entropie</u> sur E. Rappelons d'abord que l'<u>entropie</u> d'un champ de probabilité $(p_1, \ldots, p_m)$ ($\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$ et $p_i \geqslant 0$) est donnée par la formule :

$$H_m(p_1, \ldots, p_m) = -c \sum_{i=1}^{m} p_i \operatorname{Log} p_i$$

ou c est une constante > 0.

Supposons que X est muni d'une mesure de probabilité partout définie et strictement positive (toute partie non vide de X est un évenement de probabilité non nulle). A chaque $r \in E$ correspond un champ de probabilité $(p_1, \ldots, p_m)$, les p_i sont les probabilités des classes d'équivalence de r.

<u>Proposition 18</u> : <u>Il existe une application</u> e <u>de</u> E x E <u>dans</u> $\mathbb{R}$ <u>et une seule</u> <u>vérifiant, outre</u> A_1, A_3, A_5, <u>la condition</u> :

A_{16} : <u>Si l'on passe de</u> r <u>à</u> s <u>en réunissant les classes</u> A <u>et</u> B <u>de</u> r, <u>de</u> <u>probabilités respectives</u> p_1 <u>et</u> p_2 :

$$e(r,s) = (p_1 + p_2)\, h_2 \left(\frac{p_1}{p_1 + p_2}, \frac{p_2}{p_1 + p_2}\right).$$

<u>De plus</u> e <u>est une distance et est définie par la valuation inférieure</u> $v(r) = -h_m(p_1, \ldots, p_m)$ où $p_1, \ldots, p_m$ <u>sont les probabilités des classes de</u> r.

Signalons aussi que cet article laisse ouvert le problème de la caractérisation de δ sur des ensembles de relations binaires tels que les quasi-ordres, les ordres d'intervalles, etc... (c.f. Monjardet [27]). L'axiomatique de δ sur Q représente cependant un pas dans cette direction.

Enfin, nous avons indiqué, en introduction, que les conditions que nous donnerions seraient indépendantes. Pour ne pas alourdir le texte nous n'avons pas vérifié ces indépendances. Le lecteur pourra le faire aisément en obtenant des contre-exemples à l'aide de :

d_o, la distance discrète sur R ;

δ', $\delta'(r,s) = |r| - |r \cap s|$;

δ_p, $\delta_p(r,s) = \sum_{(x,y) \in r \,\Delta\, s} p(x,y)$ où p est une application de X x X dans $\mathbb{R}$.

<u>BIBLIOGRAPHIE</u>

[1] ARABIE P - BOORMAN S.A. "Structural measures and the method of sorting", <u>Multidimensional scaling</u>, New York, Seminar Press, 1972, 225-249

[2] BARBUT M., Médiane, Distributivité, Eloignements, Publications du Centre de Mathématique Sociale, E.P.H.E., 6ème Section, 1961

[3] BARBUT M., Médianes, Condorcet et Kendall, note SEMA, Paris, 1967

[4] BARBUT M., FREY L., Techniques ordinales en analyse des données, algèbre et combinatoire, Paris, Hachette, 1971

[5] BARBUT M., MONJARDET B., Ordre et classification, algèbre et combinatoire, Tomes I et II, Paris, Hachette, 1970

[6] BARTHELEMY J.P.,"Remarques sur les propriétés métriques des ensembles ordonnés", Math. Sci. Hum., 61 (1978), 39-60

[7] BARTHELEMY J.P. Propriétés métriques des ensembles ordonnés. Comparaison et agrégation des relations binaires, Thèse d'Etat, Besançon, 1979

[8] BARTHELEMY J.P., MONJARDET B.,"Ajustement et résumé de données relationnelles", Analyse des données et Informatique, IRIA, 1979

[9] BIRKHOFF G., Lattice theory, 3 rd ed., Providence, Amer. Math. Soc.. 1967

[10] BLACK D., The theory of Committees and Elections, Cambridge, Cambridge University Press, 1958

[11] BOGART K.P.,"Preference Structures I : Distance between transitive preference relations", J. Math. Sociol., 3 (1973), 49-67

[12] BOGART K.P.,"Preference Structures II : Distance between asymmetric relations", SIAM J. Appl. Math., 29, 2 (1975), 254-262

[13] BOORMAN S.A., OLIVER D.C.,"Metrics on spaces of finite trees", J. of. Math. Psycho. 10 (1973), 26-59.

[14] BORDES G.,"Métriques bornées définies par des valuations sur un demi-treillis", Math. Sci. Hum., 56 (1976), 89-95

[15] CAILLIEZ F., PAGES J.P., Introduction à l'analyse des données, SMASH, Paris, 1976

[16] CHERNYI L.B., MIRKIN B.F.,"Measurement of distance between distinct" partitions of a finite set of objects, Automatika i Telemekanika, traduit dans Automation and Remote Control, 31,5 (1970) 786-792

[17] COMYN G., VAN DORPE J.Cl.,"Valuation et semi-modularité dans les demi-treillis,"Math. Sci. Hum, 56 (1976), 63-73

[18] DEGENNE A., Techniques ordinales en analyse des données, statistique, Paris, Hachette, 1972

[19] GRIMONPREZ G., VAN DORPE J.Cl.,"Distance définie par une application monotone sur un treillis,"Math. Sci. Hum., 56 (1976), 47-62

[20] GUILBAUD G.Th., ROSENTHIEL P.,"Analyse algébrique d'un scrutin", Math.Sci. Hum., 4 (1963), 9-33

[21] HASKINS L., GUDDER S.,"Height on posets and graphs", Discrete Math., 2 (1972), 357-382

[22] KEMENY J.G.," Mathematics without numbers," Daedalus, 88 (1959), 577-591

[23] KEMENY J.G., SNELL J.C., Mathematical models in the Social Sciences, New York, Ginaud Co. 1962

[24] KENDALL M.G., Rank correlation Methods, 3ème ed.New York, Hafner, 1962

[25] LEMAIRE J., Agrégation typologique des préférences, Thèse de doctorat de 3° cycle, Nice, 1976

[26] MONJARDET B.,"Caractérisation métrique des ensembles ordonnés semi-modulaires," Math. Sci. Hum., 56 (1976), 77-87

[27] MONJARDET B.,"Axiomatiques et propriétés des quasi-ordres," Math.Sci. Hum., 63 (1978), 51-82

[28] MONJARDET B.,"Relations à éloignement minimum de relations binaires, note bibliographique," Math. Sci. Hum., 67 (1979), 115-122.

[29] MULDER H.M., SCHRIJVER A.,"Median graphs and Helly hypergraphs", Discrete Math., 25 (1979), 41-50

[30] SHOLANDER M.,"Medians and betweenness", Proc. Amer., Math. Soc. , 5 (1951) 801-807.