

## C. LE CONTE DE POLY

### **Permutations et partitions : tableaux à marges égales et distance partitionnelle**

*Mathématiques et sciences humaines*, tome 67 (1979), p. 71-83

[http://www.numdam.org/item?id=MSH\\_1979\\_\\_67\\_\\_71\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSH_1979__67__71_0)

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

PERMUTATIONS ET PARTITIONS : TABLEAUX A MARGES EGALES \*  
ET DISTANCE PARTITIONNELLE

C. LE CONTE DE POLY \*\*

I. PERMUTATIONS DE  $\Omega$  ET TABLEAUX A MARGES EGALES

Soit  $\Omega$  un ensemble de cardinal  $|\Omega| = n$ . Les éléments de  $\Omega$ , appelés *points*, seront désignés par des minuscules grecques :  $\alpha, \beta, \dots$ , les permutations de  $\Omega$  par des minuscules latines,  $f, g, \dots$  et le groupe des permutations de  $\Omega$  par  $S(\Omega)$ .

L'image d'un point  $\alpha$  par une permutation  $f$  sera noté  $\alpha^f$ , l'ensemble des images d'une partie  $\theta \subset \Omega$  par  $\theta^f$  et le produit  $pq$  de deux permutations  $p$  et  $q$  est défini par :  $\alpha^{pq} = (\alpha^p)^q$  (écriture de gauche à droite).

Soit  $\Delta$  une partition de  $\Omega$  en  $r$  classes énumérées dans un certain ordre (on dira une partition énumérée),  $\Delta_1, \dots, \Delta_i, \dots, \Delta_r$ . On posera  $|\Delta_i| = n_i$ . Le sous-groupe de  $S(\Omega)$  qui conserve globalement chaque classe  $\Delta_i$  de  $\Delta$ , c'est-à-dire l'ensemble des permutations  $f$  pour lesquelles  $\Delta_i^f = \Delta_i$ ,  $i \in \{1, \dots, r\}$ , sera noté  $S_\Delta$ . De toute évidence  $S_\Delta$  est isomorphe au produit direct des groupes de permutations  $S(\Delta_i)$  des classes  $\Delta_i$ .

I.1. Permutations et partitions de  $\Omega$

A chaque couple  $(f, \Delta)$  on associe un tableau carré  $r \times r$  à entrées  $n_{ij} \in \mathbb{N}$  où  $n_{ij} = |\Delta_i^f \cap \Delta_j|$ . Ce tableau sera désigné par *tableau d'échanges*  $T_{f, \Delta}$  de  $f$  selon  $\Delta$ , chaque  $n_{ij}$  correspondant au nombre d'éléments envoyés par  $f$  de  $\Delta_i$  dans  $\Delta_j$ .

---

\* Je tiens à remercier vivement A. Lentin dont les remarques et suggestions m'ont aidée à mettre au point ce texte.

\*\* Centre de Mathématique Sociale, Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales, 54 bd Raspail 75270 PARIS Cedex 06

En considérant successivement  $\Delta_i$  comme source puis comme but dans l'application  
 $f : \Delta \longrightarrow \Delta$  on obtient :

$$(1) \quad \sum_{j=1}^r n_{ij} = n_i \quad \sum_{j=1}^r n_{ji} = n_i$$

Ce fait conduit à poser en toute généralité les définitions suivantes :

DEFINITION 1

P étant un partage énuméré de l'entier n,  $P = [n_1, \dots, n_i, \dots, n_r]$  on appelle *tableau d'échange de genre P* un tableau carré  $r \times r$  à entrées  $n_{ij} \in \mathbb{N}$  dont la  $i$ -ème ligne et la  $i$ -ème colonne ( $1 \leq i \leq r$ ) ont pour somme  $n_i$ .

Un tableau d'échange de genre P est encore un *tableau dont les deux marges sont égales à P*.

DEFINITION 2

Avec les notations précédentes on appelle *schéma d'échange de genre P* un ensemble ordonné de r mots  $t^{(1)}, \dots, t^{(i)}, \dots, t^{(r)}$  en l'alphabet  $\{1, \dots, j, \dots, r\}$  tel que  $n_{ij}$  étant le nombre d'occurrences de j dans  $t^{(i)}$ , on ait les relations (1). Il est clair qu'un schéma détermine un tableau d'échange mais la réciproque n'est pas vraie. Plus précisément on a le

LEMME 1

Le nombre de schémas correspondant à un tableau donné est

$$\left( \prod_{i=1}^r n_i! \right) \quad / \quad \left( \prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^r n_{ij}! \right)$$

Preuve : Les mots  $t^{(i)}$  sont les permutations avec répétitions de  $n_i$  objets, l'objet j figurant en  $n_{ij}$  exemplaires.

PROPOSITION 1

Soit T un tableau de genre  $P = [n_1, \dots, n_i, \dots, n_r]$  et soit  $\Delta$  une partition énumérée de  $\Omega$  en r classes  $\Delta_1, \dots, \Delta_i, \dots, \Delta_r$  avec  $|\Delta_i| = n_i$ .

Le nombre de permutations  $f \in S(\Omega)$  admettant T pour tableau d'échange est

$$(2) \quad \left( \prod_{i=1}^r n_i! \right)^2 \quad / \quad \left( \prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^r n_{ij}! \right)$$

Preuve : Chacun des schémas d'échange associé à T donne  $\prod_{j=1}^r n_j!$  permutations possibles puisque les  $n_j$  occurrences de la lettre  $j$  doivent être remplacées de toutes les façons possibles par les éléments de  $\Delta_j$  pour

remonter des  $t^{(i)}$  aux permutations.

#### COROLLAIRE 1

Il y a bijection entre l'ensemble des tableaux de genre  $P = [n_1, \dots, n_1, \dots, n_r]$  et le quotient de  $S(\Omega)$  par la relation d'équivalence  $\sim$  définie par :

$$f \sim g \iff T_{f,\Delta} = T_{g,\Delta}$$

#### I.2. Tableaux à marges égales et classes bilatères

La relation d'équivalence  $\sim$  peut s'exprimer d'une autre façon, en termes de classes bilatères de  $S(\Omega)$  selon  $S_\Delta$ .

Les classes bilatères de  $S(\Omega)$  selon  $S_\Delta$ .

A chaque élément  $f$  de  $S(\Omega)$  on attache sa classe bilatère [6]  $B_f$  selon  $S_\Delta$  :

$$B_f = S_\Delta f S_\Delta$$

pour  $f \neq g$   $B_f$  et  $B_g$  sont disjointes ou confondues et la relation  $\sim'$  :

$f \sim' g \iff S_\Delta f S_\Delta = S_\Delta g S_\Delta$  est une relation d'équivalence.

#### PROPOSITION 2

Les deux relations d'équivalence définies dans  $S(\Omega)$  :

$$f \sim g \iff T_{f,\Delta} = T_{g,\Delta}$$

$$f \sim' g \iff S_\Delta f S_\Delta = S_\Delta g S_\Delta$$

coïncident.

#### Preuve :

a)  $f \sim' g \Rightarrow f \sim g$

Les deux classes  $S_\Delta f S_\Delta$  et  $S_\Delta g S_\Delta$  sont égales si et seulement si  $f$  peut s'écrire sous la forme  $f = h_1 g h_2$ , où  $h_1, h_2 \in S_\Delta$  n'agissent qu'à l'intérieur des classes de  $\Delta$ . Dans ces conditions, pour toute permutation  $\ell$  de  $\Omega$ ,

$$T_{h_1 \ell, \Delta} = T_\ell h_1, \Delta ;$$

en particulier,

$$T_{f,\Delta} = T_{h_1 g h_2, \Delta} = T_{g,\Delta} \quad \text{et } f \sim g.$$

b)  $f \sim g \Rightarrow f \sim' g$ .

Vérifions que  $f \sim g$  implique l'existence de  $h_1, h_2 \in S_\Delta$  tels que  $f = h_1 g h_2$ .

#### Construction de $h_1$ et $h_2$

Nous désignerons par  $\bar{\alpha}$  la classe, dans  $\Delta$ , d'un élément  $\alpha$  de  $\Omega$ .

Pour tout  $\alpha \in \Omega$ , soit  $\alpha^{h_1} = \beta$  où  $\beta$  vérifie  $\beta^g = \alpha^f$  et  $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$ .

Ce choix de  $\beta$  est toujours possible. En effet si  $f$  et  $g$  ont même tableau d'échange, si  $\alpha \in \Delta_i$  et  $\alpha^f \in \Delta_j$ ,  $n_{ij}$  n'est pas nul et il y a  $n_{ij}$  choix possibles pour  $\beta$ .

$h_2$  se construit en posant  $\beta^{gh_2} = \alpha^f$ . Il y a ainsi  $\prod_{i,j=1}^r n_{ij}!$  façons de construire  $h_1$ .

#### COROLLAIRE

Le nombre de tableaux à marges égales, de genre  $P$  est égal au nombre de classes bilatères de  $S(\Omega)$  selon  $S_{\Delta}$ .

### I.3. Dénombrements de tableaux à marges égales

Le dénombrement des tableaux à marges égales  $P$  est assez complexe et celui des classes bilatères n'est pas plus simple. Toute classe bilatère est union de classes à gauche (et de classes à droite) et a donc pour nombre d'éléments un multiple de  $|S_{\Delta}|$ . Ce nombre d'éléments, donné par la formule (2) ne permet pas de compter les classes puisqu'elles n'ont pas toutes le même nombre d'éléments.

Toutefois des fonctions génératrices permettent de calculer ce nombre ([5] et [2]) : Le nombre de tableaux non-négatifs noté ici  $H(n_1, \dots, n_r)$  dont la  $i$ -ème ligne et la  $i$ -ème colonne a pour somme  $n_i$   $i \in \{1, \dots, r\}$  est égal au coefficient de  $x_1^{n_1} \dots x_r^{n_r} \cdot y_1^{n_1} \dots y_r^{n_r}$  dans le produit

$$\prod_{i,j=1}^r (1 - x_i y_j)^{-1}.$$

Ces fonctions génératrices permettent en principe de calculer  $H(n_1, \dots, n_r)$  lorsque les  $(n_1, \dots, n_r)$  sont donnés mais ne fournissent pas une formule générale en  $n_1, \dots, n_r$ .

Nous donnons ici des formules dans deux cas particuliers : celui où les  $n_i$  sont tous égaux, avec  $r = 3, 4$  et celui où  $r = 3$ .

a) Cas où  $n_i = m$  pour tout  $i$ .

Des formules ont été données par Anand, Dumir et Gupta [3] pour  $H(m, m, m)$  et par Abramson et Moser [1] :

$$H(m, m, m) = \binom{m+2}{2} + 3 \binom{m+3}{4}$$

$$H(m, m, m, m) = \binom{m+3}{3} + 20 \binom{m+4}{5} + 152 \binom{m+5}{7} + 352 \binom{m+6}{9}$$

En outre, Anand, Dumir et Gupta avaient conjecturé que  $H(m, m, \dots, m)$  était, pour tout  $r$  un polynôme en  $m$  de degré  $(r-1)^2$ . Cette conjecture a été démontrée par Stanley [7].

b)  $H(n_1, n_2, n_3)$

Nous avons démontré que le nombre  $H(n_1, n_2, n_3)$  pour  $n_1 \leq n_2 \leq n_3$  de tableaux  $3 \times 3$  d'entiers non négatifs tels que la somme de la  $i$ -ème ligne et celle de la  $i$ -ème colonne soit égale à  $n_i$   $i \in \{1, 2, 3\}$  était donné par la formule :

$$H(n_1, n_2, n_3) = \binom{n_1+2}{2} + 3\binom{n_1+3}{4} + (n_2-n_1) \sum_{p=1}^{n_1+1} p^2 + \\ + \sum_{p=n_1+n_2-n_3}^{n_1-1} \left[ \binom{p+2}{3} + \binom{p+1}{2} + \binom{p}{1} + \binom{p}{0} \right]$$

La preuve est trop technique pour figurer ici.

## II. DISTANCE PARTITIONNELLE DANS $S(\Omega)$

### II.1. Les partitions associées à deux permutations

#### DEFINITIONS

Un triplet  $(f, g; \Delta)$  où  $f$  et  $g$  sont des permutations de  $\Omega$  et  $\Delta$  une partition de  $\Omega$ , est dit *cohérent* si, pour tout couple  $(\Delta_i, \Delta_j)$  de la partition  $\Delta$ , l'égalité suivante est vérifiée :

$$|\Delta_i^f \cap \Delta_j| = |\Delta_i^g \cap \Delta_j|$$

c'est-à-dire si  $T_{f, \Delta} = T_{g, \Delta}$ .

On dira encore que  $f$  et  $g$  sont *cohérentes* sur  $\Delta$  et on notera  $\mathcal{P}_{f, g}$  l'ensemble des partitions sur lesquelles  $f$  et  $g$  sont cohérentes.

Deux permutations  $f$  et  $g$  sont cohérentes sur une partition  $\Delta$  si elles ont globalement la même action sur les classes de  $\Delta$  en ce sens que les nombres d'éléments échangés entre les classes sont les mêmes pour  $f$  et  $g$ .

Si la partition  $\Delta$  est très fine, c'est-à-dire a un grand nombre de classes la cohérence de  $f$  et  $g$  implique une "ressemblance". (Elles deviennent égales si  $\Delta$  est la plus fine des partitions). Aussi nous intéressons nous, pour le couple  $(f, g)$  aux plus fines des partitions sur lesquelles  $f$  et  $g$  sont cohérentes.

#### PROPOSITION 3

L'ensemble  $\mathcal{P}_{f, g}$  des partitions de  $\Omega$  sur lesquelles  $f$  et  $g$  sont cohérentes est une partie finissante dans le treillis des partitions de  $\Omega$ .

Preuve : Montrons que si  $(f, g; \Delta)$  est cohérent,  $(f, g; \Gamma)$  l'est aussi pour toute partition  $\Gamma$  de  $\Omega$  moins fine que  $\Delta$ . Toute classe  $\Gamma_i$  de  $\Gamma$  est union de classes de  $\Delta$ .

$$\Gamma_i = \Delta_{i_1} \cup \dots \cup \Delta_{i_\ell}$$

$$\Gamma_j = \Delta_{j_1} \cup \dots \cup \Delta_{j_m}$$

$$\text{et } |\Gamma_i^f \cap \Gamma_j| = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{p=1}^m |\Delta_{i_k}^f \cap \Delta_{j_p}| = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{p=1}^m n_{i_k, j_p}$$

le calcul de  $|\Gamma_i^g \cap \Gamma_j|$  donne le même résultat, et  $\mathcal{P}_{f,g}$  est une partie finissante du treillis des partitions de  $\Omega$ .

#### REMARQUES

Si  $(f,g;\Delta)$  et  $(f,g;\Delta')$  sont cohérents  $(f,g;\Delta \vee \Delta')$  l'est aussi. Par contre  $(f,g;\Delta \wedge \Delta')$  n'est pas obligatoirement cohérent.  $\mathcal{P}_{f,g}$  n'est pas toujours un sous-treillis.

Le tableau d'échange  $T_{f,\Delta \vee \Delta'}$  se déduit aisément de  $T_{f,\Delta}$  (ou de  $T_{f,\Delta'}$ ) par regroupement de lignes et de colonnes correspondant aux regroupements des classes de  $\Delta$  (ou de  $\Delta'$ ) dans  $\Delta \vee \Delta'$ .  $T_{f,\Delta \vee \Delta'}$  est une "compression" de  $T_{f,\Delta}$  et  $T_{f,\Delta'}$ .

#### II.2. La distance D

Une façon d'étudier une ressemblance entre deux permutations  $f$  et  $g$  consiste, comme nous l'avons vu précédemment, à chercher les partitions les plus fines sur lesquelles  $f$  et  $g$  sont cohérentes, aussi posons nous la définition suivante :

#### DEFINITION

Un triplet cohérent  $(f,g;\Delta)$  est dit *optimum* si  $\Delta$  est minimale dans l'ensemble  $\mathcal{P}_{f,g}$  des partitions sur lesquelles  $f$  et  $g$  sont cohérentes, c'est-à-dire, en désignant par  $|\Delta|$  le nombre de classes de  $\Delta$  si

$$|\Delta| = \max_{\Gamma \in \mathcal{P}_{f,g}} |\Gamma|$$

On dira encore que  $\Delta$  est optimum pour  $(f,g)$  et nous définissons la distance  $D$  :

#### PROPOSITION 4

L'application  $D$  de  $S(\Omega) \times S(\Omega)$  dans  $\mathbb{N}$  définie par :

$$D(f,g) = n - \max_{\Gamma \in \mathcal{P}_{f,g}} |\Gamma|$$

est une distance dans l'ensemble des permutations d'un ensemble  $\Omega$  de cardinal  $n$ .

#### Preuve :

$$1^\circ) D(f,g) = 0 \iff \max_{\Gamma \in \mathcal{P}_{f,g}} |\Gamma| = n \iff f = g .$$

2°)  $D(f,g) = D(g,f)$ , évident.

3°) Vérifions l'inégalité triangulaire  $D(f,g) + D(g,h) \geq D(f,h)$ .

Si  $(f,g;\Delta)$  et  $(f,g;\Gamma)$  sont optimum,  $|\Gamma| = |\Delta|$  et  $D(f,g) = n - |\Delta| = n - |\Gamma|$ .

$(f,g;\Delta \vee \Gamma)$  et  $(g,h;\Delta \vee \Gamma)$  sont cohérents, d'après la proposition 3 et

$T_{f,\Delta \vee \Gamma} = T_{g,\Delta \vee \Gamma} = T_{h,\Delta \vee \Gamma}$  implique que  $(f,h;\Delta \vee \Gamma)$  est cohérent mais pas obligatoirement optimum. On a donc l'inégalité

$$D(f,h) \leq n - |\Delta \vee \Gamma|$$

Dans le treillis des partitions d'un ensemble à  $n$  éléments l'inégalité suivante est toujours vraie [4] :

$$n - |\Delta \vee \Gamma| + n - |\Delta \wedge \Gamma| \leq n - |\Delta| + n - |\Gamma|.$$

On en déduit :

$$D(f,h) \leq n - |\Delta \vee \Gamma| \leq n - |\Delta| + n - |\Gamma| - (n - |\Delta \wedge \Gamma|) \leq D(f,g) + D(f,h).$$

#### Construction de la distance D

La recherche de partitions optimum pour deux permutations  $f$  et  $g$  n'est pas très aisée. On peut procéder

1°) Par *balayage du treillis des partitions de  $\Omega$*

En commençant par la partition en  $n$  classes (qui n'est optimum que si  $f = g$ ) puis les partitions en  $n-1$  classes etc. c'est-à-dire en allant des plus fines aux moins fines. Pour chaque partition  $\Delta$  écrite en se fixant un ordre sur  $\Delta$  (partition énumérée), on calcule  $T_{f,\Delta}$  et  $T_{g,\Delta}$  et la première partition pour laquelle les deux tableaux d'échange sont égaux est optimum.

2°) par *balayage du groupe  $S(\Omega)$* , en utilisant la proposition 2.

A chaque permutation  $h$  de  $\Omega$  on associe  $h'$  définie par  $f = h g h'$ .

A  $h$ , ( $h'$ ) on associe la partition  $\Delta$  ( $\Delta'$ ) de  $\Omega$  selon les cycles de  $h$  ( $h'$ ).

Il est clair que  $h(h')$  conserve  $\Delta$  ( $\Delta'$ ), donc  $h \in S_{\Delta}$  ( $h' \in S_{\Delta'}$ ) et

$h, h' \in S_{\Delta \vee \Delta'}$  ( $f, g ; \Delta \vee \Delta'$ ) est alors cohérent.

A chaque  $h \in S(\Omega)$  on associe ainsi une partition  $\Delta \vee \Delta'$  sur laquelle  $f$  et  $g$  sont cohérents et, en balayant  $S(\Omega)$  on obtient  $n!$  partitions  $P \vee P'$ , qui ne sont pas toutes distinctes, sur lesquelles  $f$  et  $g$  sont cohérentes. D'où le lemme suivant .

#### LEMME

Les partitions  $\Gamma$  pour lesquelles  $(f,g;\Gamma)$  est optimum sont parmi les  $n!$  partitions construites par balayage de  $S(\Omega)$ .

Preuve :

D'après la proposition 2 si  $(f,g;\Gamma)$  est optimum, il existe  $h,h' \in S_\Gamma$  et  $f = h g h'$ . Si on désigne encore par  $\Delta$  (et  $\Delta'$ ) les partitions de  $\Omega$  selon les cycles de  $h$  ( $h'$ ) il est clair que  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont des partitions plus fines que  $\Gamma$ . Et si  $(f,g;\Gamma)$  est optimum, l'égalité  $\Delta \vee \Delta' = \Gamma$  est vérifiée, et  $\Delta \vee \Delta'$  est l'une des partitions construite par balayage de  $S(\Omega)$ .

Les partitions sur lesquelles  $f$  et  $g$  sont cohérentes ne figurent pas obligatoirement toutes dans l'ensemble de ces  $n!$  partitions, mais les partitions optimum y figurent et, d'après la proposition 3,  $\mathcal{P}_{f,g}$  s'obtient en prenant l'ensemble des partitions moins fines que ces partitions optimum.

### Propriétés de la distance D

#### 1) Distance à l'identité

La distance entre l'identité  $I$  et une permutation  $f$  est :

$$D(I,f) = n - |\{\text{cycles de } f\}|$$

En effet, pour toute partition  $\Delta$ ,  $T_{I,\Delta}$  est tel que  $n_{ii} = n_i$  et  $n_{ij} = 0$  pour  $i \neq j$  et la partition  $\Delta$  la plus fine pour laquelle  $T_{f,\Delta}$  a cette propriété est la partition selon les cycles de  $f$ .

La distance  $D$  coïncide pour les couples  $(I,f)$  avec la distance  $T$  (cf. dans ce numéro l'article de G. Cohen et M. Deza) qui correspond au nombre minimum de transpositions faisant passer de  $I$  à  $f$ .

Vérifions que pour tout couple  $(f,g)$ ,

$$D(f,g) \leq T(f,g).$$

$$T(f,g) = T(I,fg^{-1}) = n - |\{\text{cycles de } fg^{-1}\}|$$

D'autre part  $f = (fg^{-1}) g I$  et la partition en cycles de  $fg^{-1}$  est l'une des  $n!$  partitions sur laquelle  $f$  et  $g$  sont cohérents. Cette partition n'est pas forcément optimum et  $D(f,g) \leq n - |\{\text{cycles } fg^{-1}\}| = T(f,g)$ .

#### 2) Invariance par une même conjugaison

Pour tout  $f$ , tout  $g$  et tout  $h$  de  $S(\Omega)$ ,

$$D(f,g) = D(h^{-1} f h, h^{-1} g h)$$

Preuve :

Rappelons que si  $f = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n_1}) \dots (\gamma_1, \dots, \gamma_{n_r})$  la décomposition cyclique de  $h^{-1} f h$  s'écrit

$$h^{-1} f h = (\alpha_1^h \dots \alpha_{n_1}^h) \dots (\gamma_1^h \dots \gamma_{n_r}^h)$$

et  $h^{-1} f h$  s'obtient de la même façon à partir de  $g$ .

On en déduit que si  $\Delta = \Delta_1, \dots, \Delta_r$  est cohérente pour  $(f, g)$ , la partition  $\Delta^h = \Delta_1^h, \dots, \Delta_r^h$  est cohérente pour  $(h^{-1}f h, h^{-1}g h)$  et

$$(f, g; \Delta) \text{ optimum} \iff (h^{-1}f h, h^{-1}g h; \Delta^h) \text{ optimum}$$

et  $|\Delta| = |\Delta^h|$  implique l'égalité :  $D(f, g) = D(h^{-1}f h, h^{-1}g h)$ .

### 3) Non invariance par les translations

$D(hf, hg)$  n'est pas toujours égal à  $D(f, g)$ .

Vérifions le sur des exemples :

si  $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$   $f = (\alpha\beta) (\gamma\delta)$   $g = (\alpha\gamma) (\beta\delta)$ ,  $h = f$

$D(f, g) = 1$  car  $f = (\beta\gamma) g (\beta\gamma)$  et  $D = \{\beta, \gamma\}, \{\alpha\}, \{\delta\}$  est cohérent pour  $(f, g)$ .

$D(ff, fg) = D(I, (\alpha\delta) (\beta\gamma)) = 2$

$D$  n'est pas, non plus, invariante par les translations à droite :

pour le même exemple,  $D(ff, gf) = D(I, (\alpha\delta) (\beta\gamma)) = 2$ .

### 4) Boules $B(f, m)$ de centre $f$ et de rayon $m$ , $m \in \mathbb{N}$

$$B(f, m) = \{h, D(f, h) \leq m\}$$

Les distances étant entières, il suffit d'étudier les boules fermées.

La propriété d'invariance par conjugaison implique que si deux permutations  $f$  et  $g$  sont dans la même classe de conjugaison, les boules  $B(f, m)$  et  $B(g, m)$  se déduisent

biunivoquement l'une de l'autre. En effet, si  $g = h^{-1}f h$ ,

$D(f, \ell) = p \iff D(g, h^{-1}\ell h) = p$  et l'application  $\ell \longrightarrow h^{-1}\ell h$  définit une

bijection entre les éléments de  $B(f, m)$  et ceux de  $B(g, m)$ .

On construit facilement les boules de rayon 1 car  $D(f, g) = 1$  si et seulement si  $(f, g; \Delta)$  est optimum pour une partition  $\Delta$  en  $n-1$  classes c'est-à-dire une partition ayant une classe à deux éléments, par exemple  $\{\alpha, \beta\}$  et  $n-2$  classes à un élément.

Si  $t$  est la transposition  $(\alpha\beta)$ ,  $g = tf$  ou  $g = ft$  ou  $g = tft$ .

Les boules  $B(f, 1)$  peuvent donc se construire en calculant, pour toutes les transpositions  $t$ , les permutations  $tf$ ,  $ft$  et  $tft$ .

On en déduit que les boules de rayon 1 ont entre  $\frac{n(n-1)}{2}$  et  $\frac{3n(n-1)}{2}$  éléments.

### 5) Permutations à distance $n-1$

Si  $D(f, g) = n-1$ ,  $f$  est l'identité et  $g$  un cycle de longueur  $n$  (ou le contraire).

En effet, si  $f \neq I$  et  $g \neq I$ , il y a trois cas possibles :

a)  $\exists \alpha, \alpha \in \Omega$ ;  $\alpha^f \neq \alpha$  et  $\alpha^g \neq \alpha$ . Dans ce cas  $f$  et  $g$  sont cohérents sur la partition  $\Delta = \{\alpha\}, \{\Omega - \{\alpha\}\}$  et

$D(f,g) < n-1$

b)  $\exists \alpha$ ,  $\alpha^f = \alpha$  et  $\alpha^g \neq \alpha$ . La même partition  $\Delta$  convient.

c)  $\exists \alpha$ ,  $\alpha^f = \alpha^g = \alpha$ . Ici encore la même partition  $\Delta$  convient.

#### 6) Permutations à distance 2

Nous montrons que si  $D(f,g) = 2$ , il existe au moins une permutation  $h$  intermédiaire entre  $f$  et  $g$  en ce sens que  $D(f,h) + D(h,g) = D(f,g) = 2$ , c'est-à-dire ici,  $D(f,h) = D(h,g) = 1$ .

Preuve :

Si  $D(f,g) = 2$ , il existe au moins une partition  $\Delta$  optimum pour  $(f,g)$  et  $|\Delta| = n-2$ .

Cette partition  $\Delta$  peut être de deux types différents :

a)  $\Delta$  a deux classes  $\{\alpha,\beta\}, \{\gamma,\delta\}$  à deux éléments, et des classes à un élément.

b)  $\Delta$  a une classe  $\{\alpha,\beta,\gamma\}$  à trois éléments et des classes à un élément.

Dans les deux cas  $f = h_1 g h_2$  avec  $h_i \in S_\Delta$  c'est-à-dire :

. dans le premier cas

$$h_i \in \{(\alpha\beta), (\gamma\delta), (\alpha\beta)(\gamma\delta), I\}.$$

. dans le deuxième cas

$$h_i \in \{(\alpha\beta\gamma), (\alpha\gamma\beta), (\alpha\beta), (\alpha\gamma), (\beta\gamma) I\}.$$

Il y a donc vingt cinq écritures  $f = h_1 g h_2$  à étudier, dans le premier cas et trente six dans le second.

Nous n'étudierons qu'un exemple dans chaque cas ici, mais le procédé est le même pour toutes les écritures possibles.

cas a) : si  $f = (\alpha\beta)(\gamma\delta) g (\alpha\beta)(\gamma\delta)$

$$f = (\alpha\beta) h (\alpha\beta) \text{ avec } h = (\gamma\delta) g (\gamma\delta)$$

$$\text{et } D(f,h) = D(h,g) = 1$$

cas b) : si  $f = (\alpha\beta\gamma) g (\alpha\gamma\beta)$

$$(\alpha\beta\gamma) = (\alpha\gamma)(\beta\gamma) \quad (\alpha\gamma\beta) = (\beta\gamma)(\alpha\gamma)$$

$$f = (\alpha\gamma) h (\alpha\gamma) \text{ avec } h = (\beta\gamma) g (\beta\gamma).$$

#### 7) Intermédialité ?

Nous avons montré que "entre" deux permutations à distance deux il y a au moins une permutation, mais la démonstration n'est pas faite pour les distances supérieures à 2.

La question se pose de savoir si  $D$  est *graphique* (au sens de Cohen et Deza, ce numéro), c'est-à-dire si entre deux permutations  $f$  et  $g$  à distance  $m$  on peut trouver des intermédiaires  $h_1, \dots, h_{m-1}$  tels que  $D(f, g) = D(f, h_1) + D(h_1, h_2) + \dots + D(h_{m-2}, h_{m-1}) + D(h_{m-1}, g)$  avec  $D(f, h_1) = D(h_1, h_2) = \dots = D(h_{m-1}, g) = 1$

8) Distance et nombre de cycles de permutations

Pour tout ensemble  $\Omega$ , en notant  $|f|$  le nombre de cycles de  $f$  les propriétés suivantes sont vérifiées :

.  $D(f, g) = 1 \Rightarrow ||f| - |g|| \leq 1$  .

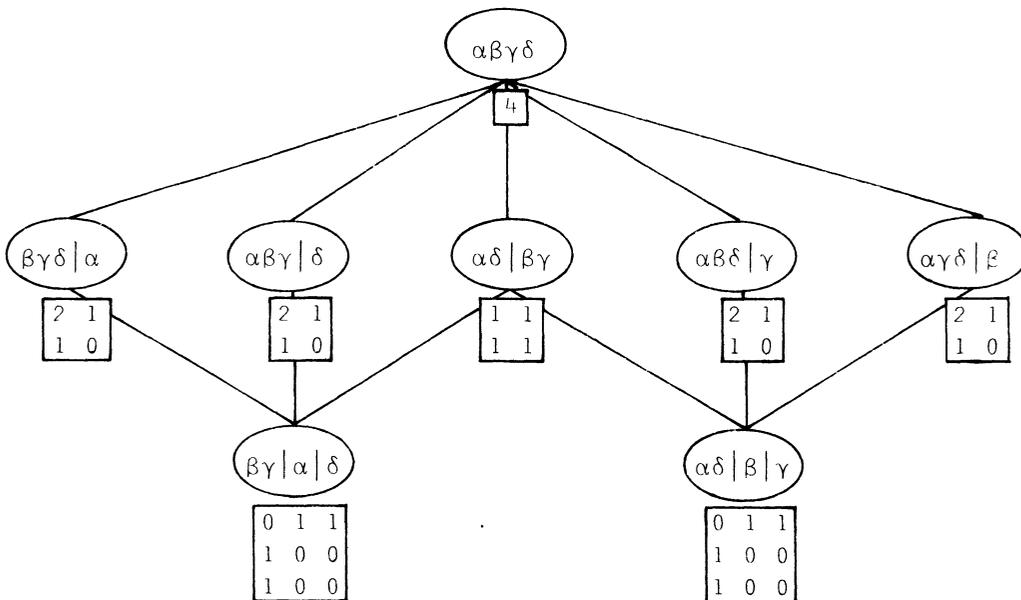
Ceci tient au fait que pour toute transposition  $t$  et toute permutation  $f$   $|tf| = |ft| = |f| - 1$  ou  $|tf| = |ft| = |f| + 1$  et  $|tft| = |f|$

.  $D(f, g) = 2 \Rightarrow ||f| - |g|| \leq 2$  car entre deux permutations à distance deux il y a au moins un intermédiaire.

Exemples

a) Ensemble  $P_{f, g}$  des partitions  $\Delta$  de  $\Omega$  sur lesquelles  $f$  et  $g$  sont cohérentes partie finissante du treillis des partitions de  $\Omega$ , et tableaux d'échange  $T_{f, \Delta} = T_{g, \Delta}$  associés, pour  $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$   $f = (\alpha\beta)(\gamma\delta)$ ,  $g = (\alpha\gamma)(\beta\delta)$ . Les partitions optimum sont  $\{\beta\gamma\}, \{\alpha\}, \{\delta\}$  et  $\{\alpha\delta\}, \{\beta\}, \{\gamma\}$ .

$D(f, g) = 1$



b) La distance D pour  $|\Omega| = 3$  et  $|\Omega| = 4$ .

. Pour  $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ , deux permutations distinctes quelconques sont à distance 1 sauf  $D(I, (\alpha\gamma\beta)) = D(I, (\alpha\beta\gamma)) = 2$ .

. Pour  $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$  deux permutations sont à distance trois si et seulement si l'une est l'identité et l'autre l'un des six cycles de longueur quatre. La distance D est entièrement déterminée si on connaît les boules de rayon 1. Il suffit d'étudier les boules  $B(f, 1)$  pour un représentant f de chacune des quatre classes de conjugaison, les autres boules se déduisant par conjugaison. Dans l'écriture cyclique des permutations on omettra les points fixes.

$$B(I, 1) = \{I; (\alpha\beta), (\alpha\gamma), (\alpha\delta), (\beta\gamma), (\beta\delta), (\gamma\delta)\}.$$

$$B((\alpha\beta), 1) = \{(\alpha\beta); I, (\alpha\gamma), (\alpha\delta), (\beta\gamma), (\beta\delta), (\alpha\beta)(\gamma\delta), (\alpha\beta\gamma), (\alpha\beta\delta), (\alpha\gamma\beta), (\alpha\delta\beta)\}.$$

$$B((\alpha\beta)(\gamma\delta), 1) = \{(\alpha\beta)(\gamma\delta); (\alpha\beta), (\gamma\delta), (\alpha\gamma)(\delta\beta), (\alpha\delta)(\gamma\beta), (\alpha\beta\gamma\delta), (\alpha\beta\delta\gamma), (\alpha\gamma\delta\beta), (\alpha\delta\gamma\beta)\}.$$

$$B((\alpha\beta\gamma), 1) = \{(\alpha\beta\gamma); (\alpha\beta), (\alpha\gamma), (\beta\gamma), (\alpha\beta\delta), (\alpha\gamma\beta), (\alpha\delta\gamma), (\alpha\beta\gamma\delta), (\alpha\beta\delta\gamma), (\alpha\delta\beta\gamma)\}.$$

$$B((\alpha\beta\gamma\delta), 1) = \{(\alpha\beta\gamma\delta); (\alpha\beta)(\gamma\delta), (\alpha\delta)(\beta\gamma), (\alpha\beta\delta), (\alpha\beta\gamma), (\alpha\gamma\delta), (\beta\gamma\delta), (\alpha\beta\delta\gamma), (\alpha\delta\beta\gamma), (\alpha\delta\gamma\beta), (\alpha\gamma\delta\beta)\}.$$

On vérifie que la distance D est graphique pour  $|\Omega| = 3$  et  $|\Omega| = 4$ .

### III. GENERALISATIONS

Pour terminer signalons que ce travail peut être généralisé dans deux directions  
1°) Distance dans l'ensemble des graphes ayant même ensemble  $\Omega$  de sommets et même nombre p d'arêtes.

A chaque partition  $\Delta = \Delta_1, \dots, \Delta_r$  de  $\Omega$  et à chaque graphe G à p arêtes on associe encore le tableau d'échange  $T_{G, \Delta}$  d'entiers  $n_{ij}$  où  $n_{ij}$  est le nombre d'arêtes allant de  $\Delta_i$  dans  $\Delta_j$  et avec les mêmes notations que précédemment  $D(G, G') = n - |\Delta|$  où  $\Delta$  est optimum pour  $(G, G')$ , définit une distance.

Cette construction peut être étendue à l'ensemble des graphes de sommets  $\Omega$  : si  $|G|$  est le nombre d'arêtes de G et si on se donne un ordre, pour chaque partition  $\Delta$ , sur l'ensemble des tableaux d'échange  $T_{G, \Delta}$  en posant

$$T_{G, \Delta} \leq T_{G', \Delta} \iff n_{ij} \leq n'_{ij} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, r\}, \text{ on dira que } (G, G'; \Delta) \text{ est cohérent si, pour } |G| \leq |G'| \text{ on a } T_{G, \Delta} \leq T_{G', \Delta}.$$

On construit alors un *indice de proximité* dans l'ensemble des graphes d'arêtes  $\Omega$  en posant  $I(G, G') = n - |\Delta|$  où  $\Delta$  est optimum pour  $G'$ .

Il n'est pas prouvé que I soit une distance mais on peut en déduire une en prenant le plus court chemin reliant G à G' et passant par des graphes dont l'indice de proximité est, pour deux graphes successifs sur le chemin, égal à 1.

2°) Construction d'un indice de cohérence attaché à un p-uple de graphes (ou de permutations), et de résumés de p-graphes.

Pour tout p-uple de permutations  $(f_1, \dots, f_p)$  de  $\Omega$  (ou de graphes  $(G_1, \dots, G_p)$  de sommets  $\Omega$  classés dans l'ordre  $|G_1| < \dots < |G_p|$ ) on considère comme optimum les partitions minimales  $\Delta$  de  $\Omega$  pour lesquelles on a :

$$T_{f_1, \Delta} = \dots = T_{f_p, \Delta} \quad (T_{G_1, \Delta} \leq \dots \leq T_{G_p, \Delta})$$

et on prend pour indice de cohérence du p-uple,

$$I(f_1, \dots, f_p) = n - |\Delta| \quad (I(G_1, \dots, G_p) = n - |\Delta|) .$$

A chaque partition  $\Delta$  optimum on peut associer un *graphe valué résumé des p graphes*  $G_1, \dots, G_p$  en prenant pour ensemble de sommets, l'ensemble des classes  $\Delta_1, \dots, \Delta_r$  de  $\Delta$  et entre deux sommets  $\Delta_i$  et  $\Delta_j$  on mettra une arête valuée  $n_{ij}$  si  $n_{ij} \neq 0$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] ABRAMSON M., MOSER W.O.J., "Arrays with fixed row and column sums", *Discrete Math.* (1), 1973, pp. 1-14.
- [2] ADALBERT KERBER, *Representations of permutation groups*, New York, Springer Verlag, 1971.
- [3] ANAND H., DUMIR V.C., GUPTA H., "A combinatorial distribution problem", *Duke Math. J.*, 33 (1966), pp. 757-769.
- [4] BARBUT M., MONJARDET B., *Ordre et classification. Algèbre et combinatoire*, Paris, Hachette Université, 1970.
- [5] MAC MAHON P.A., *Combinatory analysis*, Vol. 11, Cambridge, Cambridge University Press, 1916, réédité en 1960.
- [6] MARSHALL Hall Jr., *Combinatorial theory*, Blaisdell Publishing Company, 1967.
- [7] STANLEY R.P., "Linear homogeneous diophantine equations and magic labelings of graphs", *Duke Math. J.*, 40 (1973), pp.607-632.
- [8] WIELANDT H., *Finite permutation groups*, New York, Academic Press, 1968.