MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

E. JACQUET-LAGREZE

Représentation de quasi-ordres et de relations probabilistes transitives sous forme standard et méthodes d'approximation

Mathématiques et sciences humaines, tome 63 (1978), p. 5-24

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1978__63__5_0>

Math. Sci. hum. (*16*[e] année, n°63, *1978*, p.5-24)

REPRESENTATION DE QUASI-ORDRES ET DE RELATIONS PROBABILISTES TRANSITIVES SOUS FORME STANDARD ET METHODES D'APPROXIMATION

E. JACQUET-LAGREZE (*)

0. INTRODUCTION

Le problème de l'approximation d'une relation binaire quelconque par une relation transitive telle qu'un ordre total est devenu un problème classique (cf. Barbut (1966)). Il s'est d'abord posé pour le problème de l'approximation d'un graphe de tournoi obtenu suite à un dépouillement de préférences collectives par la méthode de majorités par paires de Condorcet (nombre de votants impairs) puisqu'il est bien connu que cette procédure ne conduit pas nécessairement à un ordre total.

Plus récemment, des travaux ont été menés pour trouver des algorithmes de recherche de préordres totaux à distance minimum de relations totales non transitives appelées par Ribeill <u>matchs</u> (cf. Heuchenne (1970), Ribeill (1973)).

Dans un autre contexte que celui de l'agrégation de préférences individuelles, Roy (1968) a introduit le concept de relation de surclassement (relation binaire quelconque) dans des méthodes d'agrégation de critères (méthodes ELECTRE par exemple. Il est possible, dans certains cas, d'utiliser directement la relation binaire initiale (si le graphe correspondant est simple à visualiser) ; il est par contre nécessaire dans d'autres cas d'approximer cette relation binaire quelconque par des relations plus faciles à manipuler telles que des préordres totaux. Si les algorithmes retenus dans

(*) LAMSADE, Université Paris IX Dauphine, Place du Maréchal de Lattre de Tassigny, 75775 PARIS CEDEX 16.

la méthode ELECTRE II (Roy, Bertier (1972)) ne correspondent pas au critère de recherche d'un préordre à distance minimum, ils ont l'avantage opérationnel de fournir très rapidement non pas un préordre total mais deux préordres totaux aussi différents que possibles.

Les travaux récents sur les quasi-ordres invitent naturellement à se poser le problème de l'approximation d'une relation binaire par un quasi-ordre. En effet, cette relation reste opérationnelle puisqu'il existe un préordre sous-jacent (Luce (1956)) qui permet donc de classer sur un préordre total tous les objets en apportant une information supplémentaire sur une non différenciation en termes de préférence par exemple de deux classes proches (cf. la fonction seuil d'indifférence). De plus, comme l'a souligné Menuet (1974), si $\mathcal{O}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ représentent respectivement l'ensemble des ordres totaux, préordres totaux, quasi-ordres sur un ensemble de n objets, alors $\mathcal{O} \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$, ce qui montre que, si l'on cherche une relation binaire $O \in \mathcal{O}$, $P \in \mathcal{P}$ ou $Q \in \mathcal{Q}$ à distance minimum d'une relation binaire R quelconque, on aura :

$$\min_{Q \in \mathcal{Q}} d(Q, R) \leq \min_{P \in \mathcal{P}} d(P, R) \leq \min_{O \in \mathcal{O}} d(O, R).$$

L'approximation par un quasi-ordre sera donc en général beaucoup moins coûteuse (au sens d'une distance telle que la différence symétrique) que l'approximation par un préordre total ou a fortiori par un ordre total (*). L'algorithme que nous présentons dans cet article a largement confirmé ces résultats sur des applications pratiques.

Dans une première section, on présente des résultats sur la forme standard d'un quasi-ordre (Jacquet-Lagrèze (1974), (1975), Menuet (1974)). Cette forme permet de reconnaître (de vérifier) rapidement si une relation binaire totale est un quasi-ordre. Dans une seconde section, on présente un algorithme d'approximation d'une relation binaire quelconque par des quasi-ordres. En

(*) Ceci est d'ailleurs illustré par les dénombrements que présentent Chandon, Lemaire et Pouget (1978) puisque si $n = 7$ par exemple, $|\mathcal{O}| = 5\ 040$, $|\mathcal{P}| = 47\ 293$ et $|\mathcal{Q}| = 763\ 099$.

utilisant les travaux de Roberts (1969), on étudie dans une troisième section une extension de ces problèmes au cas de relations probabilistes.

1. FORME STANDARD D'UN QUASI-ORDRE

Toutes les définitions de quasi-ordres sont naturellement équivalentes ; nous retenons celle de Krantz (1967) ainsi que sa présentation.

1.1 Rappels

DEFINITION : Un quasi-ordre sur un ensemble A est une relation binaire $Q = (P, I)$ où P (Préférence) désigne la partie antisymétrique de Q et I (Indifférence) désigne la partie symétrique de Q telle que :

1) Q est totale : $\forall i, j \in A$, on a une seule des 3 situations suivantes : $i\,P\,j$, $j\,P\,i$, $i\,I\,j$.
2) $P\,I\,P \subset P$, c'est-à-dire $i\,P\,j,\ j\,I\,k,\ k\,P\,l \Longrightarrow i\,P\,l$.
3) $P^2 \cap I^2 = \emptyset$, c'est-à-dire $\{i\,P\,j,\ j\,P\,k\}$ et $\{i\,I\,l,\ l\,I\,k\}$ sont incompatibles.

Il en résulte que P est transitive mais I pas nécessairement transitive.

PREORDRE TOTAL SOUS-JACENT ET FONCTION DE VALEUR ASSOCIEE (Luce (1956), Fishburn (1970))

- Si Q est un quasi-ordre, alors il existe une fonction f définie sur A et à valeurs dans R et un seuil constant $\sigma \geq 0$ tels que si $i, j \in A$:

$$\begin{cases} i\,I\,j \iff |f(i) - f(j)| \leq \sigma \\ i\,P\,j \iff f(i) > f(j) + \sigma \end{cases}$$

- La relation de préordre T associée à f ($i\,T\,j \iff f(i) \geq f(j)$) est le préordre sous-jacent ou préordre latent (cf. Guilbaud (1978)) ; σ s'interprète comme un seuil d'indifférence ou de non différenciation. Si $\sigma = 0$, le quasi-ordre est un préordre total. Noter que T est toujours un préordre total.
- Le préordre sous-jacent T associé à f peut également être défini par $i\,T\,j \iff \forall k \in A \quad k\,Q\,i \Longrightarrow k\,Q\,j$ et $j\,Q\,k \Longrightarrow i\,Q\,k$. Il en résulte que si 2 éléments i, j appartiennent à une classe d'équivalence de T ($i\,E\,j \iff i\,T\,j$ et $j\,T\,i$), alors :

$i\ E\ j \iff$ pour tout $k \in A$, $i\ P\ k \iff j\ P\ k$, $k\ P\ i \iff k\ P\ j$ et
$i\ I\ k \iff j\ I\ k$.

1.2 Forme standard d'un quasi-ordre

DEFINITION : Un quasi-ordre est représenté sous forme standard s'il est représenté par sa matrice d'adjacence associée et si la permutation des lignes et des colonnes est compatible (ordre inclus) avec le préordre sous-jacent.

PROPOSITION 1 : Lorsqu'un quasi-ordre est représenté sous forme standard, il existe deux frontières en escalier symétriques par rapport à la diagonale séparant les couples $i\ P\ j$, $i\ I\ j$, $i\ P^{*}\ j$ ($i\ P^{*}\ j \iff j\ P\ i$).

En effet, soit $\{Q_{ij}\}$ la matrice d'adjacence associée à $Q(P, I)$ et convenons de visualiser la matrice d'adjacence au moyen de lettres P, P^{*}, I telles que :

$Q_{ij} = 1$ et $Q_{ji} = 1 \iff i\ I\ j \iff I$ apparaît dans la case (i, j)
$Q_{ij} = 1$ et $Q_{ji} = 0 \iff i\ P\ j \iff P$ apparaît dans la case (i, j)
$Q_{ij} = 0$ et $Q_{ji} = 1 \iff i\,P^{*}\,j \iff P^{*}$ apparaît dans la case (i, j)

Raisonnons au-dessus de la diagonale et mettons en évidence la frontière en escalier séparant I de P. Appelons $1, 2, \ldots, i, \ldots, j, \ldots, n$ les éléments de A représentés dans cet ordre en ligne et en colonne, cet ordre étant compatible avec le préordre sous-jacent.

a) Soit la ligne i ; si $i\ P\ j$, alors $\forall\ j' \geq j$, $i\ P\ j'$; en effet :

- $i\ P\ j \iff f(i) > f(j) + \sigma$
- $j' \geq j \implies f(j') \leq f(j)$ puisque $j' \geq j \implies j\ T\ j'$ (préordre sous-jacent).

On en déduit que $f(i) > f(j) + \sigma \geq f(j') + \sigma$; donc $i\ P\ j'$.

Comme $j' \geq j$ signifie que la colonne j' est à droite de la colonne j (permutation compatible avec le préordre sous-jacent T), alors, dès qu'on rencontre une case P dans la ligne i, toutes les cases à droite de cette case ne contiennent que des P. En appliquant ce résultat à la première case P rencontrée en partant de la diagonale, on montre qu'une ligne est, à partir de la diagonale, de la forme :

$$\backslash\ I\ I \ldots I\ P \ldots P.$$

b) Soit la colonne j ; si $i \, P \, j$, alors $\forall \, i' \leq i, \; i' \, P \, j$

$i \, P \, j \iff f(i) \quad f(j) + \sigma$
$i' \leq i \implies f(i') \geq f(i)$ puisque $i' \leq i \implies i' \, T \, i$.

On en déduit que $f(i') \geq f(i) > f(j) + \sigma$; donc $i' \, P \, j$.

Comme $i' \leq i$ signifie que la ligne i' est au-dessus de la ligne i, alors, dès qu'on rencontre une case P dans une colonne j, toutes les cases au-dessus de cette case ne contiennent que des P.

- a) et b) montrent que la frontière au-dessus de la diagonale prend bien une forme en escalier ;
- I étant symétrique, la frontière de séparation de P^* et I est une frontière symétrique de la frontière de séparation de I et P.

DEFINITION : Soit $\{P_{ij}\}$ la matrice d'adjacence associée à P ; posons $d_i^+ = \sum_j P_{ij}$, $d_i^- = \sum_j P_{ji}$ et $\delta_i = d_i^+ - d_i^-$. Appelons δ_i le score de i.

De même, si I_{ij} est la matrice d'adjacence associée à I, on peut écrire : $Q_{ij} = P_{ij} + I_{ij}$ pour tout i et j et le score δ_i se calcule également à partir de Q_{ij} :

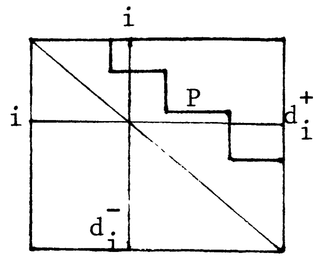
$$\boxed{\delta_i = \sum_j Q_{ij} - \sum_j Q_{ji}}$$

En effet : $\sum_j Q_{ij} - \sum_j Q_{ji} = \sum_j (Q_{ij} + I_{ij} - P_{ji} - I_{ji})$; or $I_{ij} = I_{ji}$ (I symétrique) ; donc :

$$\sum_j Q_{ij} - \sum_j Q_{ji} = \sum_j P_{ij} - \sum_j P_{ji} = d_i^+ - d_i^-.$$

PROPOSITION 2 : Dans la représentation sous forme standard d'un quasi-ordre, le score δ_i est une fonction non croissante de i et le préordre associé aux scores δ_i est le préordre sous-jacent au quasi-ordre.

Si le quasi-ordre est sous forme standard, la frontière séparant P de I est en escalier ; il en résulte immédiatement que :



$d_i^+ = \sum_j P_{ij}$ est une fonction non croissante de i

$d_i^- = \sum_j P_{ji}$ est une fonction non décroissante de i

$\delta_i = d_i^+ - d_i^-$ est une fonction non croissante de i

Montrons que le préordre associé aux scores δ_i est le préordre sous-jacent T.

1) Si $\delta_i = \delta_j$, alors $i\ E\ j$. En effet :

$$\delta_i = \delta_j \iff d_i^+ - d_i^- = d_j^+ - d_j^- \iff d_i^+ - d_j^+ = d_i^- - d_j^-.$$

Compte tenu des propriétés de monotonicité de d^+ et d^-, on en déduit que si i est à gauche de j $(i < j)$, alors nécessairement $d_i^+ - d_j^+ \geq 0$ et $d_i^- - d_j^- \leq 0$, d'où $d_i^+ = d_j^+$ et $d_i^- = d_j^-$.

$\delta_i = \delta_j$ implique donc que les lignes i et j d'une part, les colonnes i et j d'autre part ont le même nombre de cases P. Comme la frontière est en escalier, les deux lignes i et j et les deux colonnes i et j sont identiques, ce qui montre que $i\ E\ j$ (cf. § 1.1).

2) Si $\delta_i > \delta_j$, alors $d_i^+ - d_j^+ > d_i^- - d_j^-$ et seule l'hypothèse $i < j$ est compatible avec cette hypothèse et donc $i\ T\ j$.

TEST POUR RECONNAITRE SI UNE RELATION BINAIRE EST UN QUASI-ORDRE : Il résulte de la proposition 2. On calcule les scores δ_i, $i = 1, n$ puis on trie lignes et colonnes de la matrice d'incidence de Q ou de P suivant les scores décroissants. Enfin on vérifie que la frontière est en escalier.

EXEMPLE

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	d^+	d^-	δ
1		1			1				1		3	2	1
2					1						1	6	-5
3	1	1		1	1			1	1	1	7	0	7
4		1			1				1		3	2	1
5											0	8	8
6	1	1		1	1			1	1	1	7	0	7
7		1			1				1	1	4	0	4
8		1			1				1		3	2	1
9											0	7	-7
10					1				1		2	3	-1
d^-	2	6	0	2	8	0	0	2	7	3			

P : partie antisymétrique de Q

	3	6	7	1	8	4	10	2	9	5	d^+	d^-	δ
3				1	1	1	1	1	1	1	7	0	7
6				1	1	1	1	1	1	1	7	0	7
7							1	1	1	1	4	0	4
1								1	1	1	3	2	1
8								1	1	1	3	2	1
4								1	1	1	2	3	1
10									1	1	2	3	-1
2										1	1	6	-5
9											0	7	-7
5											0	8	-8
d^-	0	0	0	2	2	2	3	6	7	8			

P sous forme standard

La frontière est bien en escalier ; donc P est bien la partie antisymétrique d'un quasi-ordre. Le préordre sous-jacent contient 7 classes d'équivalence. On vérifie que les lignes et colonnes sont identiques pour deux éléments d'une même classe d'équivalence.

REMARQUES

a) On retrouve les classes d'équivalence du préordre sous-jacent en prolongeant les marches de la frontière en escalier jusqu'à la diagonale (cf. Menuet (1974)).
b) Un préordre total est un quasi-ordre pour lequel les marches d'escalier viennent s'appuyer sur la diagonale (la relation I est alors transitive).
c) Un ordre total est un quasi-ordre qui comprend n marches s'appuyant sur la diagonale.

2. UNE METHODE D'APPROXIMATION D'UNE RELATION BINAIRE PAR DES QUASI-ORDRES

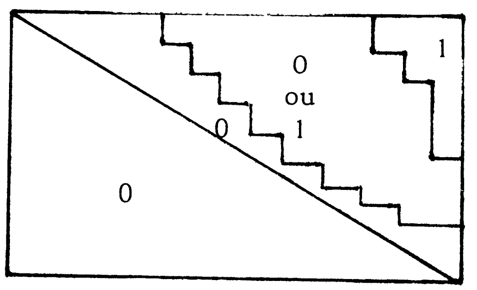
On présente ici une méthode d'approximation conduisant à trois quasi-ordres. Le premier est un quasi-ordre plus discriminant que la relation initiale (contenant plus de couples P), le second un quasi-ordre moins discriminant et le troisième un quasi-ordre obtenu à partir d'une heuristique de moindre coût au sens de la différence symétrique. Les deux premières méthodes sont très performantes du point de vue temps de calcul. Dans l'ensemble, les trois méthodes ne sont valables que si la relation initiale n'est pas trop distante des quasi-ordres obtenus et si elle contient suffisamment de couples P et I. Des applications sur des données issues de problèmes concrets ont donné des résultats tout à fait performants.

2.1 Présentation de la méthode

On utilise les résultats établis ci-dessus et on effectue les étapes 1 à 5 ci-dessous.

1 A partir de la relation binaire R = (P, I), considérer la matrice d'adjacence associée à P et calculer les scores $\delta_i = d_i^+ - d_i^-$.
2 Trier les lignes et colonnes de P selon les δ_i décroissants.
3 Lorsqu'il existe des circuits dans P, alors il existe nécessairement des 1 sous la diagonale après 2. On supprime alors tous les circuits en supprimant ces 1 sous la diagonale (on supprime donc quelques arcs P).
4 P est sans circuit ; on établit sa fermeture transitive de façon à avoir $P\,P \subseteq P$.
5 On recalcule les nouveaux scores δ_i et on trie à nouveau P suivant δ_i décroissant.

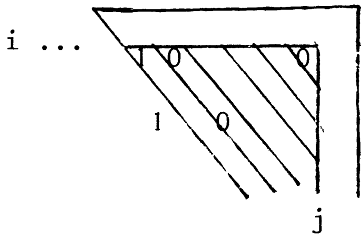
Après 5, la matrice d'adjacence est de la forme suivante :



Elle possède une forte densité de 1 en haut à droite, des 0 sous la diagonale, une zone de 0 au-dessus de la diagonale et une zone d'indétermination où l'on a un mélange de 0 et de 1. La zone d'indétermination est obtenus en plaçant deux frontières en escalier. Ces deux frontières correspondent aux deux premiers quasi-ordres :

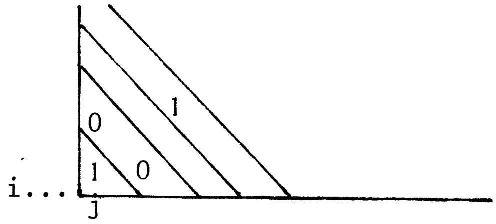
- le quasi-ordre discriminant est obtenu en prenant la frontière inférieure et consiste à remplir de 1 (couples P) la zone d'indétermination ;
- le quasi-ordre non discriminant est obtenu en prenant la frontière supérieure et consiste à remplir de 0 (couples I) la zone d'indétermination ;
- le quasi-ordre intermédiaire consiste à trouver, selon une heuristique définie en 6 et 7 ci-dessous, une frontière intermédiaire entre les deux frontières précédentes.

(6) $\forall$ i, j tel que $P_{ij} = 0$ on calcule le nombre $S_o(i, j)$ de 1 mal placés qu'il "couvre" :



$$S_o(i, j) = \sum_{i' \geq i} \sum_{j' \leq j} P_{ij}$$

$\forall$ i, j tel que $P_{ij} = 1$, on calcule le nombre $S_1(i, j)$ de 0 mal placés qu'il "couvre" :



$$S_1(i, j) = \sum_{i' \leq i} \sum_{j' \geq j} (1 - P_{ij})$$

Soit alors (i_o, j_o) le couple tel que $S_o\ (i, j)$ soit maximum et (i_1, j_1) le couple tel que $S_1(i, j)$ soit maximum.

Si $S_o(i_o, j_o) \geq S_1(i_1, j_1)$, on ajoute l'arc (i_o, j_o) : $P_{i_o, j_o} = 1$.
Si $S_o(i_o, j_o) < S_1(i_1, j_1)$, on supprime l'arc (i_1, j_1) : $P_{i_1, j_1} = 0$.

(7) Après suppression (ou adjonction) d'un arc, on calcule les nouveaux scores δ_i, on trie P par ordre des δ_i décroissants et on recommence (6).

La procédure s'arrête lorsqu'on obtient pour P la partie antisymétrique d'un quasi-ordre. Dans ce cas, en (6), on trouve :

$$S_o(i, j) = 0 \ \forall\, i, j \quad \text{et} \quad S_1(i, j) = 0 \ \forall\, (i, j).$$

MESURE DE L'APPROXIMATION : Au lieu de calculer une distance entre R et Q telle que la différence symétrique, on calcule le tableau du nombre de transformations des couples. Si on désigne par J les paires d'incomparabilité dans R, ce tableau se présente sous la forme suivante :

R \ Q	P	I
*P		
P		
I		
J		

Dans la 1ère colonne, on a :

$({}^{*}P, P)$: nombre de préférences strictes inversées.
(P, P) : nombre de préférences strictes conservées.
(I, P) : nombre d'indifférences transformées en préférences strictes.
(J, P) : nombre d'incomparabilités transformées en préférences strictes.

Dans la seconde colonne, on a :

$({}^{*}P, I) + (P, I)$: nombre de préférences strictes transformées en indifférence.
(I, I) : nombre d'indifférences conservées.
(J, I) : nombre d'incomparabilités transformées en indifférence.

L'ajustement au sens de la différence symétrique est d'autant meilleur que (P, P) et (I, I) sont grands devant les autres.

Définissons comme coefficient d'approximation le rapport

$$a = \frac{(P, P) + (I, I)}{n(n-1)/2}.$$

Définissons le rapport de discrimination du quasi-ordre Q par :

$$d = \frac{(P)}{n(n-1)/2}$$ où (P) est le nombre de préférences strictes de Q.

2.2 Exemples d'utilisation de la méthode

On a repris les données du problème de classement de supports de presse (cf. ROY et BERTIER (1972)).

Une méthode d'agrégation de critères a permis d'établir une relation binaire non transitive, non totale.

	E	JF	MC	MF	JM	MP	MT	FA	FP	MAT	EM	EX	I	ND
E	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
JF	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
MC	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
MF	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
JM	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1
MP	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
MT	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1
FA	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
FP	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
MAT	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
EM	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
EX	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
I	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ND	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
δ_i	10	8	8	5	5	1	1	0	-1	-6	-6	-7	-8	-10

Tableau 1. Relation binaire à l'issue de l'étape 5

Aucun circuit n'existait dans P ; un seul arc a été ajouté dans la fermeture transitive de P : l'arc FP, ND.

La zone d'indétermination est celle comprise entre les deux frontières en escalier ; chacune d'elle délimite la limite de la préférence stricte dans les deux quasi-ordres emboîtés construits.

Le quasi-ordre discriminant (frontière proche de la diagonale) est le suivant (on a calculé les nouveaux scores δ_i) :

Score δ_i	Classe du préordre sous-jacent	Média	Médias extrêmes de l'intervalle d'indifférence	
10	1	E	E	MF
9	2	JF	E	JM
8	3	MC,MF	E	MP
7	4	JM	JF	MP
3	5	MP	MC	FP
0	6	MT	MP	FP
-2	7	FA,FP	MP	EM
-6	8	MAT,EM	FA	I
-8	9	EX	MAT	I
-9	10	I	MAT	ND
-12	11	ND	I	ND

Pour ce quasi-ordre, le tableau des transformations des arcs est :

S \ Q	P	I	S
*P	0	0	0
P	49	0	49
I	6	24	30
J	7	5	12
Q	62	29	91

n = 14 médias, $n(n-1)/2 = 91$ paires dans R et dans Q.

- Les 49 préférences P de R ont été conservées. Sur les 30 indifférences I de R, 6 sont devenues des préférences P. Les 12 incomparabilités J de R se sont partagées en 7 préférences et 5 indifférences.

Le <u>rapport de discrimination</u> du quasi-ordre est :

$$d = \frac{(P)}{n(n-1)/2} \qquad d = \frac{62}{91} - .68$$

Celui de la relation R initiale est $\frac{49}{91} = .54$

- Le coefficient d'approximation est :

$$a = \frac{(P,P) + (I,I)}{n(n-1)/2} = \frac{49 + 24}{91} = \frac{73}{91} = .80$$

Sans donner ici les deux autres quasi-ordres obtenus, donnons simplement leurs tableaux de transformation des arcs.

Quasi-ordre moins discriminant

S \ Q	P	I	S
*P	0	0	0
P	41	8	49
I	0	30	30
J	1	11	12
Q	42	49	91

Quasi-ordre intermédiaire

S \ Q	P	I	S
*P	0	0	0
P	46	3	49
I	0	30	30
J	2	10	12
Q	48	43	91

rapport de discrimination

$$d = \frac{42}{91} = .46$$

coefficient d'approximation

$$a = \frac{41 + 30}{91} = \frac{71}{91} = .78$$

rapport de discrimination

$$d = \frac{48}{91} = .53$$

coefficient d'approximation

$$a = \frac{46 + 30}{91} = \frac{76}{91} = .84$$

Si on ne tient pas compte de l'incomparabilité, l'ajustement est excellent puisque, sur les 79 paires de la relation de surclassement pour lesquelles on a soit P soit I (comparabilité), seules respectivement 6,8 et 3 d'entre elles ont été modifiées dans chacune des trois approximations.

- A titre de comparaison, on a déterminé à partir de la relation de surclassement le préordre descendant tel qu'il est construit dans ELECTRE II. Pour ce préordre R, le tableau de transformation des arcs fut le suivant :

S \ R	P	I	S
*P	0	0	0
P	49	0	49
I	15	15	30
S	8	4	12
	72	19	91

$d = \frac{72}{91} = .79$, ce qui est trop élevé si on considère le rapport de discrimination initial de $R = \frac{49}{91} = .54$

$$a = \frac{49 + 15}{91} = \frac{64}{91} = .70$$

On constate que la recherche d'un préordre transforme davantage la relation binaire que la recherche d'un quasi-ordre. Le rapport de discrimination est trop élevé, le coefficient d'approximation est moins bon.

3. APPROXIMATION DE RELATIONS PROBABILISTES

On se propose dans cette section d'utiliser le théorème de Roberts ainsi qu'une propriété de monotonicité pour proposer une méthode d'approximation.

3.1 Définitions et théorème de Roberts

- Une relation binaire valuée $\{a_{ij}\}$ définie sur un ensemble A $(i, j \in A)$ est probabiliste si :

. $a_{ij} \in [0, 1]$
. $a_{ij} + a_{ji} = 1 \quad \forall i, j \in A.$

- Une relation probabiliste est transitive (fortement) si :

$a_{ik} \geq 1/2$ et $a_{kj} \geq 1/2 \Longrightarrow a_{ij} \geq \max(a_{ik}, a_{kj})$.

- Préordre sous-jacent à une relation probabiliste :

$i \; T \; j \iff \forall k \in A \quad a_{ik} \geq a_{jk}$.

- Famille de relations binaires R associée.

Soit $R_\alpha = (P_\alpha, I_\alpha)$ la relation binaire associée à $\{a_{ij}\}$ selon le principe d'une procédure à seuil $(1/2 \leq \alpha < 1)$, cf. Jacquet-Lagrèze (1973).

$i \; P_\alpha \; j \iff a_{ij} > \alpha$
$i \; I_\alpha \; j \iff 1 - \alpha \leq a_{ij} \leq \alpha$

En général, la relation R est un match (relation totale).

THEOREME DE ROBERTS (1971) : Si $\{a_{ij}\}$ est (fortement transitive, alors R_α est un quasi-ordre. En faisant varier α de 1/2 à 1, on obtient une famille de quasi-ordres emboîtés ayant même préordre sous-jacent que le préordre sous-jacent à la relation probabiliste.

3.2 Propriétés de monotonicité et forme standard

DEFINITION : La relation probabiliste transitive est représentée sous forme standard si la matrice a_{ij} est représentée en choisissant une permutation des lignes et des colonnes compatible avec le préordre sous-jacent.

PROPOSITION 3 : Lorsqu'une relation probabiliste transitive est représentée sous forme standard, a_{ij} est une fonction non décroissante de j et non croissante de i.

Soit 1, 2, ..., i, ..., k, ..., j, ..., n la permutation correspondant à la forme standard et intéressons-nous à la moitié supérieure de la matrice. Si $i \leq k \leq j$, alors $a_{ik} \geq 1/2$ et $a_{kj} \geq 1/2$ (préordre sous-jacent compatible avec la permutation).

D'après la transitivité, on a $a_{ij} \geq \max(a_{ik}, a_{kj})$, d'où :
$i \leq k \leq j \Longrightarrow a_{ij} \geq a_{ik}$ et a_{ij} est une fonction non décroissante de j.
$i \leq k \leq j \Longrightarrow a_{ij} \geq a_{kj}$ et a_{ij} est une fonction non croissante de i.

Comme $a_{ij} + a_{ji} = 1$ pour tout i et j, la proposition est vraie pour la moitié inférieure de la matrice.

En termes imagés, sous forme standard, la matrice a_{ij} se présente comme une "surface" monotone non décroissante avec des valeurs inférieures à 1/2 sous la diagonale, égales à 1/2 sur la diagonale, supérieures à 1/2 au-dessus de la diagonale.

En termes imagés toujours, le théorème de Roberts consiste à couper cette surface par un plan de hauteur α définissant ainsi une courbe de niveau qui n'est autre qu'une frontière en escalier caractéristique d'un quasi-ordre.

DEFINITION : Appelons <u>score de i</u> la quantité δ_i définie par :

$$\delta_i = \sum_j a_{ij} - \sum_j a_{ji}.$$

Si on pose $\alpha_i = \sum_j a_{ij}$ et $\beta_i = \sum_j a_{ji}$, alors $\delta_i = \alpha_i - \beta_i$. De plus, comme $a_{ji} = 1 - a_{ij}$, $\beta_i = n - \alpha_i$ et $\delta_i = 2\,\alpha_i - n = n - 2\,\beta_i$.

PROPOSITION 4 : <u>Dans la représentation sous forme standard d'une relation probabiliste transitive, le préordre associé aux scores δ_i est le préordre sous-jacent</u>.

La relation est sous forme standard ; donc, si $i < j$ dans la permutation choisie, alors $i\ T\ j$ (permutation compatible avec T). Comme $i\ T\ j \Longleftrightarrow \forall\, k,\ a_{ik} \geq a_{jk}$, on en déduit :

$$i\ T\ j \Longrightarrow \sum_k a_{ik} \geq \sum_k a_{jk}, \text{ soit } \alpha_i \geq \alpha_j \Longleftrightarrow \delta_i \geq \delta_j.$$

Si $i \; E \; j$ ($i \; T \; j$ et $j \; T \; i$), alors $\forall \; k \quad a_{ik} = a_{ji}$ et $\delta_i = \delta_j$.

TEST POUR RECONNAITRE QU'UNE RELATION PROBABILISTE EST TRANSITIVE : Il résulte des propositions 3 et 4. On calcule les n scores δ_i ou, plus simplement, les n scores α_i puis on trie les lignes et colonnes de la matrice $\{a_{ij}\}$ suivant les scores décroissants. Enfin on vérifie que la propriété de monotonicité est satisfaite (proposition 3).

3.3 Une méthode d'approximation

Elle consiste à effectuer les étapes 1 à 5 ci-dessous.

1 Calculer les scores δ_i ou α_i et adopter le préordre obtenu à partir de ces scores comme préordre sous-jacent.

2 Soit $(1, 2, \ldots, m)$ une permutation des lignes et des colonnes compatible avec le préordre des scores δ_i. On fera la transformation suivante :

$$\text{Si } A_{ij} < 1/2 \text{ pour } i < j, \text{ alors } T_{ij} = 1/2.$$

3 Construction d'une relation probabiliste transitive discriminante T^1. On part de la diagonale et on comble les trous de la surface "en remontant vers T_{1n}".

4 Construction d'une relation probabiliste transitive moins discriminante T_2. On part du sommet T_{1n} et on "supprime les bosses de la surface" en descendant vers la diagonale.

5 Construction d'une relation probabiliste moyenne T' :

$$T'_{ij} = (T^1_{ij} + T^2_{ij})/2 \quad \forall \; ij.$$

La relation T' est bien transitive car T_1 et T_2 sont établies à partir d'une même permutation $1, 2, \ldots, i, \ldots, k, \ldots, j, \ldots, n$. Donc $\forall \; i \leq k \leq j$, on a :

$$\begin{cases} T^1_{ik} \geq \frac{1}{2} \quad T^1_{kj} \geq \frac{1}{2} \Longrightarrow T^1_{ij} \geq \max(T^1_{ik}, T^1_{kj}) & \text{(transitivité de } T_1\text{)} \\ T^2_{ik} \geq \frac{1}{2} \quad T^2_{kj} \geq \frac{1}{2} \Longrightarrow T^2_{ij} \geq \max(T^2_{ij}, T^2_{kj}) & \text{(transitivité de } T_2\text{)} \end{cases}$$

On en déduit $T'_{ik} \geq 1/2$, $T'_{kj} \geq 1/2$ et

$T^1_{ij} \geq T^1_{ik}$, $T^1_{ij} \geq T^1_{kj}$, $T^2_{ij} \geq T^2_{ik}$, $T^2_{ij} \geq T^2_{kj}$, d'où
$\frac{1}{2}(T^1_{ij} + T^2_{ij}) \geq \frac{1}{2}(T^1_{ik} + T^2_{ik})$ et $\frac{1}{2}(T^1_{ij} + T^2_{ij}) \geq \frac{1}{2}(T^1_{kj} + T^2_{kj})$;
donc $T'_{ij} \geq \max(T'_{ik}, T'_{kj})$.

Exemple : Soit la relation probabiliste suivante obtenue en agrégeant des graphes de tournois (comparaison par paires).

	3	1	2	4	α_i
3	.50	.58	.32	.66	1.56
1	.42	.50	.60	.54	1.56
2	.68	.40	.50	.47	1.55
4	.34	.46	.53	.50	1.33

2

	3	1	2	4
3	.50	.58	.50	.66
1	.42	.50	.60	.54
2	.50	.40	.60	.50
4	.34	.46	.50	.50

3

4

T^1

	3	1	2	4
3	.50	.58	.60	.66
1	.42	.50	.60	.60
2	.40	.40	.50	.50
4	.34	.40	.50	.50

T^2

	3	1	2	4
3	.50	.50	.50	.66
1	.50	.50	.50	.54
2	.50	.50	.50	.50
4	.34	.46	.50	.50

5

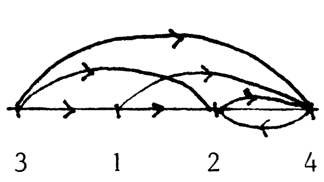
T'

	3	1	2	4
3	.50	.54	.55	.66
1	.46	.50	.55	.57
2	.45	.45	.50	.50
4	.34	.43	.50	.50

Pour les trois relations transitives T^1, T^2, T' on a :

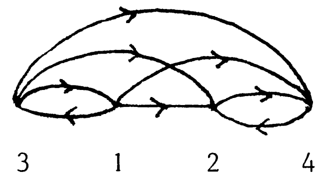
$d(A, T^1) = 2\ (.28 + .06 + .03) = .74$
$d(A, T^2) = 2\ (.08 + .18 + .10 + .03) = .78$
$d(A, T') = 2\ (.04 + .23 + .05 + .03 + .03) = .76$

APPROXIMATION PAR DES QUASI-ORDRES : En appliquant le théorème de Roberts à l'une des trois relations T^1, T^2 ou T', on définit une famille de quasi-ordres emboîtés. En prenant la relation T', on obtient la famille de quasi-ordres suivante ayant tous pour préordre sous-jacent l'ordre 3 1 2 4.



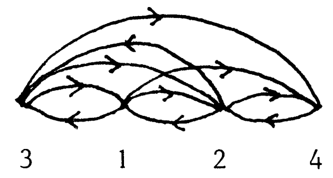
$.50 \leq \alpha < .54$

préordre 3 1 (2 4)



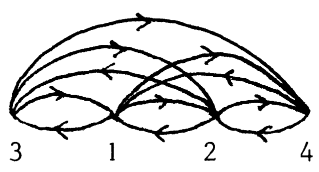
$.54 \leq \alpha < .55$

préordre (3 1) (2 4)



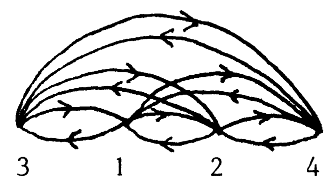
$.55 \leq \alpha < .57$

quasi-ordre



$.57 \leq \alpha < .66$

quasi-ordre



$.66 \leq \alpha$

préordre (3 1 2 4)

CONCLUSION

On espère avoir montré au cours de cet article que l'utilisation des quasi-ordres est particulièrement intéressante dans des problèmes d'approximation de relations binaires quelconques. L'avantage des méthodes présentées réside essentiellement dans une simplicité d'emploi et des temps de calculs sur machine très rapides. Il reste néanmoins à poursuivre des recherches en vue de diminuer certains aspects arbitraires des méthodes telles qu'elles sont exposées ici. En effet souvent, lorsque plusieurs choix sont possibles dans les algorithmes présentés (cas de valeurs ex-aequo dans des testes), seule une branche de l'arbre des possibilités est exploitée. Il devrait être possible d'étendre ces algorithmes à l'exploration de l'arbre entier des possibilités (sous réserve que la combinatoire ne soit pas trop élevée). D'autres algorithmes basés sur la recherche de quasi-ordres à distance minimum pourraient être étudiés. D'un point de vue opérationnel, il nous semblerait utile de disposer d'algorithmes mettant mieux en évidence les incomparabilités comme on le fait dans la méthode ELECTRE II.

BIBLIOGRAPHIE

BARBUT M., "Note sur les ordres totaux à distance minimum d'une relation binaire donnée", Mathématiques et Sciences Humaines, n° 17 (1966).

BERMOND J.C., "Ordres à distance minimum d'un tournoi et graphes partiels sans circuits maximaux", Mathématiques et Sciences Humaines, n° 37 (1972).

BERTIER P., ROY B., "La méthode ELECTRE II : une application au média-planning", Sixième Conférence Internationale de Recherche Opérationnelle, Dublin, août 1972, M. Ross Editor, OR 72, New York, North-Holland, 1973.

CHANDON J.L., LEMAIRE J., POUGET J., "Dénombrement de quasi-ordres sur un ensemble fini", Mathématiques et Sciences Humaines, n° 61 (1978).

FISHBURN P.C., Utility theory for decision making, John Wiley and Sons (1970).

GUILBAUD G.Th., "Continu expérimental et continu mathématique", Mathématiques et Sciences Humaines, n° 61 (1978).

HEUCHENNE C., "Un algorithme général pour trouver un sous-ensemble d'un certain type à distance minimum d'une partie donnée", Mathématiques et Sciences Humaines, n° 30 (1970).

JACQUET-LAGREZE E., "Le problème de l'agrégation des préférences : une classe de procédures à seuil", Mathématiques et Sciences Humaines, n° 43 (1973).

JACQUET-LAGREZE E., "How we can use the notion of semi-orders to build outranking relations in multicriteria decision making", in Utility, Subjective Probability and Human Decision Making, ed. by C. Vlek and D. Wendt, New York, D. Reidel, 1975, Revue METRA, Vol. XIII, n° 1 (1974).

JACQUET-LAGREZE E., La modélisation des préférences ; préordres, quasi-ordres et relations floues, Thèse de 3ème Cycle Université Paris V, 1975.

KRANTZ D.H., "Extensive measurement in semi-orders", Philosophical Sciences, n° 34 (1967).

LUCE R.D., "Semi-orders and a theory of utility discrimination", *Econometrica*, Vol. 24 (1956).

MENUET J., Quasi-ordres et modélisation des préférences, SEMA, Direction Scientifique, Note de Travail n° 197 (1974).

RIBEILL G., "Equilibres, équivalences, ordres et préordres à distance minimum d'un graphe complet donné", *Mathématiques et Sciences Humaines*, n° 43 (1973).

ROBERTS F.S., "Homogeneous families of semi-orders and the theory of probabilistic consistency", *Journal of Mathematical Psychology* (1971).

ROY B., "Classement et choix en présence de points de vue multiples (la méthode ELECTRE)", *RIRO*, n° 8 (1968).