MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

MARC DEROO

Analyse sensorielle quasi-ordres et représentations simpliciales

Mathématiques et sciences humaines, tome 63 (1978), p. 25-49
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1978__63__25_0>

Math. Sci. hum. (*16*[e] année, n°63, *1978*, p.25-49)

ANALYSE SENSORIELLE
QUASI-ORDRES
ET
REPRESENTATIONS SIMPLICIALES *

Marc DEROO * *

I - INTRODUCTION

Dans cet article nous décrivons l'application de méthodes d'analyse de données ordinales dans la tentative de résolution d'un problème d'analyse sensorielle de denrées alimentaires.

Très brièvement, il s'agit de déterminer quelques systèmes de culture permettant d'obtenir des produits satisfaisant le goût du consommateur lorsqu'il emploie l'un d'entre eux dans une préparation culinaire déterminée. Plus que d'obtenir un classement des différents systèmes de culture, il nous intéressera de déterminer les facteurs culturaux qui semblent jouer un rôle prépondérant dans la formation de la qualité gustative du produit.

* L'étude dont il est question dans cet article est réalisée conjointement par l'Institut Technique de la Pomme de Terre et l'Association de Coordination Technique Agricole ; elle bénéficie d'une aide de la D.G.R.S.T. dans le cadre de l'action concertée : Technologie alimentaire et agricole.

* * A.C.T.A. (Association de Coordination Technique Agricole)
149, rue de Bercy - 75579 PARIS CEDEX 12

II - PLAN SUIVI DANS CET ARTICLE

Après avoir formulé de manière plus précise le problème posé et défini le protocole d'expérimentation choisi pour réaliser les dégustations (plan factoriel avec confusion des interactions), on décrit dans une seconde partie, la méthode utilisée pour obtenir un classement des objets (recherche d'un préordre par l'intermédiaire du quasi ordre le moins discriminant).
A ce propos, nous insistons tout particulièrement sur les hypothèses implicites que l'on est contraint d'émettre sur le comportement des juges (problèmes de transitivité, notamment).

Dans une troisième partie, nous tentons de montrer comment une représentation du classement obtenu dans les cases d'un diagramme de simplexe, permet de tirer rapidement des conclusions quant à la présence ou à l'absence probable d'un effet significatif des différents facteurs culturaux (effets principaux et interactions du premier ordre); un test non paramétrique est alors proposé - le "test des arcs -: il permet de calculer la probabilité pour que l'effet, éventuellement constaté au cours d'un expérience particulière, ne soit en fait qu'une simple manifestation du hasard.

Enfin, et en conclusion, nous dressons une liste incomplète des problèmes, tant théoriques que pratiques, qui restent posés à l'issue de cette première expérience, espérant ainsi inciter le lecteur à proposer d'autres solutions (ou éléments de solution) à ce problème qui n'est, on le verra, que partiellement résolu.

III - LE PROBLEME, LE PROTOCOLE D'EXPERIMENTATION

3.1 Situation du problème

La qualité gustative d'un produit agricole dépend, entre autres, des techniques culturales qui ont été adoptées. Or les systèmes permettant d'obtenir les meilleurs rendements ne sont pas forcément ceux qui assurent la plus grande satisfaction du consommateur.

Les facteurs[1] du rendement sont généralement connus, ceux présidant à la qualité, le sont moins.

De plus, si les méthodes d'analyse des variations du rendement (variable quantitative continue) sous l'effet des différents facteurs, ont, depuis R.A. Fisher, donné lieu à la publication de maintes études, en revanche les contributions à l'étude des modifications des classements sont plus récentes et, de ce fait, moins nombreuses ou/et moins connues ; enfin, ces dernières traitant des problèmes de classement en général, ne sont pas toujours directement applicables aux problèmes d'analyse sensorielle où des contraintes matérielles liées à la nature même des produits étudiés (lassitude des juges,difficultés de conservation,...) imposent des protocoles de dégustation particuliers.

3.2 Un protocole de dégustation

3.2.1 Les données

Les produits à classer sont au nombre de 16 : v = 16.
Ils proviennent des 2^4 combinaisons possibles de 4 facteurs à deux niveaux.

Au facteur **X** est associé le couple de modalités (x,X) ou x représente le niveau bas, X, le niveau haut. Un produit peut donc être étiqueté en fonction de la combinaison de modalités qu'il représente : a B c D par exemple. Par convention, nous ne ferons figurer dans l'étiquette que les symboles des niveaux hauts

	a B c D :	BD
avec de plus	a b c d :	$\emptyset$

Remarquons d'emblée qu'avec ce système de dégustation, on peut représenter ces $v = 2^n$ objets dans un diagramme de simplexe.(Figure 1)

[1] Facteur est pris dans le sens très courant utilisé dans la théorie des plans d'expériences (Facteur : engrais, densité de semis, variété,...). Plus formellement c'est une variable qualitative nominale qui peut présenter plusieurs modalités (ou niveaux).
Dans ce qui suit, on ne considère que des facteurs à deux niveaux.

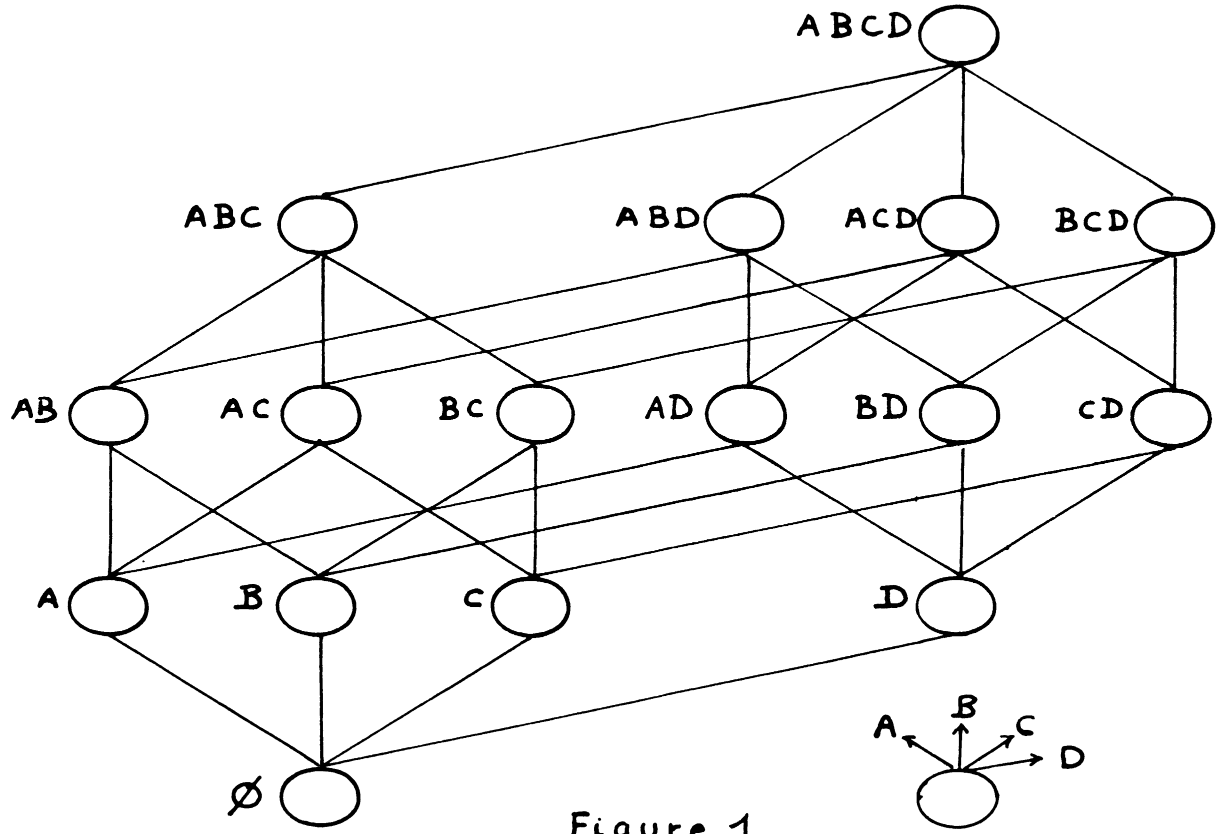


Figure 1.

Dans un tel schéma, le passage, du bas vers le haut de la page, d'une case à l'une des cases suivantes, représente le passage du niveau bas au niveau haut de l'un des facteurs.

Par ailleurs, on ne dispose que de quatre juges ; chaque juge peut, au plus, comparer simultanément quatre produits au cours d'une séance et, dans la même journée, il est possible de réaliser deux séances. Enfin, pour des raisons de dégradations dues à une conservation prolongée, les produits doivent être dégustés au cours de la même semaine.

3.2.2 Les principes

Ces dernières contraintes interdisent qu'un même juge effectue les 120 comparaisons par paires qu'il est théoriquement possible de réaliser...
On songe donc à un dispositif en blocs incomplets équilibrés (Cf. [3]); il en existe tenant compte de ces différentes données numériques : le plan 10.4 proposé par Cochran et Cox [2] donne la possibilité d'examiner chacune des 120 paires en 5 séances avec quatre juges goûtant quatre produits.
Au cours d'une semaine, chaque paire pourrait donc être testée deux fois.

Mais quel est l'intérêt si l'on souhaite surtout mettre en évidence l'influence des différents facteurs pris isolément (effets principaux) ou pris deux à deux (interaction du premier ordre), de comparer des paires comme, par exemple, ∅ et A B C D ?

Il est bien plus intéressant, quitte à négliger cette comparaison, de disposer de plusieurs jugements sur des paires du type (∅, A) ou (B C D, A B C D) afin de mieux déterminer l'effet éventuel du facteur **a** . On cherche donc un dispositif favorisant la comparaison de certaines paires au détriment d'autres, jugées moins intéressantes.

Les plans d'expérience en "confounding partiel" apportent une solution possible.

3.2.3 Un plan en confounding partiel

Partant d'un plan factoriel où 2^p produits doivent être comparés on restreint le champ des comparaisons à l'étude de 2^k blocs indépendants contenant chacun 2^{p-k} produits.

Les seules comparaisons réalisées sont celles que l'on peut faire à l'intérieur de chaque bloc.

Réduisant le nombre de comparaisons effectuées, on réduit ainsi le nombre d'analyses possibles : certains effets ou certaines interactions ne peuvent être étudiés ; on dit que ces effets ou interactions sont confondus avec "l'effet bloc". On montre que dans le cas d'un découpage en 2^k blocs, il y a $(2^k - 1)$ effets ou interactions confondus.

Dans le cas présent, si l'on considère qu'un juge peut comparer simultanément $2^2 = 4$ produits, il y aura quatre "blocs de dégustation" et donc 3 effets ou interactions confondus.

Si, par exemple, pour une séance de dégustation donnée on décide de définir les 4 blocs :

(B1)	:	$\emptyset$	A	B	AB
(B2)	:	ABC	BC	AC	C
(B3)	:	ABD	BD	AD	D
(B4)	:	CD	ACD	BCD	ABCD

On peut vérifier (cf. par exemple [2]) que les deux effets de C et de D ainsi que l'interaction C × D seront confondus.

Comme il est possible de réaliser plusieurs séances de dégustation, on peut modifier d'une séance à l'autre, les facteurs qui entreront en confusion. En retenant six séances, il viendra tour à tour : A, B, AB ; A, C, AC ; A, D, AD ; B, C, BC ; B, D, BD ; C, D, CD.

On parle alors de plan en confounding partiel.

C'est ce dispositif qui a été retenu en raison des propriétés combinatoires qu'il présente.

Remarquons tout d'abord que l'on peut représenter sur le diagramme du simplexe, le plan d'une séance de dégustation (par exemple, la séance où C, D et CD sont confondus) :

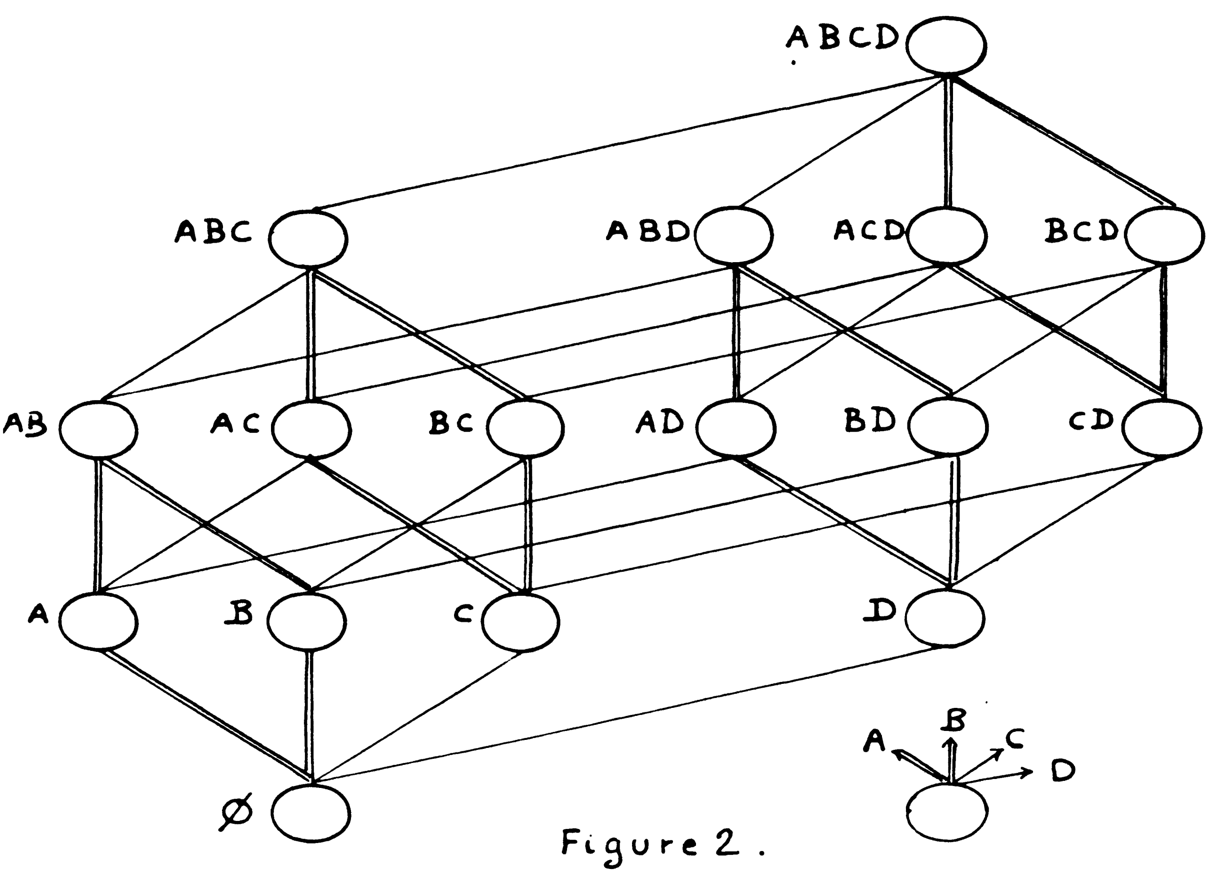


Figure 2.

Sur ce schéma, chaque bloc de dégustation est repéré par un parallélogramme en traits gras ; chaque parallélogramme est construit à partir des directions des effets qui ne sont pas confondus : il correspond donc à un plan factoriel 2^2.

Dans l'exemple ci-dessus on dispose donc de quatre classements indépendants de produits où apparaissent (ab, aB, Ab, AB), chaque bloc différant des autres par l'adjonction ou la suppression d'une ou de deux modalités des deux autres facteurs **c** et **d** . A l'issue de chaque séance on peut donc tester la concordance des juges (W de Kendall) ou, par le test de Kramer [6] tenter de voir si une modalité particulière à tendance à être préférée ou rejetée par les juges, ou encore s'il y a un effet dégustateur significatif. Bien évidemment, ces tests seraient plus intéressants à réaliser si l'on disposait de 12, 18, 24, ... séances de dégustation au lieu des six qui ont été retenues dans cette première tentative.

Par ailleurs, si l'on appelle distance entre deux cases du simplexe, le nombre minimal d'arêtes qu'il faut parcourir pour les relier entre elles, on vérifiera que sur l'ensemble des six séances, un produit est comparé :

3 fois aux produits à distance 1
1 fois aux produits à distance 2
0 fois aux autres produits.

Autrement dit, si l'on veut tracer sur le simplexe une chaîne traduisant l'évolution de la qualité (qualité qui sera repérée - cf. infra- par le rang obtenu par le produit), celle-ci pourra être construite maillon par maillon, chaque produit étant comparé 3 fois avec son suivant et avec son précédent. Cette possibilité est intéressante car l'étude de telles chaînes présente un intérêt économique certain : supposons qu'un produit quelconque soit classé parmi les derniers, alors que deux autres produits sont classés premiers ex aequo. La chaîne minimale partant du produit mal classé indique à l'agriculteur les modifications qu'il doit apporter à son système de culture ; mais dans le cas d'ex aequo, il peut choisir la chaîne de coût minimal.

Enfin, ce protocole permet d'examiner 80 paires sur les 120 à analyser et l'on peut vérifier que si, pour chacune des comparaisons effectuées, une préférence se dégage (et si les jugements sont cohérents entre eux) on peut, par fermeture transitive, déterminer pour chacune des 40 paires restantes, le sens dans lequel s'exerce la préférence.

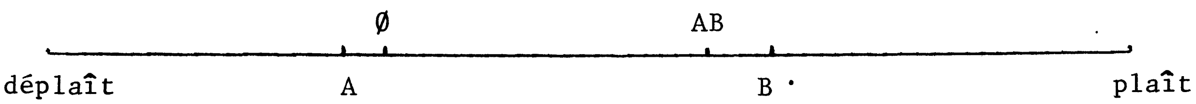
IV - RECHERCHE D'UN CLASSEMENT

4.1. <u>Le choix d'un quasi-ordre</u>

Du point de vue strictement algébrique, l'emploi de la notion de quasi-ordre semble s'imposer dans ce type d'expérimentation : Luce lui-même [8] propose pour illustrer cette relation binaire, un exemple fictif tiré de l'analyse sensorielle.

Nous ne reviendrons pas sur la définition des quasi-ordres, ni sur la procédure de détermination du préordre sous-jacent : ces points sont amplement décrits dans ce numéro et dans le numéro précédent de cette revue ; bornons-nous donc à décrire le protocole expérimental qui a été utilisé.

Au cours d'une séance chacun des juges a à classer les 4 produits appartenant à un même bloc (par exemple, le bloc B1 = {Ø,A,B,AB}. Il rend compte de son classement en plaçant les produits sur un axe, de préférence du type suivant :



Chaque segment (plaît-déplaît) mesure 15 cm et l'abscisse d'un produit par rapport à une extrémité peut être utilisée ensuite pour étudier soit une échelle numérique, soit une échelle ordinale, soit encore une échelle d'intervalle.

Par ailleurs, les juges sont libres de situer au même endroit plusieurs produits qui leurs sont indifférents.
A priori, lorsqu'il traduit son jugement, un juge a déjà tenu compte de son propre seuil d'indifférence...Il est toutefois possible de définir les seuils secondaires en étudiant l'effet dans le classement final, de seuils d'indifférence graphique : ainsi, on peut décider que si Ø et A sont à moins de x mm l'un de l'autre, alors Ø est indifférent à A (ØIA).

Comme certaines paires sont comparées trois fois et ce, dans des blocs différents, au cours de séances différentes, il peut arriver que certains classements soient contradictoires... Nous avons dans ce cas, choisi la règle de décision suivante :

appelant P une préférence, I une indifférence et travaillant sur trois classements, nous décidons que si les jugements sur deux produits x et y sont

. xPy trois fois $\Longrightarrow$ x P y
. xPy deux fois et xIy $\Longrightarrow$ x P y
. xPy et xIy deux fois $\Longrightarrow$ x I y
. xIy trois fois $\Longrightarrow$ x I y
. xPy, xIy, yPx $\Longrightarrow$ x J y
. xPy deux fois et yPx $\Longrightarrow$ x J y

ou xJy signifie : x n'est pas comparable à y.

Les deux dernières règles relèvent quelque peu de l'arbitraire ; on peut cependant leur prêter la signification suivante :

- soit le seuil de différenciation choisi (i.e. distance en mm séparant deux produits), n'est pas adapté et il faut en choisir un plus élevé ;

- soit encore, il y a eu incohérence dans les jugements (erreur instrumentale) et il n'y a pas lieu de tenir compte de ces artefacts.

Avec ces conventions, on obtient la matrice descriptive de la relation observée au cours de l'expérience représentée par le tableau 1.

Dans cette matrice on a codé dans la case (x,y) intersection de la ligne représentant le produit x et de la colonne représentant y :

1 si x P y
0,5 si x I y
0 si x J y ou si y P x.

	D	AC	BC	ABD	CD	A	B	ABCD	C	AD	BD	ABC	Ø	ACD	BCD	AB
D	0	1.0	1.0	1.0	0	1.0	.5	.5	0	0	0	0	0	.5	1.0	1.0
AC	0	0	.5	1.0	.5	0	0	0	0	0	0	0	.5	0	0	1.0
BC	0	.5	0	1.0	0	0	0	1.0	0	0	.5	0	.5	0	0	.5
ABD	0	0	0	0	0	0	.5	0	0	0	0	0	.5	.5	.5	0
CD	0	.5	1.0	1.0	0	1.0	1.0	.5	0	1.0	.5	0	0	0	0	0
A	0	0	1.0	1.0	0	0	.5	0	.5	0	.5	0	0	.5	0	0
B	.5	1.0	0	.5	0	.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ABCD	.5	1.0	0	0	.5	1.0	1.0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.0
C	1.0	0	0	0	0	.5	1.0	1.0	0	0	0	.5	0	1.0	0	.5
AD	0	1.0	0	0	0	0	1.0	1.0	1.0	0	.5	0	.5	0	1.0	.5
BD	0	0	.5	0	.5	.5	0	1.0	1.0	.5	0	0	0	1.0	0	.5
ABC	0	0	0	1.0	1.0	1.0	1.0	0	.5	1.0	1.0	0	0	1.0	.5	0
Ø	0	.5	.5	.5	1.0	0	0	0	0	.5	1.0	1.0	0	1.0	.5	1.0
ACD	.5	0	1.0	.5	0	.5	0	0	0	0	0	0	0	0	1.0	0
BCD	0	1.0	0	.5	0	0	1.0	0	1.0	0	0	.5	.5	0	0	0
AB	0	0	.5	0	0	0	0	0	.5	.5	.5	0	0	1.0	1.0	0

Tableau 1

A partir de cette matrice, on cherche à mettre en évidence un quasi-ordre ainsi que le préordre sous-jacent ; la procédure de détermination est celle décrite par Jacquet-Lagrèze dans sa thèse [5] et le programme utilisé est celui qu'il a écrit et nous a aimablement prêté.

Nous verrons au paragraphe V de cet article que l'identification des indifférences entre produits est, pour nous, au moins aussi importante que celle des préférences ; c'est donc le quasi ordre le moins discriminant que nous avons retenu.

Enfin, comme nous avons essayé différents seuils secondaires d'indifférence graphique (0, 5, 10, 15 et 20 mm), le choix final d'un quasi ordre a été fondé sur les considérations empiriques suivantes:

La procédure employée conduit, à un certain stade, à supprimer un certain nombre d'arcs dans le graphe des préférences, afin de maintenir la transitivité de la relation P, et à inverser certaines préférences ou à les transformer en indifférence. Nous avons choisi de conserver le Q.O. qui modifiait le moins la structure initiale des données.

Ce choix s'effectue à partir du tableau du nombre de transformations des couples qu' édite ce programme.
Ce tableau se présente sous la forme suivante : [5]

Q.O. / Données	P	I
*P		
P		
I		
J		

Dans la première colonne on a

(*P,P) nombre de préférences strictes inversées
(P,P) nombre de préférences strictes conservées
(I,P) nombre d'indifférences transformées en préférences
(J,P) nombre d'incomparabilités transformées en préférences

Dans la seconde colonne on a

(* P,I) + (P, I) nombre de préférences strictes transformées en indifférences

(I ,I) nombre d'indifférences conservées

(I ,I) nombre d'incomparabilités transformées en indifférences

On calcule également un coefficient d'approximation

$a = \frac{(PP) + (II)}{120}$ où 120 est le nombre de paires à comparer

On a ainsi obtenu les résultats suivants :

Seuil	0 mm			5 mm			10 mm			15 mm		
	P	I	Σ	P	I	Σ	P	I	Σ	P	I	Σ
*P	6	10	16	6	10	16	0	10	10	0	11	11
P	33	20	53	33	20	53	31	12	43	14	24	38
I	9	2	11	9	2	11	17	10	27	7	24	31
J	22	28	40	22	18	40	22	18	40	12	28	40
Σ	70	50	120	70	50	120	70	50	120	33	87	120
120a		35			35			41			38	

On voit sur ce tableau que pour le seuil 10 mm, le nombre de préférences inversées est nul et que celui des préférences transformées en indifférences est minimum ; de plus, le coefficient d'approximation est maximum. C'est donc le Q.O. correspondant à ce seuil que, sans chercher d'autres justifications , nous avons retenu.

V - RESULTATS - UTILISATION DU SIMPLEXE

A la suite de la procédure décrite précédemment on obtient donc un classement des 16 objets sous forme de préordre qu'il s'agit ensuite d'interpréter.

L'un des moyens les plus simples et des plus rapides consiste, à notre avis, à inscrire dans chaque case du simplexe évoqué au paragraphe III, le rang obtenu par chaque produit.

L'étude de l'effet de chacun des facteurs peut se faire graphiquement en orientant chaque arête du simplexe dans le sens, par exemple, de l'augmentation de la qualité. Par exemple, l'étude du facteur **b** donne le schéma de la figure 3.

Sur les huit arcs que l'on peut tracer, on voit que six d'entre eux sont orientés dans le même sens : augmentation de la qualité, en passant du niveau haut au niveau bas de ce facteur. On peut donc présumer l'existence d'un effet de ce facteur.

De même, si l'on étudie le facteur **a** (figure 4) : on constate que

- pour le bas niveau du facteur **b** , les arcs sont tous orientés dans le même sens,
- pour le haut niveau de **b** , trois arcs sur quatre sont orientés dans le sens contraire.

Il y a sans doute interaction des deux facteurs **a** et **b** .

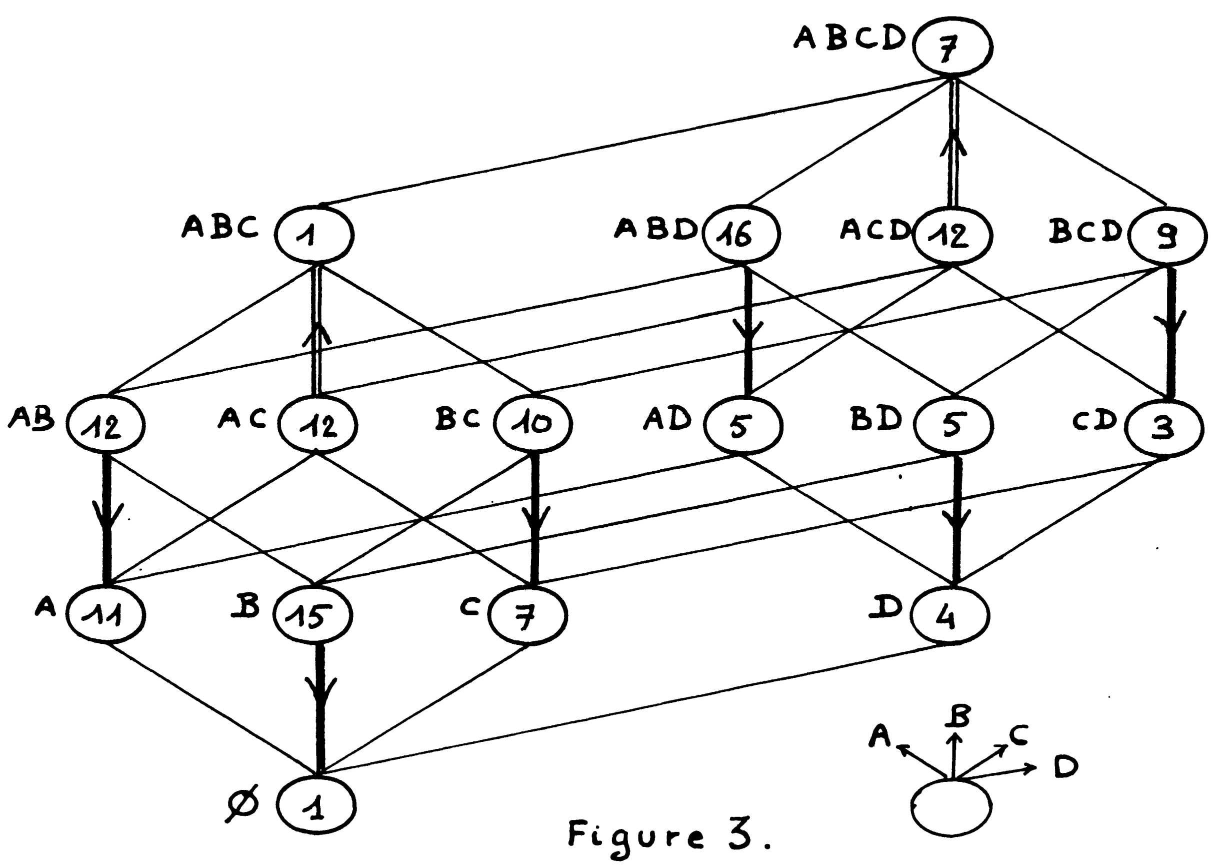


Figure 3.

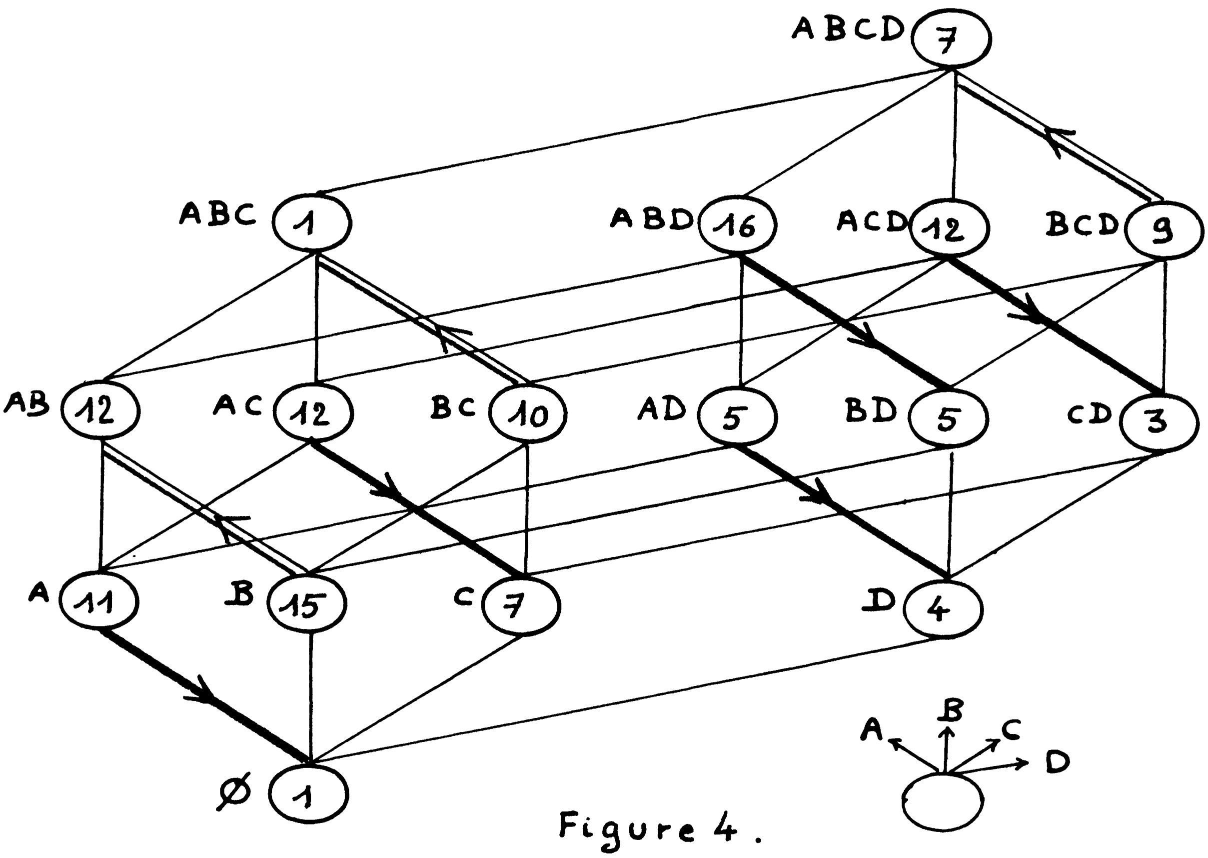


Figure 4.

Il serait intéressant de pouvoir préciser ces observations par un test statistique. On peut donc songer au test non paramétrique simple - que nous avons appelé test des arcs - du type suivant :

"Pour un classement donné des 16 objets, quelle est la probabilité pour que - par le seul jeu du hasard - on obtienne sur le simplexe une disposition des arcs identique à celle que l'on observe ?".

On remarquera immédiatement que la probabilité qu'un arc soit orienté dans un sens donné, n'est pas égale à un demi, dès lors que le classement contient des ex aequo (dans le cas présent : deux objets ont le rang 1, deux le rang 5, deux le rang 7 et trois le rang 12 : outre les arcs, il peut également subsister des arêtes sur le simplexe.

Nous donnons, en Annexe , le détail du calcul qui conduit à l'expression de cette probabilité.

Enfin, signalons que ce test permet également de calculer le nombre de répétitions nécessaires de la série de six dégustations des quatre juges pour que, par exemple, une disposition des arcs (5,3) puisse être considérée comme significative.

VI - VALIDITE DE LA METHODE UTILISEE

6.1 Quelques éléments sur la physiologie du goût

Physiologiquement, l'appréciation de la qualité gustative d'un produit passe par trois étapes :

a) identification des différents stimuli qu'émet le produit : saveurs, arômes, odeurs, qualités mécaniques, ...etc...,

b) perception de l'intensité de chaque stimulus ; perception dont rend assez bien compte la loi de Stevens qui lie l'intensité perçue (R) à l'intensité du stimulus (S): $R = KS^n$; ce qui peut donner dans la comparaison de deux produits x et y :

$$\Delta = \text{Log } R(x) - \text{Log } R(y) = n \left[\text{Log } S(x) - \text{Log } S(y)\right]$$

Par ailleurs, la différence entre x et y est perçue si la différence Δ est suffisamment forte : on voit apparaître ici les deux notions de fonction d'utilité et de seuil de discrimination dont l'existence sont, dans la théorie de Luce, l'une des conséquences de l'existence d'un quasi ordre.

c) jugement synthétique de caractère hédonique sur l'ensemble des stimuli perçus ; et le Professeur Mac Leod [9] signale à ce propos que "les propriétés hédoniques de plusieurs sensations simultanées se combinent algébriquement et peuvent, en particulier, s'annuler réciproquement" ; il remarque, par ailleurs, qu'à ce niveau de jugement synthétique, les échelles retenues par le cerveau (après codage) sont relativement pauvres : plaît/déplaît ou faible/moyen/fort, par exemple.

6.2 Appréciation sensorielle et quasi-ordre

Tant que l'on reste au niveau de la perception, l'interprétation des jugements sensoriels par des quasi-ordres, semble donc satisfaisante (et l'exemple de Luce qui ne porte que sur l'appréciation d'une saveur fondamentale : le goût sucré d'un produit rentre bien dans ce cas).

Notons cependant que dans la recherche d'un Q.O. on fait jouer à la préférence un rôle prépondérant, l'indifférence n'étant elle, définie que comme le complément symétrique de la relation P (si ni aPb, ni bPa alors aIb) ; en revanche, en analyse sensorielle, la préférence est en quelque sorte le reliquat de l'indifférence : il y aura préférence si, tout d'abord, a est discerné de b et si, ensuite, a n'est pas indifférent à b. Or, très généralement, l'exposant n de la loi de Stevens évoquée au paragraphe précédent, est inférieur à 1 : deux produits doivent être très différents l'un de l'autre pour que puisse s'émettre un jugement de préférence.

Notons encore que dans l'expérience menée, plusieurs juges examinent les produits ; or, écrit le Professeur Holley [4], "les psychophysiciens ne savent pas très bien dans quelle mesure l'exposant n caractérise la substance (odorante) testée ou b, sujet que la perçoit".

Cela veut dire que d'un juge à l'autre, le seuil Δ de discrimination peut différer et que l'agrégation de classements partiels réalisés par des personnes différentes est donc hasardeuse.

Enfin, au niveau du jugement synthétique, arbitrage entre différentes sensations, il peut très bien arriver que dans la comparaison a/b, ce soit la sensation S qui domine, la sensation T pour le couple b/c, la sensation U pour a/c.
Dans ces conditions, des intransitivités peuvent apparaître sans que pour autant le jugement du consommateur soit incohérent.

Se posent donc un certain nombre de problèmes non résolus, mais dont la résolution semble devoir passer, au moins sur le plan expérimental, par une augmentation notable du nombre de séances de dégustation. Augmentation rendue également nécessaire pour les raisons que nous développons au paragraphe suivant.

6.3 <u>Homogénéité ; Hétérogénéité</u>

Jusqu'à présent, nous avons parlé de la qualité Q d'un produit, comme si elle était constante, immuable et discernable. Or, dans l'hypothèse où un système de culture, S, permet effectivement d'obtenir un produit d'une qualité Qs, la manifestation q_s de cette qualité au moment de la dégustation, est une variable aléatoire.

Interviennent en effet toute une série de perturbations sans doute minimes et vraisemblablement indépendantes dues : à l'action des facteurs agronomiques, climatologiques,... à l'échantillonnage à l'intérieur d'une parcelle, à l'échantillonnage réalisé pour une dégustation, à l'hétérogénéité de la cuisson, à celle du produit (par exemple, la composition physico-chimique de la pomme de terre, de la pelure au centre, varie),...
On peut donc penser, dans une première approximation, que q_s est une variable normale centrée sur Q_s .

Dans ces conditions, ce n'est pas une, deux ou trois observations q_s qu'il y a lieu de considérer dans la comparaison de deux systèmes S et S', mais les moyennes $\bar{q}_s$ et $\bar{q}_{s'}$ de r répétitions ... r pouvant être grand... ce qui pose un problème de réalisation pratique.

De plus, le juge intervient sur chaque observation de la variable q_s un peu à la manière d'une fonction aléatoire de l'argument q_s : par exemple, si nous reprenons la loi de Stevens, le coefficient n peut être interprété comme étant également une variable aléatoire dont la distribution reste à déterminer.

Là encore, considérer le résultat d'une dégustation comme le résultat d'un processus aléatoire, pose sans doute quelques problèmes d'ordre théorique, mais aussi des problèmes de réalisation pratique...

Enfin, nous avons supposé que le collège de juges était homogène : c'est-à-dire qu'ils se réfèraient tous à un même système de valeurs pour apprécier la qualité. Dans l'expérience menée, cette hypothèse est concevable : les juges sont des "experts", entraînés durant plusieurs mois par des épreuves d'identification, de classement, etc... Mais dès que l'on passe à la notion de consommateur, on sait bien que cette hypothèse n'est plus vraisemblable : des contradictions proviennent alors de classements contradictoires et c'est tout l'intérêt d'études telle que celle qu'a, par exemple, réalisée J. Lemaire [7] que de déterminer des segments de population au comportement relativement homogène.

6.4 Relations partielles et relations totales

Supposons les problèmes posés en 6.3. résolus ; il reste encore des raisons de voir apparaître des intransitivités : le fait de procéder à des comparaisons partielles : en effet, l'union de deux ordres n'est pas, en général, un ordre.

Considérons 6 produits - a, b, c, d, e, f - comparés dans deux blocs (abcd), (abef). Si, par exemple, on obtient :

$c > d > a > b \quad ; \quad a > b > e > f$

l'union conduit à un ordre ;mais que dire si l'on a, dans un bloc $a > b$, et $b > a$ dans l'autre ?

Il serait illusoire de considérer que l'un des deux ordres provient d'une erreur de jugement : cela revient à supposer que le classement de deux objets n'est pas modifié dans des comparaisons où interviennent d'autres objets ; or, pour des raisons purement physiologiques nous savons, qu'en général, cela est faux ; il serait donc intéressant de tenter de prolonger les travaux de P. Slater [10] et de A. Astié [1], (qui font intervenir les graphes de comparabilité) pour tenter de mettre en évidence plusieurs préordres partiels, plutôt qu'un préordre total unique, mais peut être douteux.

6.5 Conclusions provisoires

Ainsi qu'on le voit, trop de problèmes restent en suspens pour qu'on puisse se satisfaire des résultats de cette première expérimentation (dont le but -puisque c'était la première- était plus de faire apparaître les problèmes que de les résoudre tous).

Néanmoins, certains résultats sont encourageants : au cours des différents dépouillements (car plusieurs critères étaient en fait analysés, plusieurs répartitions culinaires proposées), le nombre "d'arcs à inverser" a toujours été relativement faible (10% environ) ; de plus, les effets que le test des arcs fait apparaître comme significatifs, s'expliquent assez bien en termes de biologie cellulaire et de biochimie.

Aussi, pensons-nous que la poursuite de la recherche dans ce domaine risque de s'avérer fructueuse ...

NOTA

Cet article n'est en fait que la synthèse des travaux de différentes personnes : certains points de méthode n'auraient pu être résolus si le Professeur Lefort (I.N.A.), E. Jacquet-Lagrèze (LAMSADE), F. Sauvageot (ENSBANA), ne nous avaient constamment aidés par leurs conseils.
Monsieur R. Guérémy (LAMSADE) a mis au point sur notre ordinateur le programme de recherche des Q.O. et nous a suggéré maintes améliorations.

Enfin, il convient tout particulièrement de citer l'ensemble du personnel de l'Institut Technique de la Pomme de Terre (qui participe à cette action DGRST), non seulement parce qu'il a su poser et résoudre de nombreux problèmes théoriques, mais encore parce qu'il a assumé la lourde tâche que constituait la réalisation pratique de cette expérience : la fabrication des produits puis... leur dégustation.

ANNEXE

PROBABILITE D'OBTENIR λ ARCS SUR n DANS UN SENS DONNE

I - LE PROBLEME

Etant donné les 2n cases du simplexe , on peut les regrouper en n couples (x,X) où x représente, pour un facteur donné x, le bas niveau de ce facteur et X, le haut niveau.

Les 2n objets qui ont été comparés sont chacun affectés à une case de manière aléatoire ; ils sont repérés par leur rang dans un classement C de préférence. Pour un couple (x,X) donné, trois cas sont possibles :

en appelant r(x) le rang de l'objet affecté à la case x

- $r(x) < r(X)$: $x \leftarrow X$
- $r(x) = r(X)$: $x — X$
- $r(x) > r(X)$: $x \rightarrow X$

Dans le problème qui nous intéresse, le sens de l'arc indique le sens dans lequel augmente la qualité du produit testé lorsque l'on passe d'une case à l'autre du couple (x,X) : une arête traduit le maintien de la qualité (ex aequo).

Le classement C des 2n objets peut être résumé par la donnée des suites du nombre d'objets différenciés (r_α) et celle des suites du nombre d'objets ex aequo (s_β)

$$C = \{ r_1, s_1, r_2, s_2, \ldots r_\alpha, s_\beta \ldots \}$$

où certains r_α et certains s_β sont nuls.

Le problème posé est alors le suivant :

"Etant donné un classement $C_{\alpha\beta} = \{\ldots, r_\alpha , s_\beta , \ldots\}$ des 2n objets et une affectation aléatoire quelconque de ces objets dans les n couples (x,X), quelle est la probabilité d'obtenir à l'issue de cette affectation λ arcs du même sens ?".

II - SOLUTION

Nous retiendrons le schéma d'affectation aléatoire suivant :

a) on tire sans remise un couple (x,X)

b) on tire sans remise deux objets

c) le premier est affecté à la case x, le second à la case X

d) on recommence ...

Appelons, au moment du (m + 1)ème tirage de couple P_{m+1} et Q_{m+1}, les probabilités d'obtenir respectivement un arc d'un sens donné ou une arête au cours des (2m+1)ème et (2m+2)ème tirages d'objets. Dans ces conditions il est clair que

$$2\,P_{m+1} + Q_{m+1} = 1$$

et que la solution du problème posé consiste à évaluer les différentes probabilités Q_m pour m = 1,...m,...n.

Nous montrons ci-dessous que pour un couple (x,X) donné, la probabilité d'obtenir une arête est unique et indépendante du rang de tirage du couple (x,X)

$$Q_m = Q \;, \forall\, m$$

La probabilité d'obtenir aléatoirement 1 arc orienté dans un sens donné est alors $P = \frac{1}{2}\,(1-Q)$;

Celle d'obtenir λ s'obtient en appliquant en cascade, le théorème des probabilités conditionnelles.

III - DEMONSTRATION

Plaçons-nous au (m+1)ème tirage de couple. Jusqu'à présent, 2m objets ont été tirés dont

$i_1, i_2, \ldots i_\alpha$ parmi les $r_1, r_2, \ldots r_\alpha \ldots$ objets non ex aequo et,

$j_1, j_2, \ldots j_\beta$ parmi les $s_1, s_2, \ldots s_\beta \ldots$ objets ex aequo.

Ce qui donne (avec des notations évidentes sur les sommations selon α et β

$$2\,m = \sum_\alpha i_\alpha + \sum_\beta j_\beta$$

et nous appellerons $(2n,2m/\alpha,\beta)$ une répartition des 2m objets pris parmi les 2n correspondant à la description ci-dessous et H $(2n,2m/\alpha,\beta)$ la loi de probabilité correspondante ; c'est la loi hypergéométrique.

$$H(2n,2m/\alpha,\beta) = \frac{\binom{\Sigma_\alpha r_\alpha}{\Sigma_\alpha i_\alpha} \cdot \prod_\beta \binom{s_\beta}{j_\beta}}{\binom{2n}{2m}}$$

Par ailleurs, pour une répartition $(2n,2m/\alpha,\beta)$ donnée, la probabilité d'obtenir une arête au cours des deux tirages suivants est

$$Q(2n,2m/\alpha,\beta) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\binom{2n-2m}{2}} \cdot \sum_\beta \binom{s_\beta - j_\beta}{2}$$

La probabilité d'avoir une arête avec cette répartition est donc le produit de ces deux probabilités H(...) et Q(...). Cette expression se simplifie et on peut vérifier que si l'on isole une série particulière $s_{\beta o}$ parmi les s_β, il vient :

$$(H.Q)(2n,2m/\alpha,\beta) = \frac{s_{\beta_0}(s_{\beta_0}-1)}{2n^2(2n-1)} H(2n-2,2m/\alpha,\beta) + \frac{\binom{\Sigma r_\alpha}{\Sigma i_\alpha} \prod_\alpha \binom{s_\beta}{j_\beta}}{n \cdot \binom{2n}{2m}} \cdot \sum_{\beta \neq \beta_0} \frac{\binom{s_\beta - j_\beta}{2}}{\binom{2n-2m}{2}}$$

Dans cette expression, $\frac{1}{n}$ est la probabilité de tirer un couple (x,X) au ième tirage.

En calculant de proche en proche pour toutes les séries d'ex aequo il vient alors :

$$(H.Q)(2n, 2m/\alpha,\beta) = \frac{\sum_\beta s_\beta (s_\beta - 1)}{2n^2(2n-1)} H(2n-2, 2m/\alpha,\beta)$$

La probabilité Q_m cherchée est la somme pour toutes les décompositions possibles du nombre 2m selon les différentes valeurs que peuvent prendre simultanément les i_α et les j_β. Cette sommation ne porte que sur H (2n-2, 2m,α,β) et, par définition de la loi hypergéométrique :

$$\sum_{\substack{i_\alpha, j_\beta \\ (2m = \sum_\alpha i_\alpha + \sum_\beta j_\beta)}} H(2n-2, 2m/\alpha,\beta) = 1$$

Donc

$$Q_m = Q = \frac{s_1 (s_1 - 1) + \ldots + s_\beta (s_\beta - 1) + \ldots}{2n^2 (2n-1)}$$

Rappelons que Q_m correspond à un couple déterminé (x,X).
La probabilité que les deux éléments d'un couple quelconque soient reliés par une arête est donc $n.Q_m$ et donc

$$\Pr\{1 \text{ arête}\} = \frac{\sum s_\beta (s_\beta - 1)}{2n(2n-1)}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] ASTIE, A. "Comparaisons par paires ; estimation de relations d'ordre et tests" - Publications de l'I.S.U.P. - Volume XX, N° 1-2 (p. 1-50). 1971 (paru en 1974) Paris

[2] COCHRAN, WG. et COX, G. "Experimental designs". 2ème édition. John Wiley New-York. 1957

[3] DAVID, H.A. "The method of paired comparisons". Charles Griffin. Londres. 1963

[4] HOLLEY, A."La perception des odeurs" in "la recherche en neurobiologie". Editions du Seuil. Paris. 1977

[5] JACQUET-LAGREZE, E. "La modélisation des préférences ; Préordres, Quasi ordres et relations floues". SEMA. Direction Scientifique Rapport n° 80. Paris. 1977

[6] KRAMER, A."A quick rank test for signifiance of difference in multiple comparisons". Food Technology 10,391. 1956

[7] LEMAIRE, J. "Agrégation typologique des préférences". Thèse de 3ème cycle. Université de Nice. 1976

[8] LUCE, R.D."Semiorders and a theory of utility discrimination" Econometrika, V. 24. 1956

[9] MAC LEOD, P.
"Les bases physiologiques de l'évaluation sensorielle" in APRIA "Compte-rendu de la journée d'étude : Evaluation sensorielle des denrées alimentaires". Paris. 1976

[10] SLATER, P. "Inconsistencies in a schedule of paired comparisons" Biometrika, 53. 1961

[11] VESSEREAU, A.
"Méthodes statistiques appliquées au test des caractères organoleptiques". R.S.A.. Vol. XIII, n° 3. 1965