MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

PHILIPPE VINCKE

Quasi-ordres généralisés et représentation numérique

Mathématiques et sciences humaines, tome 62 (1978), p. 35-60

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1978__62__35_0>

Math. Sci. hum., (*16*^{e} année, n°62, *1978*, p.35-60)

QUASI-ORDRES GENERALISES ET REPRESENTATION NUMERIQUE

Philippe VINCKE*

INTRODUCTION

A. LE THEOREME DE CANTOR

En vue d'expliquer et de prédire les phénomènes qui l'entourent, l'homme s'efforce en général de construire des lois quantitatives, c'est-à-dire de caractériser les propriétés observées au moyen de nombres. Dans le cadre de l'aide à la décision et de la modélisation des préférences, ce sont la théorie des fonctions de valeur et la théorie de l'utilité qui ont pour objet la représentation numérique des préférences. Dans l'approche axiomatique de ces théories, qui s'est surtout développée ces trois dernières décades, on démontre, à partir de conditions imposées aux relations de préférence, l'existence de fonctions permettant de les représenter. De manière précise, étant donné un ensemble A (d'actions possibles) et une relation de préférence sur A, on étudie les conditions pour qu'il existe une fonction g, définie sur A et à valeurs réelles, telle que si a et b sont des éléments de A, la comparaison des nombres g(a) et g(b) donne une bonne image de la préférence entre a et b.

Le premier résultat fondamental établi dans cette optique est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction g telle que

$$a \leqslant b \Leftrightarrow g(a) \leq g(b), \; \forall\, a,b \in A .$$

Ce théorème, démontré notamment par CANTOR ([2]) et par BIRKHOFF ([1]) exige que la relation $\leqslant$ soit un préordre total, c'est-à-dire une relation réflexive ($a \leqslant a$, $\forall a$), transitive ($a \leqslant b$, $b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$) et complète ($\forall\, a,b \in A$, $a \leqslant b$ ou $b \leqslant a$). Avant de critiquer cette hypothèse et de motiver l'introduction des

* Institut de Statistique de l'Université Libre de Bruxelles, Code postal 210, Campus plaine ULB, Bruxelles.

quasi-ordres, citons de manière précise ce que nous appellerons dans la suite le théorème de CANTOR.

Théorème de CANTOR.

Il existe sur A une fonction g, à valeurs réelles, telle que, $\forall$ a,b $\in$ A :

$$a \leqslant b \Leftrightarrow g(a) \leqslant g(b)$$

ssi $\leqslant$ est un préordre total et qu'il existe un sous-ensemble dénombrable L de $A/_\sim$ partout dense sur $A/\sim$, c'est-à-dire tel que $\forall a', b' \in A/\sim$:

$$a' \lneqq' b' \Rightarrow \exists\, \ell' \in L \mid a' \lneqq' \ell' \lneqq' b' .$$

La relation $\sim$ est "la relation d'indifférence" définie par

$$a \sim b \text{ ssi } a \leqslant b \text{ et } b \leqslant a .$$

On démontre aisément que si $\leqslant$ est un préordre total, alors $\sim$ est une relation d'équivalence (réflexive, symétrique, transitive). Le quotient $A/_\sim$ a donc un sens et désigne l'ensemble des classes d'ex-aequo de la relation $\leqslant$. La relation $\leqslant'$ est définie entre ces classes d'ex-aequo de la manière naturelle suivante : $\forall$ a', b' $\in A/_\sim$,

$$a' \leqslant' b' \text{ ssi } a \leqslant b ,$$

où

$$a \in a', \ b \in b' .$$

Remarquons que l'existence du sous-ensemble dénombrable L peut être exprimée de manière équivalente en termes topologiques, la topologie utilisée étant définie à partir de la relation $\leqslant$: pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à JAFFRAY ([11]).

B. QUASI-ORDRE ET REALITE.

La structure de préordre total est largement employée dans les modèles mathématiques que l'on construit , non seulement dans les sciences humaines, mais aussi dans les sciences exactes comme la physique, la chimie, ... Ainsi, le physicien qui représente la masse d'un objet matériel au moyen d'un nombre (une unité de masse ayant été choisie) ne fait rien d'autre qu'appliquer le théorème de CANTOR au cas où A est l'ensemble des objets matériels et où $\leqslant$ est la relation "est moins lourd que" dans A. Il suppose donc implicitement que cette relation est un préordre total, ce qui en fait est une idéalisation de ce que l'homme est capable d'observer. En effet, si on appelle σ la plus petite différence de masse décelable par la balance utilisée (σ sera toujours non nulle), et a,b,c trois corps matériels de masses respectives m(a), m(b), et m(c), il peut très bien arriver que

$$|m(a) - m(b)| < \sigma,$$
$$|m(b) - m(c)| < \sigma,$$

mais que

$$|m(a) - m(c)| > \sigma.$$

On voit donc que la relation "est aussi lourd que" n'est pas transitive, contrairement à ce qui arriverait si la relation "est moins lourd que" était un préordre total.

Ce type d'exemple est d'autant plus fréquent dans les sciences humaines (et en particulier dans la modélisation des préférences) que les phénomènes décrits sont essentiellement subjectifs. Ce sont d'ailleurs de telles considérations qui ont conduit D. LUCE ([13]) à introduire, en 1956, la notion de quasi-ordre (en anglais semiorder), structure composée d'une relation de préférence et d'une relation d'indifférence non nécessairement transitive.

La notion de quasi-ordre nous semble fondamentale dans la mesure où, beaucoup plus que les préordres totaux, elle s'approche de la réalité observable. Il était donc naturel, vu la recherche constante de lois quantitatives pour décrire notre milieu, d'étudier la représentation numérique des quasi-ordres.

D'autre part, la considération de problèmes pratiques nous a conduit à envisager l'introduction de structures plus générales que les quasi-ordres et à étudier également leur représentation numérique. Les résultats présentés ici entrent dans le cadre de cette étude.

C. PLAN DE L'ARTICLE.

La première partie est consacrée à une synthèse des résultats existants sur la représentation numérique des quasi-ordres. Une parenthèse est également ouverte sur certains résultats concernant les quasi-ordres et les relations probabilistes.

Les quasi-ordres généralisés sont introduits dans la deuxième partie et nous y présentons leurs propriétés. En particulier, nous montrons que leur étude peut se ramener à celle d'une structure plus facile à manier, appelée quasi-ordre orienté généralisé.

La troisième partie contient les principaux résultats obtenus concernant la représentation numérique des quasi-ordres généralisés, dans les cas fini, dénombrable et infini non dénombrable.

I. REPRESENTATION NUMERIQUE DES QUASI-ORDRES.

A. RAPPEL

Un quasi-ordre sur un ensemble A est un couple de relations $(\sim, <)$ sur A satisfaisant aux axiomes suivants :

$$\begin{cases} - \ \forall\, a,b \in A, \text{ on a une et une seule des 3 situations suivantes :} \\ \qquad a < b,\ b < a,\ a \sim b\ ; \\ - \sim \text{ est réflexive;} \\ - \ a < b,\ b \sim c,\ c < d \Rightarrow a < d,\ \forall\, a, b, c, d \in A\ ; \\ - \ a < b,\ b < c,\ b \sim d \Rightarrow a \not\sim d \text{ ou } c \not\sim d,\ \forall\, a, b, c, d \in A\,. \end{cases}$$

Comme le montre le théorème I.1 ci-dessous, le quasi-ordre traduit la notion de seuil d'indifférence : une action b est indifférente à une action a aussi longtemps qu'elle diffère peu de a; à partir d'un certain seuil, la différence entre a et b est considérée comme suffisante pour pouvoir justifier une préférence.

B. CAS FINI

<u>THEOREME I.1.</u> ([7], [21]). <u>Soit $(\sim, <)$ un couple de relations définies sur un ensemble A fini. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction g, définie sur A et à valeurs réelles, et une constante positive σ telles que :</u>

$$\begin{cases} a \sim b \iff |g(a) - g(b)| < \sigma, \\ a < b \iff g(a) + \sigma < g(b)\,, \end{cases}$$

<u>est que $(\sim, <)$ soit un quasi-ordre sur A.</u>

En fait, on peut supposer que le seuil d'indifférence (représenté par la constante σ dans le théorème I.1) varie dans l'ensemble A. On demandera alors à la "fonction seuil" $\sigma(a)$ (positive ou nulle) de vérifier les conditions de cohérence suivantes (cf. [18], [22])

$$(1) \qquad \begin{cases} g(a) < g(b) \Rightarrow g(a) + \sigma(a) \leq g(b) + \sigma(b)\,, \\ g(a) = g(b) \Rightarrow g(a) + \sigma(a) = g(b) + \sigma(b)\,. \end{cases}$$

La représentation numérique d'un quasi-ordre au moyen d'un seuil constant n'est d'ailleurs en général plus possible dans le cas des ensembles infinis, comme le montre le théorème I.2.

C. CAS DENOMBRABLE.

THEOREME I.2. ([7], [21]). Soit $(\sim,<)$ un couple de relations définies sur un ensemble A dénombrable. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe deux fonctions g et σ, définies sur A, à valeurs réelles, vérifiant les conditions (1) et telles que

$$\begin{cases} a \sim b \iff \begin{cases} g(a) + \sigma(a) \geq g(b) \,, \\ g(b) + \sigma(b) \geq g(a) \,, \end{cases} \\ a < b \iff g(a) + \sigma(a) < g(b) \,, \end{cases}$$

est que $(\sim,<)$ soit un quasi-ordre.

D. CAS NON DENOMBRABLE.

Seul ROBERTS ([17]), à notre connaissance, a étudié la représentation numérique des quasi-ordres dans le cas où A est un ensemble quelconque. Son résultat est un corollaire du théorème de CANTOR (cité en introduction). En effet, à tout couple de relations $(\sim,<)$, on peut associer la relation R définie comme suit : $\forall$ a, b $\in$ A :

$$a \, R \, b \iff \begin{cases} c < a \Rightarrow c < b \,, \forall c \,, \\ b < c \Rightarrow a < c \,, \forall c \,. \end{cases}$$

On peut alors démontrer le résultat suivant :

THEOREME I.3. ([17]). Soit $(\sim,<)$ un couple de relations définies sur un ensemble A quelconque. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction g (définie sur A et à valeurs réelles) et une famille d'intervalles $J = \{I(a), \forall a \in A\}$, (de la droite réelle), telles que :

$$\begin{cases} a \sim b \iff g(b) \in I(a) \iff g(a) \in I(b) \,, \\ a < b \iff x < g(b), \forall x \in I(a) \,, \end{cases}$$

est que la relation R associée à $(\sim,<)$ soit un préordre total sur A et qu'il existe une fonction f (définie sur A et à valeurs réelles) telles que

$$a \, R \, b \iff f(a) \leq f(b) \,.$$

Ce théorème semble montrer que la représentation numérique des quasi-ordres est un problème équivalent à celui de la représentation des préordres totaux (résolu par CANTOR), ce qui est tout à fait inexact. En effet le résultat de ROBERTS présente l'inconvénient d'introduire une famille d'intervalles d'indifférence dont on ne connaît absolument pas la nature topologique. Comme il l'affirme lui-même, les intervalles de la famille J peuvent être, suivant l'élément a de A que l'on considère, ouverts, fermés ou semi-ouverts. Cela signifie que lorsque g(b) coïncide avec une des extrémités de I(a), on peut avoir (et cela dépend de a), tantôt l'indifférence entre a et b, tantôt une relation de préférence entre ces 2 éléments.

Cette ambiguïté n'existe pas dans le théorème I.2, mais comme l'écrit ROBERTS ([17]) : "It is always possible to modify the previous numerical representation so that the intervals are all open (all closed) provided the set A is countable, but not in general otherwise".

Dans la deuxième partie de cet article, nous nous sommes efforcés d'uniformiser la nature topologique des intervalles d'indifférence, c'est-à-dire d'obtenir une représentation numérique semblable à celle du théorème I.2, mais dans le cas non dénombrable, cela au prix, évidemment, d'une concession.

L'existence de cette concession (comme celle de l'ambiguïté du résultat de ROBERTS) montre bien que la représentation numérique des quasi-ordres (et a fortiori celle des quasi-ordres généralisés que nous allons introduire) ne peut se ramener à une simple application du théorème de CANTOR.

E. QUASI-ORDRES ET RELATIONS PROBABILISTES.

Bien que le sujet traité sorte un peu du cadre envisagé ici, nous voudrions mentionner les résultats de ROBERTS ([16]) concernant l'introduction des quasi-ordres dans la théorie des relations probabilistes.

Soit A un ensemble d'actions et a,b deux éléments de A. On demande au décideur d'exprimer une préférence (stricte) pour l'un des 2 éléments. Cette opération est répétée plusieurs fois et ce, pour tout couple (a,b) d'éléments de A. Soit $\rho(a,b)$ la fréquence relative avec laquelle a est préféré à b. On obtient donc une fonction $\rho : A \times A \to [0,1]$ telle que $\forall\, a,b \in A$:

$$\rho(a,b) + \rho(b,a) = 1 .$$

Le problème est de caractériser les situations où il existe dans les données obtenues, une certaine cohérence en probabilité. Une manière d'exprimer cette cohérence est de définir la propriété de transitivité suivante (strong stochastic transitivity) : $\forall\, a, b, c \in A$:

$$\left.\begin{array}{l} \rho(a,b) \geq \frac{1}{2} \\ \\ \rho(b,c) \geq \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \rho(a,c) \geq \max\,\{\rho(a,b),\ \rho(b,c)\}.$$

D'autre part, on peut associer à la fonction ρ une famille de couples de relations $\mathcal{L} = \{(L_\lambda,\ I_\lambda),\ \frac{1}{2} \leq \lambda < 1\}$, telles que

$$\begin{cases} a\ L_\lambda\ b & \text{ssi } \rho(a,b) > \lambda, \\ a\ I_\lambda\ b & \text{ssi } 1 - \lambda \leq \rho(a,b) \leq \lambda\ . \end{cases}$$

Le travail de ROBERTS consiste à étudier les liens existant entre les propriétés de la fonction ρ et celles de la famille $\mathcal{L}$. En particulier, moyennant certaines hypothèses, la condition de transitivité définie ci-dessus revient à supposer que $\mathcal{L}$ constitue une famille de quasi-ordres "emboîtés". Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à l'article de ROBERTS ([16]).

II. QUASI-ORDRES GENERALISES.

A. INTRODUCTION

Le traitement des problèmes pratiques montre que, bien souvent, le décideur ne peut fixer son choix entre l'indifférence et la préférence stricte : on parle alors de préférence faible ou large ([18]). En particulier, E. JACQUET-LAGREZE ([10]) a montré comment cette notion apparaît tout naturellement lorsqu'on compare des distributions de probabilité. La méthode ELECTRE III, récemment mise au point par B. ROY ([19]) se base sur des relations appelées pseudo-ordres, composées d'une relation d'indifférence ($\sim$), d'une relation de préférence faible ($<_1$) et d'une relation de préférence forte ($<_2$). Ces pseudo-ordres sont définis au moyen d'une fonction principale g et de deux fonctions seuils σ_1 et σ_2 telles que

$$\begin{cases} a \sim b \iff \begin{cases} g(a) + \sigma_1(a) \geq g(b)\ , \\ g(b) + \sigma_1(b) \geq g(a)\ , \end{cases} \\ a <_1 b \iff g(a) + \sigma_1(a) < g(b) \leq g(a) + \sigma_2(a)\ , \\ a <_2 b \iff g(a) + \sigma_2(a) < g(b)\ , \\ 0 \leq \sigma_1(a) \leq \sigma_2(a)\ , \end{cases}$$

σ_1 et σ_2 satisfaisant en outre des conditions de cohérence du type vu précédemment.

Il en résulte que la structure de quasi-ordre n'est pas toujours suffisante pour représenter les préférences d'un individu. De manière générale,

B. ROY ([20]) a mis en évidence l'intérêt de construire des modèles traduisant différents degrés de préférence : c'est le but de l'introduction des quasi-ordres généralisés (Q.O.G.) et des quasi-ordres orientés généralisés (Q.O.O.G.). En fait, la définition de ces derniers résulte plutôt de considérations techniques : leur axiomatique est en effet beaucoup moins lourde à manier que celle des Q.O.G. et d'autre part nous allons présenter un résultat qui permet de déduire les propriétés des Q.O.G. (notamment en ce qui concerne leur représentation numérique) de celles des Q.O.O.G.

La définition des Q.O.G. ci-dessous (qui peut sembler sophistiquée) s'introduit de manière naturelle dès que l'on veut représenter une relation de préférence au moyen d'une fonction g et de fonctions seuils σ_i telles que

$$a <_i b \iff g(a) + \sigma_i(a) < g(b) \leq g(a) + \sigma_{i+1}(a) ,$$

où $<_i$ représente une préférence d'autant plus forte que i est grand. Ce sera d'ailleurs l'objet de la troisième partie de cet article, qui traitera de la représentation numérique des Q.O.G. et qui éclairera leur interprétation.

B. DEFINITION DES QUASI-ORDRES GENERALISES.

Un quasi-ordre généralisé sur un ensemble A est un (m+1)$^{\text{uple}}$ de relations $(\sim, <_1, \ldots, <_m)$ sur A satisfaisant aux axiomes suivants :

B1. $\forall$ a,b $\in$ A, on a une et une seule des 2m+1 situations suivantes :

$$a <_1 b,\ a <_2 b,\ \ldots,\ a <_m b,\ b <_1 a,\ b <_2 a,\ \ldots,\ b <_m a,\ a \sim b\ ;$$

B2. $\sim$ est réflexive ;

B3. $\forall$ a,b,c $\in$ A :

$$a <_\ell b \text{ et } b <_q c \Rightarrow \begin{cases} a <_{\ell+q} c \text{ ou } a <_{\ell+q+1} c, & \text{si } \ell+q < m , \\ a <_m c & , \text{si } \ell+q \geq m \,; \end{cases}$$

B4. $\forall$ a,b,c $\in$ A :

$$\left.\begin{array}{c} - a <_\ell c,\ b \sim c \text{ et } \ell > 1 \\ \text{ou} \\ - c \sim a,\ c <_\ell b \text{ et } \ell > 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a <_\ell b \text{ ou } a <_{\ell-1} b \text{ ou } a <_{\ell+1} b, & \text{si } \ell < m , \\ a <_m b \text{ ou } a <_{m-1} b & , \text{si } \ell = m \,; \end{cases}$$

B4.bis. $\forall$ a,b,c $\in$ A :

$$\left.\begin{array}{l} - a <_1 c,\ b \sim c \\ \qquad\text{ou} \\ - c \sim a,\ c <_1 b \end{array}\right\} \Rightarrow a <_1 b \text{ ou } a <_2 b \text{ ou } a \leftarrow b\ ;$$

où nous notons

$$a \leftarrow b \text{ ssi } \left\{\begin{array}{l} a \sim b\ , \\ d \underline{<_k}\ a \Rightarrow d \underline{<_k}\ b,\ \forall k,\ \forall d\ , \\ b \underline{<_k}\ e \Rightarrow a \underline{<_k}\ e,\ \forall k,\ \forall e\ , \end{array}\right.$$

et

$$d \underline{<_k}\ a \text{ ssi } \exists\ \ell \geq k \mid d <_\ell a\ ;$$

B5. $\forall$ a,b,c $\in$ A :

$$\left.\begin{array}{l} - a <_\ell c,\ b <_{\ell-1} c,\ 1 < \ell < m \\ \qquad\text{ou} \\ - c <_{\ell-1} a,\ c <_\ell b,\ 1 < \ell < m \end{array}\right\} \Rightarrow a <_1 b \text{ ou } a \leftarrow b\ ;$$

B5.bis. $\forall$ a,b,c $\in$ A :

$$\left.\begin{array}{l} - a <_m c,\ b <_{m-1} c \\ \qquad\text{ou} \\ - c <_{m-1} a,\ c <_m b \end{array}\right\} \Rightarrow a \underline{\leftarrow} b\ ,$$

où nous notons

$$a \underline{\leftarrow} b \text{ ssi } a \underline{<_1} b \text{ ou } a \leftarrow b\ .$$

C. PROPRIETES DES QUASI-ORDRES GENERALISES.

THEOREME II.1. Il résulte des axiomes précédents que les Q.O.G. jouissent des propriétés suivantes :

C1. $\forall$ a,b $\in$ A : $a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$:

C2. $\forall$ a,b $\in$ A : $a <_q b,\ q > 1 \Rightarrow \nexists\, c \in A \mid a \sim c$ et $c \sim b$;

C3. $\forall$ a,b,c $\in$ A : $a <_1 b <_1 c \Rightarrow \nexists\, d \in A \mid d \sim a,\ d \sim b$ et $d \sim c$;

C4. $\forall$ a,b,c $\in$ A :

$$\left.\begin{array}{l} a <_{\ell} c,\ b <_{q} c,\ q < \ell-1,\ \ell < m \\ \qquad\qquad \text{ou} \\ c <_{q} a,\ c <_{\ell} b,\ q < \ell-1,\ \ell < m \end{array}\right\} \Rightarrow a <_{\ell-q} b \text{ ou } a <_{\ell-q-1} b\ ;$$

C5. $\forall$ a,b,c $\in$ A :

$$\left.\begin{array}{l} a <_{m} c,\ b <_{q} c,\ q < m-1 \\ \qquad\qquad \text{ou} \\ c <_{q} a,\ c <_{m} b,\ q < m-1 \end{array}\right\} \Rightarrow a <_{\underline{m-q-1}} b\ ;$$

C6. $\forall$ a,b,c $\in$ A :

$$\left.\begin{array}{l} a <_{q} c,\ b <_{q} c,\ q < m \\ \qquad\quad \text{ou} \\ c <_{q} a,\ c <_{q} b,\ q < m \end{array}\right\} \Rightarrow a \sim b\ ;$$

C7. La relation $\approx$ définie comme suit : $\forall$ a,b $\in$ A :

$$a \approx b \text{ ssi } \begin{array}{l} c <_{j} a \Leftrightarrow c <_{j} b,\ \forall j,\ \forall c \in A\ , \\ a <_{j} c \Leftrightarrow b <_{j} c,\ \forall j,\ \forall c \in A\ , \end{array}$$

est une relation d'équivalence ;

C8. $\forall$ a,b $\in$ A :

$$a \sim b \text{ et } a \not\approx b \Rightarrow a \leftarrow b \text{ ou } b \leftarrow a \text{ (ou exclusif)}\ ;$$

C9. $\forall$ a,b,c $\in$ A :

$$a <_{\ell} b \text{ et } b <_{q} c \Rightarrow a <_{\underline{\ell}} d \text{ ou } d <_{\underline{q}} c,\ \forall d \in A\ ;$$

C10. $\forall$ a,b,c,d $\in$ A :

$$a <_{q} b \text{ et } c <_{\ell} d \Rightarrow a <_{\underline{q}} d \text{ ou } c <_{\underline{\ell}} b\ ;$$

C11. $\forall$ a,b $\in$ A :

$$a \leftarrow b \text{ et } a \not\approx b \text{ ssi } a \sim b \text{ et}$$

$$\exists k,\ \exists c \in A \mid c \not<_{\underline{k}} a \text{ et } c <_{\underline{k}} b\ ,$$

ou

$$\exists k,\ \exists d \in A \mid a <_{\underline{k}} d \text{ et } b \not<_{\underline{k}} d\ ;$$

C12. Si $(\sim, <_1, \ldots <_m)$ est Q.O.G. sur A ,
alors $(\sim', <'_1, \ldots <'_m)$ est un Q.O.G. sur $A/_{\approx}$,
où on définit, $\forall$ a', b' $\in$ $A/_{\approx}$:

$$a' <'_j b' \text{ ssi } a <_j b \,,$$

$$a' \sim' b' \text{ ssi } a \sim b \,,$$

où

$$a \in a'$$

et

$$b \in b' \,.$$

Cette définition a un sens puisque $\approx$ est une relation d'équivalence (C7.) et que, $\forall\, a_1, a_2 \in a', \forall\, b_1, b_2 \in b'$:

$$a_1 <_j b_1 \overset{C7}{\Rightarrow} a_2 <_j b_2 \,,$$

$$a_1 \sim b_1 \overset{C7}{\Rightarrow} a_2 \sim b_2 \,.$$

C13. Si $(\sim, <_1, \ldots <_k \ldots <_m)$ est un Q.O.G. sur A, alors $(\sim, <_1, \ldots <_{\underline{k}})$ est aussi un Q.O.G. sur A.

D. DEFINITION DES QUASI-ORDRES ORIENTES GENERALISES.

Un quasi-ordre orienté généralisé sur un ensemble A est un $(m+1)^{\text{uple}}$ de relations $(<_o, <_1, \ldots, <_m)$ sur A satisfaisant aux axiomes suivants.

D1. $\forall\, a,b \in A$:

$$a <_j b \Rightarrow b \not<_j a \text{ et } \nexists\, k \neq j \mid a <_k b \text{ ou } b <_k a \,:$$

D2. $\forall\, a,b,c \in A$:

$$a <_\ell b \text{ et } b <_q c \Rightarrow \begin{cases} a <_{\ell+q} c \text{ ou } a <_{\ell+q+1} c \,, & \text{si } \ell+q < m \,; \\ a <_m c & \text{, si } \ell+q \geq m \,; \end{cases}$$

D3. $\forall\, a,b,c \in A$:

$$\left.\begin{array}{c} a <_\ell c,\ b - c \\ \text{ou} \\ c <_\ell b,\ a - c \end{array}\right\} \Rightarrow a <_\ell b \,;$$

où on a défini

$$b - c \text{ ssi } \forall\, j : b \not<_j c \text{ et } c \not<_j b \,.$$

E. PROPRIETES DES QUASI-ORDRES ORIENTES GENERALISES.

THEOREME II.2. Il résulte des axiomes précédents que les Q.O.G. jouissent des propriétés suivantes.

E1. $\sim$ est une relation d'équivalence;

E2. $\forall$ a,b,c $\in$ A :

$$\left.\begin{array}{c} a <_{\ell} c,\ b <_{\ell-1} c,\ 0 < \ell < m \\ \text{ou} \\ c <_{\ell-1} a,\ c <_{\ell} b,\ 0 < \ell < m \end{array}\right\} \Rightarrow a <_{1} b \text{ ou } a <_{0} b\ ;$$

E2.bis. $\forall$ a,b,c $\in$ A :

$$\left.\begin{array}{c} a <_{m} c,\ b <_{m-1} c \\ \text{ou} \\ c <_{m-1} a,\ c <_{m} b \end{array}\right\} \Rightarrow a <_{\underline{0}} b\ ,$$

où

$$a <_{\underline{0}} b \text{ ssi } \exists\, \ell \geq 0 \mid a <_{\ell} b\ ;$$

E3. $\forall$ a,b,c $\in$ A :

$$\left.\begin{array}{c} a <_{\ell} c,\ b <_{0} c,\ \ell \neq 0 \\ \text{ou} \\ c <_{\ell} b,\ c <_{0} a,\ \ell \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a <_{\ell-1} b \text{ ou } a <_{\ell} b\ ;$$

E4. $\forall$ a,b,c $\in$ A :

$$\left.\begin{array}{c} a <_{\ell} c,\ b <_{q} c,\ q < \ell - 1,\ \ell < m \\ \text{ou} \\ c <_{q} a,\ c <_{\ell} b,\ q < \ell - 1,\ \ell < m \end{array}\right\} \Rightarrow a <_{\ell-q} b \text{ ou } a <_{\ell-q-1} b\ ;$$

E5. $\forall$ a,b,c $\in$ A :

$$\left.\begin{array}{c} a <_{m} c,\ b <_{q} c,\ q < m - 1 \\ \text{ou} \\ c <_{q} a,\ c <_{m} b,\ q < m - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a <_{\underline{m-q-1}} b\ ;$$

E6. $\forall$ a,b,c $\in$ A :

$$\left.\begin{array}{c} a <_{q} c,\ b <_{q} c,\ q < m \\ \text{ou} \\ c <_{q} a,\ c <_{q} b,\ q < m \end{array}\right\} \Rightarrow a <_{0} b\ ,\ a \sim b \text{ ou } b <_{0} a\ ;$$

E7. $\forall$ a,b,c $\in$ A :

$$a <_\ell b \text{ et } b <_q c \Rightarrow a \underline{<_\ell} d \text{ ou } d \underline{<_q} c\ , \forall d \in A\ ;$$

E8. $\forall$ a,b,c,d $\in$ A :

$$a <_q b \text{ et } c <_\ell d \Rightarrow a \underline{<_q} d \text{ ou } c \underline{<_\ell} b\ .$$

E9. Si $(<_o, <_1 \dots <_m)$ est un Q.O.O.G. sur A ,

alors $(<'_o, <'_1 \dots <'_m)$ est un Q.O.O.G. sur A/$\_$,

où on définit, $\forall$ a', b' $\in$ A/$\_$:

$$a' <'_j b' \text{ ssi } a <_j b\ ,$$

où

$$a \in a'$$

et

$$b \in b'\ .$$

Cette définition a un sens puisque $-$ est une relation d'équivalence (E1) et que, $\forall$ a_1, $a_2 \in a'$, $\forall$ b_1, $b_2 \in b'$:

$$a_1 <_j b_1 \overset{D3}{\Rightarrow} a_2 <_j b_2\ .$$

E10. Si $(<_o, <_1 \dots <_k \dots <_m)$ est un Q.O.O.G. sur A, alors $(<_o, <_1 \dots \underline{<_k})$ est aussi un Q.O.O.G. sur A.

F. LIEN ENTRE LES Q.O.G. ET LES Q.O.O.G.

Soit $(\sim, <_1, <_2, \dots <_m)$ un ensemble de m+1 relations dans A telles que, $\forall$ a,b $\in$ A :

$$a \sim b \text{ ssi } a \not<_j b \text{ et } b \not<_j a,\ \forall j \in \{1, 2, \dots, m\}\ .$$

Soit les relations $\leftarrow$ et $\approx$ définies comme en B4.bis et C7 et soit, $\forall$ a,b $\in$ A :

$$a <_o b \text{ ssi } a \leftarrow b \text{ et } a \not\approx b\ .$$

Nous avons le théorème suivant :

<u>THEOREME II.3.</u> $(\sim, <_1, <_2, \dots <_m)$ <u>est un Q.O.G. ssi</u> $(<_o, <_1 \dots <_m)$ <u>est un Q.O.O.G.</u>

G. COMMENTAIRES.

- Un Q.O.O.G. pour lequel m = 0 est la partie antisymétrique d'un préordre total.
- Un Q.O.G. pour lequel m = 1 est un quasi-ordre.
- Un Q.O.G. pour lequel m = 2 est un pseudo-ordre.
- Il résulte de C13. qu'à tout Q.O.G. à m+1 relations, on peut associer une famille de Q.O.G. à k+1 relations, où k = 1,2, ... m-1. En particulier, on peut lui associer le quasi-ordre $(\sim, \underset{\underline{1}}{<})$.
- Intuitivement, un Q.O.G. est constitué d'une relation d'indifférence, réflexive et symétrique (ce qui est naturel) mais pas nécessairement transitive (cf., dans l'introduction, la motivation de l'emploi des quasi-ordres) et d'une famille de relations (de préférences) "emboîtées", irréflexives et et asymétriques.
- Un Q.O.O.G. est un Q.O.C. pour lequel la relation d'indifférence est transitive : comme on le voit, le système d'axiomes des Q.O.O.G. est beaucoup plus simple que celui des Q.O.G. En particulier les axiomes B5. et B5.bis ne peuvent être démontrés à partir des axiomes B1 → B4.bis (à cause de "l'imprécision" de l'axiome B4.), alors que leurs correspondants E2. et E2.bis se déduisent des axiomes D1. → D3.

III. REPRESENTATION NUMERIQUE DES QUASI-ORDRES GENERALISES.

(Les démonstrations des résultats cités ici sont faites en détail dans [21])

A. CAS FINI.

On peut démontrer les résultats suivants.

THEOREME III.A.1. Si $(<_o, <_1 \dots <_m)$ est un Q.O.O.G. sur A et si $A/_\_$ est fini, alors il existe sur A une fonction g, à valeurs réelles, et des constantes $p_1, p_2, \dots p_m$ telles que, $\forall$ a,b $\in$ A :

$$\begin{cases} a <_o b \iff g(a) < g(b) < g(a) + p_1 , \\ a <_1 b \iff g(a) + p_1 < g(b) < g(a) + p_2 , \\ \vdots \\ a <_k b \iff g(a) + p_k < g(b) < g(a) + p_{k+1} , \\ \vdots \\ a <_m b \iff g(a) + p_m < g(b) , \\ 0 < p_1 < p_2 < \dots < p_m . \end{cases}$$

THEOREME III.A.2. Si $(\sim, <_1, \dots <_m)$ est un Q.O.G. sur A et si $A/_\approx$ est fini, alors il existe une fonction g sur A, à valeurs réelles, et des constantes $p_1, p_2 \dots p_m$ telles que, $\forall$ a, b $\in$ A :

$$\begin{cases} a \sim b \iff \begin{cases} g(a) < g(b) + p_1 , \\ g(b) < g(a) + p_1 , \end{cases} \\ a <_1 b \iff g(a) + p_1 < g(b) < g(a) + p_2 , \\ \vdots \\ a <_k b \iff g(a) + p_k < g(b) < g(a) + p_{k+1} , \\ \vdots \\ a <_m b \iff g(a) + p_m < g(b) , \\ 0 < p_1 < p_2 < \dots < p_m . \end{cases}$$

Remarquons que ce n'est pas A qui est fini, mais son quotient par la relation d'équivalence associée à la structure considérée.
Le théorème III.A.2. résulte immédiatement du théorème III.A.1. et du théorème II.3. qui établit le lien entre les Q.O.G. et les Q.O.O.G.
La démonstration du théorème III.A.1. repose sur les trois lemmes suivants :

Lemme 1.

Si $x^1, x^2, \dots x^L \in \mathbb{R}^J$, alors
ou bien il existe $c \in \mathbb{R}^J$ tel que

$$c.x^\ell > 0 \quad , \quad \ell = 1, \dots, L ,$$

où $c.x^\ell$ désigne le produit scalaire de c par x^ℓ,
ou bien il existe $r_1, r_2 \dots r_L \in \mathbb{R}^+$, non simultanément nuls tels que

$$\sum_{\ell=1}^{L} r_\ell \, x_j^\ell = 0 \quad , \quad j = 1, 2, \dots J ,$$

où x_j^ℓ est la j^e composante de x^ℓ.

Lemme 2.

Soit $(\underset{o}{<}, \underset{1}{<} \dots \underset{m}{<})$ un Q.O.O.G. sur A.
$\forall$ a, b, c $\in$ A :

$$\left.\begin{array}{c} a \underset{k}{<} c \ , \ b \underset{\ell}{\not<} c \\ \text{ou} \\ c \underset{\ell}{\not<} a \ , \ c \underset{k}{<} b \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a \underset{k-\ell}{<} b \text{ si } k \geq \ell \ , \\ \\ b \underset{\ell-k}{\not<} a \text{ si } k < \ell \ . \end{array}\right.$$

Lemme 3.

Soit $(\underset{o}{<}, \underset{1}{<} \dots \underset{m}{<})$ un Q.O.O.G. sur A et soit la suite finie

$$a_1 \, R_1 \, a_2 \, R_2 \, a_3 \dots R_{p-1} \, a_p ,$$

où

$$a_1, \dots, a_p \in A ,$$

et

$$R_1, \dots, R_{p-1} \in \{\underset{o}{<}, \underset{1}{<}, \dots, \underset{m}{<}, \underset{1}{\not>}, \dots \underset{m}{\not>}\} ,$$

sachant que

$$a \underset{j}{\not>} b \text{ ssi } b \underset{j}{\not<} a .$$

Supposons de plus que la somme S des indices j des signes $\underset{\bar{j}}{<}$ apparaissant dans cette suite soit supérieure ou égale à la somme T des indices k des signes $\underset{\bar{k}}{\not>}$.
Nous avons alors

$$a_1 \underset{\bar{o}}{<} a_p .$$

B. CAS DENOMBRABLE.

Nous noterons dans la suite :

$$M^o = \{0, 1, 2, \ldots, m\}$$

et

$$M = \{1, 2, \ldots, m\} .$$

Rappelons également que $(<'_o, \ldots <'_m)$ est le Q.O.O.G. sur A/_ défini à partir de $(<_o \ldots <_m)$.
Nous dirons que la propriété P1 est satisfaite s'il existe sur A des fonctions $g, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ à valeurs réelles telles que, $\forall$ a,b $\in$ A :

$$\begin{cases} - a <_m b \iff g(a) + \sigma_m(a) < g(b) ; \\ - a <_k b \iff g(a) + \sigma_k(a) < g(b) < g(a) + \sigma_{k+1}(a) , \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall k \in M^o \setminus \{m\} ; \\ - 0 = \sigma_o(a) < \sigma_1(a) < \ldots < \sigma_m(a) , \quad \forall a \in A ; \\ - \forall k, \ell \in M^o : \\ \qquad g(a) + \sigma_k(a) < g(b) + \sigma_\ell(b) \text{ ssi} \\ \qquad\qquad \begin{cases} g(a) + \sigma_{k-\ell}(a) < g(b) , & \text{si } k \geqslant \ell , \\ g(a) < g(b) + \sigma_{\ell-k}(b) , & \text{si } k < \ell . \end{cases} \end{cases}$$

Nous dirons que la propriété P2 est satisfaite s'il existe sur A des fonctions $g, \sigma_1, \ldots \sigma_m$ à valeurs réelles telles que, $\forall$ a,b $\in$ A :

$$\begin{cases} - a <_m b \iff g(a) + \sigma_m(a) < g(b) ; \\ - a <_k b \iff g(a) + \sigma_k(a) < g(b) \leqslant g(a) + \sigma_{k+1}(a) , \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall k \in M^o \setminus \{m\} ; \\ - 0 = \sigma_o(a) \leqslant \sigma_1(a) \leqslant \ldots \leqslant \sigma_m(a) , \forall a \in A ; \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l} - \dfrac{[\sigma_{k+j}(a) - \sigma_k(a)] - [\sigma_{\ell+j}(b) - \sigma_\ell(b)]}{[g(a) + \sigma_k(a)] - [g(b) + \sigma_\ell(b)]} \geqslant -1 , \\ \qquad\qquad \forall\ a,b \in A,\ \forall\ j,k,\ell \in M^0 \text{ tels que } \left\{\begin{array}{l} k+j \leqslant m , \\ \ell+j \leqslant m . \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Nous dirons que la propriété P3 est satisfaite s'il existe sur A des fonctions g, σ_1, ... σ_m à valeurs réelles telles que, $\forall$ a,b $\in$ A :

$$\left\{\begin{array}{l} - a <_m b \iff g(a) + \sigma_m(a) < g(b) ; \\ - a <_k b \iff g(a) + \sigma_k(a) < g(b) < g(a) + \sigma_{k+1}(a) , \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \forall\ k \in M \setminus \{m\} ; \\ - a \sim b \iff \left\{\begin{array}{l} g(a) < g(b) + \sigma_1(b) , \\ g(b) < g(a) + \sigma_1(a) ; \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} - 0 < \sigma_1(a) < \dots < \sigma_m(a),\ \forall\ a \in A ; \\ - \forall\ k, \ell \in M : \\ \qquad g(a) + \sigma_k(a) < g(b) + \sigma_\ell(b) \text{ ssi} \\ \qquad\qquad \left\{\begin{array}{ll} g(a) + \sigma_{k-\ell}(a) < g(b), & \text{si } k > \ell , \\ g(a) < g(b) & , \text{si } k = \ell , \\ g(a) < g(b) + \sigma_{\ell-k}(b), & \text{si } k < \ell . \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Nous dirons que la propriété P4 est satisfaite s'il existe sur A des fonctions g, σ_1, ..., σ_m à valeurs réelles telles que, $\forall$ a,b $\in$ A :

$$\left\{\begin{array}{l} - a <_m b \iff g(a) + \sigma_m(a) < g(b) ; \\ - a <_k b \iff g(a) + \sigma_k(a) < g(b) \leqslant g(a) + \sigma_{k+1}(a) , \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \forall\ k \in M \setminus \{m\} ; \\ - a \sim b \iff \left\{\begin{array}{l} g(a) \leqslant g(b) + \sigma_1(b) , \\ g(b) \leqslant g(a) + \sigma_1(a) ; \end{array}\right. \\ - 0 \leqslant \sigma_1(a) \quad \dots \leqslant \sigma_m(a),\ \forall\ a \in A ; \end{array}\right.$$

$$\left\{ -\frac{[\sigma_{k+j}(a) - \sigma_k(a)] - [\sigma_{\ell+j}(b) - \sigma_\ell(b)]}{[g(a) + \sigma_k(a)] - [g(b) + \sigma_\ell(b)]} \geqslant -1 , \quad \forall\ a,b \in A,\ \forall\ j,k,\ell \in M \text{ tels que } \begin{cases} k+j \leqslant m , \\ \ell+j \leqslant m . \end{cases} \right.$$

THEOREME III.B.1. Soit A un ensemble dénombrable et $(<_o, <_1 \ldots <_m)$ un ensemble de m+1 relations sur A.
Une condition nécessaire et suffisante pour que la propriété P_2 soit satisfaite est que $(<_o, <_1 \ldots <_m)$ soit un Q.O.O.G.

THEOREME III.B.2. Si $(<_o \ldots <_m)$ est un Q.O.O.G. sur A et si A/_ est dénombrable, alors les propriétés P_1 et P_2 sont satisfaites.

THEOREME III.B.3. Soit A un ensemble dénombrable et $(\sim, <_1 \ldots <_m)$ un ensemble de m+1 relations sur A.
Une condition nécessaire et suffisante pour que la propriété P_4 soit satisfaite est que $(\sim, <_1 \ldots <_m)$ soit un Q.O.G.

THEOREME III.B.4. Si $(\sim, <_1 \ldots <_m)$ est un Q.O.G. sur A et si $A/_\approx$ est dénombrable, alors les propriétés P_3 et P_4 sont satisfaites.

C. CAS NON DENOMBRABLE.

THEOREME III.C.1. Soit A un ensemble quelconque et $(<_o, <_1, \ldots, <_m)$ un ensemble de m+1 relations sur A.
Si $(<_o, <_1 \ldots <_m)$ est un Q.O.O.G. et s'il existe un sous-ensemble dénombrable L' de A/_ tel que, $\forall$ a', b' $\in$ A/_ \ L', $\forall\ k \in M^o$:

$$(a) : a' \underline{<'_k}\ b' \Rightarrow \exists\ \ell' \in L' \mid a' \underline{<'_o}\ \ell' \underline{<'_k}\ b' ,$$

$$(b) : a' \underline{\not<'_k}\ b' \Rightarrow \exists\ \ell' \in L' \mid a' \underline{\not<'_k}\ \ell' ,\ b' \underline{<'_o}\ \ell' ,$$

alors les propriétés P_1 et P_2 sont satisfaites.

THEOREME III.C.2. Analogue au théorème III.C.1. mais la condition (a) est remplacée par :

$$(a') : a' \underline{<'_k}\ b' \Rightarrow \exists\ \ell' \in L' \mid a' \underline{<'_k}\ \ell' \underline{<'_o}\ b' .$$

THEOREME III.C.3. Soit A un ensemble quelconque et $(<_o, <_1 \dots <_m)$ un ensemble de $m+1$ relations sur A.
Si la propriété P_2 est satisfaite, alors $(<_o, <_1 \dots <_m)$ est un Q.O.O.G. et il existe un sous-ensemble dénombrable L' de $A/\_$ tel que, $\forall\, a', b' \in A/\_ \setminus L'$, $\forall\, k \in M^o$:

$$(a) : a' \underline{<'_k} b' \Rightarrow \exists\, \ell' \in L' \mid a' \underline{<'_o} \ell' \underline{<'_k} b' .$$

THEOREME III.C.4. Analogue au théorème III.C.3. mais la condition (a) est remplacée par (a').

THEOREME III.C.5. Soit A un ensemble quelconque et $(<_o, <_1 \dots <_m)$ un Q.O.O.G. sur A.
Une condition nécessaire et suffisante pour que la propriété P_1 soit satisfaite est qu'il existe un sous-ensemble dénombrable L' de $A/\_$ tel que, $\forall\, a',b' \in A/\_ \setminus L'$, $\forall\, k \in M^o$:

$$(a) : a' \underline{<'_k} b' \Rightarrow \exists\, \ell' \in L' \mid a' \underline{<'_o} \ell' \underline{<'_k} b' ,$$

$$(b) : a' \underline{\not<'_k} b' \Rightarrow \exists\, \ell' \in L' \mid a' \underline{\not<'_k} \ell' , b' \underline{<'_o} \ell' .$$

THEOREME III.C.6. Analogue au théorème III.C.5. mais la condition (a) est remplacée par (a').

THEOREME III.C.7. Soit A un ensemble quelconque et $(\sim, <_1, \dots <_m)$ un ensemble de $m+1$ relations sur A.
Si $(\sim, <_1 \dots <_m)$ est un Q.O.G. et s'il existe un sous-ensemble dénombrable L' de $A/_{\approx}$ tel que, $\forall\, a', b' \in A/_{\approx} \setminus L'$, $\forall\, k \in M$:

$$(a1) : a' \underline{<'_k} b' \Rightarrow \exists\, \ell' \in L' \mid a' \underline{\leq'} \ell' \underline{<'_k} b' ,$$

$$(a2) : a' \underline{\leq'} b', a' \neq b' \Rightarrow \exists\, \ell' \in L' \mid a' \underline{\leq'} \ell' \underline{\leq'} b' ,$$

et

$$(b1) : a' \underline{\not<'_k} b' \Rightarrow \exists\, \ell' \in L' \mid a' \underline{\not<'_k} \ell', b' \underline{\leq'} \ell' ,$$

$$(b2) : a' \underline{\not\leq'} b', a' \neq b' \Rightarrow \exists\, \ell' \in L' \mid a' \underline{\not\leq'} \ell', b' \underline{\leq'} \ell' ,$$

alors les propriétés P_3 et P_4 sont satisfaites.

THEOREME III.C.8. Analogue au théorème III.C.7. mais la condition (a1) est remplacée par

$$(a'1) : a' \underline{<'_k} b' \Rightarrow \exists\, \ell' \in L' \mid a' \underline{<'_k} \ell' \underline{\sim}' b' .$$

THEOREME III.C.9. Soit A un ensemble quelconque et $(\sim, <_1 \dots <_m)$ un ensemble de m+1 relations sur A.
Si la propriété P_4 est satisfaite, alors $(\sim, <_1 \dots <_m)$ est un Q.O.G. et il existe un sous-ensemble dénombrable L' de $A/_{\approx}$ tel que $\forall$ a', b' $\in A/_{\approx} \setminus L'$, $\forall k \in M$:

$$(a1) : a' \underline{<'_k} b' \Rightarrow \exists\, \ell' \in L' \mid a' \underline{\sim}' \ell' \underline{<'_k} b' ,$$

$$(a2) : a' \underline{\sim}' b',\ a' \neq b' \Rightarrow \exists\, \ell' \in L' \mid a' \underline{\sim}' \ell' \underline{\sim}' b' .$$

THEOREME III.C.10. Analogue au théorème III.C.9. mais la condition (a1) est remplacée par (a'1).

THEOREME III.C.11. Soit A un ensemble quelconque et $(\sim, <_1 \dots <_m)$ un Q.O.G. sur A. Une condition nécessaire et suffisante pour que la propriété P_3 soit satisfaite est qu'il existe un sous-ensemble dénombrable L' de $A/_{\approx}$ tel que, $\forall$ a', b' $\in A/_{\approx} \setminus L'$, $\forall k \in M$:

$$(a1)\ a' \underline{<'_k} b' \Rightarrow \exists\, \ell' \in L' \mid a' \underline{\sim}' \ell' \underline{<'_k} b' ,$$

$$(a2)\ a' \underline{\sim}' b',\ a' \neq b' \Rightarrow \exists\, \ell' \in L' \mid a' \underline{\sim}' \ell' \underline{\sim}' b' ,$$

et

$$(b1)\ a' \underline{\not<'_k} b' \Rightarrow \exists\, \ell' \in L' \mid a' \underline{\not<'_k} \ell',\ b' \underline{\sim}' \ell' ,$$

$$(b2)\ a' \underline{\not\sim}' b',\ a' \neq b' \Rightarrow \exists\, \ell' \in L' \mid a' \underline{\not\sim}' \ell';\ b' \underline{\sim}' \ell' .$$

THEOREME III.C.12. Analogue au théorème III.C.11. mais la condition (a1) est remplacée par (a'1).

D. COMMENTAIRES.

1. Les résultats précédents consistent donc à attribuer à chaque élément a de A, une valeur principale g(a) et un ensemble de seuils $\sigma_1(a)$, ... $\sigma_m(a)$ qui définissent les différents degrés de préférence par rapport à l'action a. Bien entendu, ces fonctions doivent satisfaire à un minimum de cohérence. Les

conditions sur les fonctions σ_i qui apparaissent dans les définitions ci-dessus généralisent la condition (1) vue dans la première partie de cet article.

- Les conditions

$$\begin{cases} - \ 0 = \sigma_o(a) \leq \sigma_1(a) \leq \dots \leq \sigma_m(a), \ \forall \ a \in A \ ; \\ - \ \dfrac{[\sigma_{k+j}(a) - \sigma_k(a)] - [\sigma_{\ell+j}(b) - \sigma_\ell(b)]}{[g(a) + \sigma_k(a)] - [g(b) + \sigma_\ell(b)]} \geq -1 \ , \\ \qquad \forall \ a,b \in A, \ \forall \ j,k,\ell \in M^o \text{ tels que } \begin{cases} k+j \leq m \ , \\ \ell+j \leq m \ , \end{cases} \end{cases}$$

seront appelées conditions de cohérence larges; elles peuvent encore s'exprimer :

$$\begin{cases} - \ 0 = \sigma_o(a) \leq \sigma_1(a) \leq \dots \leq \sigma_m(a), \ \forall \ a \in A \ ; \\ - \ \forall \ a,b \in A, \ \forall \ j,k,\ell \in M^o \text{ tels que } k+j \leq m \text{ et } \ell+j \leq m \ : \\ \qquad \begin{cases} g(a) + \sigma_k(a) < g(b) + \sigma_\ell(b) \Rightarrow g(a) + \sigma_{k+j}(a) \leq g(b) + \sigma_{\ell+j}(b) \ , \\ g(a) + \sigma_k(a) = g(b) + \sigma_\ell(b) \Rightarrow g(a) + \sigma_{k+j}(a) = g(b) + \sigma_{\ell+j}(b) \ . \end{cases} \end{cases}$$

- Les conditions

$$\begin{cases} - \ 0 = \sigma_o(a) < \sigma_1(a) < \dots < \sigma_m(a) \ , \ \forall \ a \in A \ ; \\ - \ \forall \ a,b \in A, \ \forall \ k,\ell \in M^o \ : \\ \qquad g(a) + \sigma_k(a) < g(b) + \sigma_\ell(b) \Leftrightarrow \\ \qquad\qquad \begin{cases} g(a) + \sigma_{k-\ell}(a) < g(b) \ , \text{ si } k \geq \ell \ , \\ g(a) < g(b) + \sigma_{\ell-k}(b) \ , \text{ si } k < \ell \ , \end{cases} \end{cases}$$

seront appelées conditions de cohérence strictes; elles peuvent encore s'exprimer :

$$\begin{cases} - \ 0 = \sigma_o(a) < \sigma_1(a) < \dots < \sigma_m(a) \ , \ \forall \ a \in A \ ; \\ - \ \forall \ a,b \in A, \ \forall \ j,k,\ell \in M^o \text{ tels que } k+j \leq m \text{ et } \ell+j \leq m \ ; \\ \qquad \begin{cases} g(a) + \sigma_k(a) < g(b) + \sigma_\ell(b) \Rightarrow g(a) + \sigma_{k+j}(a) < g(b) + \sigma_{\ell+j}(b) \ , \\ g(a) + \sigma_k(a) = g(b) + \sigma_\ell(b) \Rightarrow g(a) + \sigma_{k+j}(a) = g(b) + \sigma_{\ell+j}(b) \ , \end{cases} \end{cases}$$

ou encore,

$$\begin{cases} - \; 0 = \sigma_0(a) < \sigma_1(a) < \ldots < \sigma_m(a), \; \forall \; a \in A \; ; \\ - \; \dfrac{[\sigma_{k+j}(a) - \sigma_k(a)] - [\sigma_{\ell+j}(b) - \sigma_\ell(b)]}{[g(a) + \sigma_k(a)] - [g(b) + \sigma_\ell(b)]} > -1 \, , \\ \qquad \forall \; a,b \in A, \; \forall \; j,k,\ell \in M^o \text{ tels que } \; k+j \leq m \, , \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ell+j \leq m \, . \end{cases}$$

- Des fonctions satisfaisant aux conditions de cohérence strictes remplissent évidemment les conditions de cohérence large.

2. Les théorèmes III.C.1. et III.C.2. donnent des conditions suffisantes pour que les propriétés P_1 et P_2 soient satisfaites : on y retrouve d'une part la structure de Q.O.O.G. introduite au chapitre précédent, d'autre part une condition de densité du même type que celle du théorème de CANTOR.

Ces conditions ne sont qu'en partie nécessaires pour que P_1 et P_2 soient satisfaites.
D'une part, la propriété P_1 n'implique pas la structure de Q.O.O.G. (à cause des inégalités strictes) mais impose les conditions de densité (cf. théorèmes III.C.5. et III.C.6.).
D'autre part, la propriété P_2 implique la structure de Q.O.O.G. et une des conditions de densité (cf. théorèmes III.C.3. et III.C.4) mais n'exige pas la condition de densité (b), comme le montre l'exemple suivant :

Soit A = R et, $\forall$ a,b $\in$ A :

$$\begin{cases} a \prec_k b \text{ ssi } a+k < b \leq a+k+1, \; \forall \; k \in \{0,1,2, \ldots, m-1\} \, , \\ a \prec_m b \text{ ssi } a+m < b \, . \end{cases}$$

La propriété P_2 est satisfaite : il suffit de définir :

$$\begin{cases} g(a) = a, \; \forall \; a \in A \, , \\ \sigma_k(a) = k, \; \forall \; a \in A, \; \forall \; k \in \{0,1,2, \ldots m\} \, . \end{cases}$$

Soit a et b tels que

$$a + k = b :$$

nous avons $a \not\prec_{\underline{k}} b$, mais il est impossible qu'il existe un réel ℓ tel que

$$a \not\underline{<}_k \ell \text{ et } b \underline{<}_0 \ell ,$$

puisqu'il faudrait alors simultanément :

$$\begin{cases} a + k = b , \\ a + k \geq \ell , \\ b < \ell , \end{cases}$$

3. Lorsque A est dénombrable, la structure de Q.O.O.G. est nécessaire et suffisante pour que la propriété P_2 soit satisfaite (théorème III.B.1).

4. Les commentaires précédents sont analogues pour les théorèmes III.C.7. à III.C.12, à propos des Q.O.G. et des propriétés P3 et P4.

5. En utilisant la terminologie de B. ROY ([18]) :
- pour m = 0, les théorèmes III.C.1 à III.C.6, étudient les conditions pour avoir un vrai-critère;
- pour m = 1, ils étudient les conditions pour avoir un précritère;
- pour m = 1, les théorèmes III.C.7 à III.C.12 étudient les conditions pour avoir un quasi-critère;
- pour m = 2, ils étudient les conditions pour avoir un pseudo-critère.

6. Pour m = 0, les conditions suffisantes fournies par les théorèmes III.C.1 et III.C.2 et les conditions nécessaires fournies par les théorèmes III.C.3 et III.C.4 coïncident et donnent le théorème de CANTOR.

7. Le théorème I.2. est un cas particulier du théorème III.B.3 (cas où m = 1).

Signalons pour terminer que des résultats ont également été obtenus dans le cas où l'on suppose pouvoir comparer les intensités de préférence et dans le cas où les préférences sont définies sur des produits cartésiens d'ensembles ([21]). D'autre part, un texte paraîtra prochainement dans les Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Opérationnelle sur la caractérisation et la détermination des ordres totaux et des préordres totaux à distance minimum d'un quasi-ordre donné dans un ensemble fini.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BIRKHOFF, G. : *Lattice Theory*, American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. XXV, 1960.

[2] CANTOR, G. : "Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers", Dover Publications, New York, 1915.

[3] DEBREU, G. : "Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function", dans R.M. THRALL, C.H. COOMBS et R.L. DAVIS (Eds), *Decision Processes*, John Wiley and Sons, New York, 1954.

[4] DEBREU, G. : "Topological Methods in Cardinal Utility Theory", dans K.J. ARROW, S. KARLIN et P. SUPPES (Eds.), *Mathematical Methods in the Social Sciences*, 1959, Stanford University Press, Stanford, California, 1960.

[5] FISHBURN, P.C. : "Utility Theory", *Management Science*, Vol.14, n°5, 1968.

[6] FISHBURN, P.C. : "Intransitive indifference in preference theory : a survey" *Operations Research*, Vol.18, n°2, 1970.

[7] FISHBURN, P.C. : *Utility Theory for decision making*, J. Wiley and Sons, New York, 1970.

[8] FISHBURN, P.C. : "Utility Theory with inexact preferences and degrees of preference", *Synthese*, Vol. 21, 1970.

[9] JACQUET-LAGREZE, E. : "How we can use the notion of Semiorders to build Outranking Relations in Multicriteria Decision Making", Utility, Subjective Probability and Human Decision Making - A selection of papers presented at an interdisciplinary research conference, Rome, September 3-6, 1973, edited by D. WENDT and C. VLEK, 1975.

[10] JACQUET-LAGREZE, E. : "La modélisation des préférences, préordres, quasi-ordres et relations floues", Thèse, Université Paris V, 1975.

[11] JAFFRAY, J.-Y. : "Une démonstration élémentaire de l'existence d'une fonction d'utilité continue", *Bulletin de Mathématiques Economiques*, n°10, 1973.

[12] JAMISON, D.T. et LAU, L.J. : "Semiorders and the theory of Choice", *Econometrica*, Vol. 41, n°5, 1973.

[13] LUCE, R.D. : "Semiorders and a theory of utility discrimination", *Econometrica*, Vol. 24, 1956.

[14] MENUET, J. : "Quasi-ordres et modélisation des préférences", *SEMA* (Metra International), Direction Scientifique, Note de Travail n°197, 1974.

[15] MILGRAM, A.N. : "Partially Ordered Sets, Separating Systems and Inductiveness", dans K. MENGER (Ed.), *Reports of a Mathematical Colloquium*, Second Series, Number 1, University of Notre-Dame, 1939.

[16] ROBERTS, F.S. : "Homogeneous Families of Semiorders and the Theory of Probabilistic Consistency", *Journal of Mathematical Psychology*, 8, 1971.

[17] ROBERTS, F.S. : "On the compatibility between a graph and a simple order", The RAND Corp., Memorandum RM-5778-PR, 1968, and *J. of Combinatorial Theory*, 11, 1971.

[18] ROY, B. : "Vers une méthodologie générale d'aide à la décision", *SEMA* (Metra International), Direction Scientifique, Rapport de Synthèse n°87', 1975.

[19] ROY, B. : "ELECTRE III : Un algorithme de classements fondé sur une représentation floue des préférences en présence de critères multiples", *Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Opérationnelle*, Vol. 20, n°1, 1978.

[20] ROY, B. : "A Conceptual Framework for a Normative Theory of "Decision-Aid", présenté au XXIIe Congrès International du T.I.M.S., Kyoto, 24-26 juillet 1975, à paraître dans *Management Science*.

[21] VINCKE, Ph. : "Concept de quasi-ordre généralisé et théorèmes de représentation", Thèse de doctorat, Université Libre de Bruxelles, 1976.

[22] VINCKE, Ph. : "Quasi-ordres généralisés et modélisation des préférences", *LAMSADE*, Université Paris IX Dauphine, n°9, Avril 1977.