MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

C. FLAMENT

Un théorème de point fixe dans les treillis

Mathématiques et sciences humaines, tome 61 (1978), p. 61-64

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1978__61__61_0>

Math. Sci. hum. (*16*[e] année, n°61, *1978*, p.61-64)

UN THEOREME DE POINT FIXE DANS LES TREILLIS

C. FLAMENT*

1. RESUME

Tarski (1955, théorème 1) a montré que l'ensemble des points fixes d'une application isotone dans un treillis complet était non vide et constituait un treillis pour l'ordre du treillis initial (cf. Szasz, 1971, pp. 52-53).

Nous étudions le cas où l'application est de plus, extensive. On trouve que l'ensemble des points fixes est le sous-demi-treillis inférieur des fermés d'une fermeture, supérieure ou égale à toutes les puissances de l'application.

2. RAPPELS

Nous appelons un *opérateur* f dans un ensemble ordonné P une application isotone ($x, y \in P : x \leqslant y \Rightarrow fx \leqslant fy$) et extensive ($\forall x \in P : x \leqslant fx$).

Une *fermeture* φ dans un ensemble ordonné P est un opérateur idempotent ($\forall x \in P : \varphi \varphi x = \varphi x$).

Un ensemble ordonné P vérifie la *condition de chaîne ascendante* si toute suite strictement croissante d'éléments de P est finie (Szasz, 1971, p.14).

3. THEOREME

Soit f un opérateur sur P, demi-treillis supérieur complet. Il existe dans P une fermeture φ, dont les fermés sont les points fixes de f, et, pour tout x de P, et tout entier k, on a : $f^k x \leqslant \varphi x$. Si, de plus, P vérifie la condition de chaîne ascendante, il existe un entier h tel que $f^h = \varphi$.

4. DEMONSTRATION

4.1. P étant sup-complet, u = max (P) existe, et $fu \leqslant u$; mais, f étant extensive, $u \leqslant fu$; donc, $u = fu$ est un point fixe de f, majorant tout élément

* Département de Psychologie, Université de Provence.

de P. Il s'ensuit que pour tout a de P, l'ensemble $F_a = \{x : x \in P,\ fx = x \geqslant a\}$ des points fixes majorant a n'est pas vide.

Soit G_a l'ensemble des minorants de F_a ; G_a n'est pas vide, puisque a minore F_a. P étant sup-complet, $b = \sup(G_a)$ existe, et est évidemment le plus grand des minorants de F_a : $b = \sup(G_a) = \inf(F_a)$.

Pour tout x de F_a, on a : $a \leqslant b \leqslant x$, et, par l'isotonie de f : $fa \leqslant fb \leqslant fx = x$ (puisque les éléments de F_a sont des points fixes) ; il s'ensuit que fb minore F_a, et, comme f est extensive, on obtient : $b \leqslant fb \leqslant b = \inf(F_a)$ ... donc, b est un point fixe majorant a, et on a : $b = \min(F_a)$.

4.2. Soit $\varphi x = \min(F_x)$, pour tout x de P. Montrons que φ est une fermeture : si $x \leqslant \varphi y$, on a : $\varphi y \in F_x$ et donc, $\varphi x \leqslant \varphi y$; inversement, puisque $x \leqslant \varphi x$, on a : $\varphi x \leqslant \varphi y \Rightarrow x \leqslant \varphi y$; ainsi, on vérifie la relation de Morgado (1962) :

$$x \leqslant \varphi y \iff \varphi x \leqslant \varphi y,$$

qui est caractéristique d'une fermeture.

Par construction, un fermé pour φ est un point fixe de f ; réciproquement, tout point fixe de f est un fermé : $fx = x$ entraîne : $x = \min(F_x) = \varphi x$.

4.3. Pour tout entier k, f^k est isotone, et a les mêmes points fixes que f ; donc : $x \leqslant \varphi x$ entraîne :

$$f^k x \leqslant f^k(\varphi x) = \varphi x.$$

Par l'extensivité de f, on a : $x \leqslant fx \leqslant f^2x \leqslant \cdots \leqslant \varphi x$, si P vérifie la condition de chaîne ascendante, cette série est strictement croissante (puisque l'égalité entre deux termes désigne un point fixe), et est finie ; donc, pour chaque x de P, il existe un entier k(x) tel que : $f^{k(x)}\, x = \varphi x$; on pose : $h = \max\limits_{x \in p} \{k(x)\}$, et on obtient $f^h = \varphi$.

5. COROLLAIRE

Si f est un opérateur dans un treillis complet P, l'ensemble de ses points fixes est un treillis complet pour l'ordre de P ; c'est, de plus, un *sous-demi-treillis* inférieur de P.

Cela résulte de ce que, pour toute fermeture dans P, l'ensemble des fermés est un treillis complet pour l'ordre de P, sous-demi-treillis inférieur de P (Szasz, 1971, théorème 25).

6. APPLICATIONS

6.1. En psychologie mathématique, il arrive qu'on ait des informations relatives aux *paires* d'éléments d'un ensemble (fini) X, qu'on souhaite plonger dans un système plus général sur X, par exemple, en considérant une fermeture sur $\mathcal{P}(X)$ (cf. Flament, 1977).

Soit $\mathcal{P}_2(X) = \{p,q,\ldots\}$ l'ensemble des paires de X, et g une application de cet ensemble dans $\mathcal{P}(X)$, vérifiant : $p \subset gq \Longleftrightarrow gp \subset gq$ (relation de Morgado réduite aux paires).

Définissons une application f de $\mathcal{P}(X)$ dans lui-même :

$$f\,\emptyset = \emptyset \quad ; \; fx = x \; (x \in X) \; ;$$
$$f\,p = gp \; (p \in \mathcal{P}_2(X)) \; ;$$
$$f\,A = \bigcup_{p \subset A} gp \; (A \subset X)$$

Pour toute partie A, B de X, comportant au moins deux éléments, on a :

$$A = \bigcup_{p \subset A} p \subset \bigcup_{p \subset A} gp = fA \text{ (extensivité)};$$

$$A \subset B \Rightarrow f\,A = \bigcup_{p \subset A} gp \subset ((\bigcup_{p \subset A} gp) \cup (\bigcup_{q \subset B} gq)) = fB \text{ (isotonie) ;}$$

On vérifie facilement ces deux propriétés lorsque A et B ont moins de deux éléments.

Donc, f est un opérateur dans le treillis fini $\mathcal{P}(X)$, et on applique le théorème : il existe une fermeture φ et un entier k tel que $f^k = \varphi$.

Il faut vérifier que g est la restriction de φ à l'ensemble des paires; il suffit de montrer que toute partie gp de X est un point fixe pour f, car alors : $gp = fgp = ffp \Rightarrow gp = f^k p = \varphi\, p$.
On a : $q \subset fp \Rightarrow q \subset gp \Rightarrow gq \subset gp$, et donc : $\bigcup_{q \subset fp} gq \subset gp$, c'est-à-dire, $ffp \subset fp$; et, avec l'extensivité de f, on obtient : $ffp = fp$.

6.2. Certains algorithmes peuvent être vus comme des opérateurs sur un treillis. Par exemple (Degenne, Flament, Vergès, 1978), des données constituent un tableau booléen X.Y ; la correspondance de Galois associée à ce tableau (cf. Barbut, Monjardet, Chap. 5, 1970) permet de définir une fermeture γ sur $\mathcal{P}(X)$. On s'intéresse aux partitions $(C_i)_{i \in I}$ de X dont chaque classe est γ-fermée : $\gamma\, C_i = C_i \; (i \in I)$.

L'algorithme considère une partition quelconque de X, $(C_i)_{i \in I}$, et procède en deux étapes :

1) On construit la famille de fermés $(\gamma\, C_i)_{i \in I}$, qui n'est une partition

que si tous les C_i sont fermés ;
2) Si deux fermés distincts intersectent, on les réunit, ce qui conduit à définir une nouvelle classification sur X, dont les classes ne sont pas forcément γ-fermées.

Cet algorithme fait correspondre à toute partition une partition unique ; on peut donc le décrire comme une application f dans le treillis $\mathcal{C}$ des partitions de X ordonnées par la relation de finesse (cf. Barbut, Monjardet, Chap. 7, 1970).

On voit tout de suite que :
. les points fixes de f sont les partitions solution de notre problème ;
. f est extensive.

Montrons l'isotonie : soit $C = (C_i)_{i \in I}$ et $D = (D_j)_{j \in J}$ deux partitions sur X , en relation de finesse : $C \leqslant D$, c'est-à-dire : $\forall\, i \in I, \exists\, j \in J : C_i \subset D_j$; la relation de finesse est maintenue par l'étape 1 de l'algorithme, puisque γ est isotone ; $C_i \subset D_j \Rightarrow \gamma\, C_i \subset \gamma\, D_j$; si, en étape 2, on agrège $\gamma\, C_i$ et $\gamma\, C_k$ parce que $\gamma\, C_i \cap \gamma\, C_k \neq \emptyset$, on a (si $C_i \subset D_j$, $C_k \subset D_h$) : $\gamma\, C_i \cap \gamma\, C_k \subset \gamma\, D_j \cap \gamma\, D_h$, et on agrège $\gamma\, D_j$ et $\gamma\, D_h$; en définitive, on a bien : $C \leqslant D \Rightarrow fC \leqslant fD$.

BIBLIOGRAPHIE

BARBUT, M., MONJARDET, B., *Ordre et classification*, (vol.2), Paris, Hachette, 1970.

DEGENNE,A., FLAMENT,C., VERGES, P., "Approche galoisienne en classification", *Statistique et Analyse des données*, 1978.

FLAMENT, C., "A model for similarity judgments", *8th European Mathematical Psychology Meeting*, Saarbrücken, Sept. 1977.

MORGADO, J., "A characterization of the closure operators by the means of one axiom", *Portugal. Math.*, *21*, 155-156, 1962.

SZASZ, G., *Théorie des treillis*, Paris, Dunod, 1971.

TARSKI, A., "A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications", *Pacific J. Math.*, *5*, 285-309, 1955.