Mathématiques et sciences humaines

D. Defays

Analyse hiérarchique des préférences et généralisations de la transitivité

Mathématiques et sciences humaines, tome 61 (1978), p. 5-27
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1978__61__5_0>

Math. Sci. hum. (*16*^{e} année, n°61, *1978*, p.5-27)

ANALYSE HIERARCHIQUE DES PREFERENCES ET GENERALISATIONS DE LA TRANSITIVITE

D.DEFAYS*

De nombreux problèmes en analyse ordinale débouchent sur une quantification (ou du moins un rangement) des préférences. Ainsi, si E est un ensemble fini d'objets entre lesquels on établit des préférences, on est souvent amené, pour chiffrer les choix exprimés, à définir une application $R(.,.)$ de ExE dans R^+, $R(x,y) \geqslant R(u,v)$ signifiant généralement que x est "plus préféré" à y que u ne l'est à v. Associer à $R(.,.)$ un ordre, un préordre, un quasi-ordre est un problème classique de l'analyse des préférences. Dans cet article, nous introduisons des modes de représentation différents : des algorithmes qui permettent d'associer à une matrice de préférences une suite d'ordres ou de préordres emboîtés sont établis ; la notion de préordre est ensuite généralisée en définissant un nouveau type de transitivité.

Notre démarche est à rapprocher de celle qui a été suivie par Roberts et Jacquet-Lagreze. Ces auteurs travaillent, en fait, dans un contexte plus particulier; ils supposent que, pour tous $x,y \in E$, $R(x,y) \geqslant 0$ et $R(x,y) + R(y,x) = 1$ (*). La transitivité se définit alors comme suit : pour tous $x,y,z \in E$, si $R(x,y)$ et

*Université de Liège, Belgique.

$R(y,z)$ sont supérieurs ou égaux à 0,5, on doit avoir $R(x,z) \geq \sup\{R(x,y),R(y,z)\}$. On appelle cette propriété la transitivité stochastique. Roberts a montré, entre autres, que si $R(.,.)$ est stochastiquement transitif, on pouvait lui associer une suite de quasi-ordres emboîtés (9). Jacquet-Lagreze a étudié le problème de la recherche d'une relation stochastiquement transitive à distance minimum d'une matrice de préférences. Il l'a résolu dans un cas particulier (6). Notre définition de la transitivité ne requiert pas (*). En fait, nous reprenons essentiellement la définition proposée par Zadeh et Kaufmann (8) : pour tous $x,y,z \in E$, $R(x,z) \geq \inf\{R(x,y),R(y,z)\}$. De manière assez paradoxale, on peut montrer que lorsque (*) est satisfait, la transitivité au sens de Zadeh est plus particulière que la transitivité stochastique ; on peut en effet prouver que si (*) est satisfait, $R(.,.)$ est transitif (au sens de Zadeh) si et seulement si, pour tous x,y,z tels que $R(x,y)$ et $R(y,z)$ soient supérieurs ou égaux à 0,5 , on a $R(x,z) = \sup\{R(x,y),R(y,z)\}$ (ce qui est plus fort que la transitivité stochastique). Rappelons encore que nous avons nous-mêmes, dans le contexte de l'analyse des questionnaires, présenté une méthode permettant d'associer à $R(.,.)$ un rangement des objets de E sur un axe, les distances entre les objets étant proportionnelles aux différences de préférences.

Les structures que nous proposons dans cet article sont plus générales. Leur intérêt est de traduire non pas un seul ordre ou préordre sous-jacent aux données, mais une série emboîtée de telles relations, chacune de ces relations correspondant à des ordres de préférence (ou de difficulté, de priorité, d'antériorité ...) différents. On établit ainsi une hiérarchie sur les objets de E mais aussi sur les différentes relations entre ces objets.

Pour des raisons de commodité, nous utilisons le formalisme de la théorie des sous-ensembles flous. Les méthodes proposées sont pour la plupart, l'adaptation aux préordres flous de méthodes précédemment établies pour les préordres.

Nous donnons dans le paragraphe 1 les notions élémentaires de la théorie des sous-ensembles flous nécessaires pour l'établissement de nos résultats. Le paragraphe 2 présente deux algorithmes permettant d'obtenir rapidement une suite de préodres emboîtés à partir d'une matrice de préférences. Le troisième paragraphe est consacré au développement d'une généralisation de la transitivité : une première partie théorique est complétée par des résultats permettant d'obtenir les structures étudiées. Un exemple illustratif est présenté dans un quatrième paragraphe.

1. RAPPEL

Si E est un ensemble fini et A(.) une application de E dans N, l'ensemble $\underset{\sim}{A} = \{(x, A(x)) \mid x \in E\}$ est le sous-ensemble flou correspondant à l'application A(.).

Si $\underset{\sim}{A}$ et $\underset{\sim}{B}$ sont deux sous-ensembles flous définis sur E,

- $\underset{\sim}{A} \subset \underset{\sim}{B}$ si et seulement si pour tout $x \in E$, $A(x) \leq B(x)$.
- $\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} = \{(x, \inf\{A(x), B(x)\}) \mid x \in E\}$.
- $\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B} = \{(x, \sup\{A(x), B(x)\}) \mid x \in E\}$.

Les relations floues s'introduisent de manière analogue. Soit R(.,.) une application de $E_1 \times E_2$ dans N. L'ensemble $\underset{\sim}{R} = \{(x, y, R(x,y)) \mid x \in E_1, y \in E_2\}$ est dit relation floue de E_1 vers E_2 correspondant à l'application R(.,.). Une relation floue est donc essentiellement une relation au sens habituel du mot, où les liaisons sont pondérées.

Les relations floues peuvent aussi se composer. Soient $\underset{\sim}{R}_1$ défini sur $E_1 \times E_2$ et $\underset{\sim}{R}_2$ défini sur $E_2 \times E_3$. Leur composée $\underset{\sim}{R}_2 \circ \underset{\sim}{R}_1$, relation floue de E_1 vers E_3, est définie par

$$R_2 \circ R_1(x,y) = \sup\left\{\inf\{R_1(x,z),R_2(z,y)\} \mid z \in E_2\right\}.$$

o est associatif. Une relation floue de E vers E sera appelée brièvement "sur E".

Si $\underset{\sim}{R}$ est une relation floue sur E,

- $\underset{\sim}{R}$ est réflexif si et seulement si pour tous $x,y \in E$, les $R(x,x)$ sont égaux et $R(x,y) < R(x,x)$ si $x \neq y$.
- $\underset{\sim}{R}$ est antisymétrique si et seulement si pour tous $x,y \in E$, $R(x,y).R(y,x) = 0$ lorsque $x \neq y$.
- $\underset{\sim}{R}$ est transitif si et seulement si pour tous $x,y,z \in E$, $R(x,y) \geqslant \inf\{R(x,z),R(z,y)\}$, c'est à dire si et seulement si $\underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{R} \subset \underset{\sim}{R}$.

Une relation floue réflexive et transitive est un préordre flou. Un préordre flou antisymétrique est un ordre flou.

Si R est une relation au sens habituel du mot (nous dirons dans la suite relation vulgaire), on notera, pour tout $i \in N$,

$\underset{\sim}{iR} = \{(x,y,R(x,y)) \mid (x,y) \in ExE\}$, la relation floue où $R(x,y) = i$ si $(x,y) \in R$ et $R(x,y) = 0$ si $(x,y) \notin R$.

Rappelons enfin le théorème de décomposition : si $\underset{\sim}{R}$ est une relation floue sur E, alors $\underset{\sim}{R} = \bigcup_i \underset{\sim}{iR_i}$; R_i est la relation vulgaire définie comme suit : $(x,y) \in R_i$ si et seulement si $R(x,y) \geqslant i$.

Remarquons que si $\underset{\sim}{R}$ est transitif (antisymétrique), R_i est aussi transitif (antisymétrique si $i \neq 0$).

2. ALGORITHMES ENGENDRANT DES PREORDRES FLOUS

Si $R(.,.)$ est une application de ExE dans N chiffrant les préférences, la considérer comme la fonction d'appartenance d'une relation floue permet alors une formalisation aisée de certains problèmes. Pour des raisons de commodité, nous supposerons $\underset{\sim}{R}$ réflexif. Cette exigence n'a en fait rien d'essentiel et ne réduit absolument pas la généralité de notre exposé.

Approcher $\underset{\sim}{R}$ par un ordre ou un préordre est classique en analyse des préférences : de nombreuses méthodes ont été proposées. Nos préoccupations sont différentes : nous cherchons à associer à $\underset{\sim}{R}$ une structure plus riche : un ordre ou préordre flous. Le problème que nous venons de formuler peut se résoudre de différentes manières : nous allons en présenter deux. Les solutions que nous donnons ont le grand mérite de n'exiger en fait qu'une mesure ordinale des préférences. Plus précisément, toute modification des données (c'est à dire de l'application R) par une transformation monotone laissera inchangée, à la même transformation monotone près, la fonction d'appartenance du préordre obtenu. Le premier algorithme permet d'engendrer la fermeture transitive de $\underset{\sim}{R}$, c'est à dire le préordre flou supérieur à $\underset{\sim}{R}$ qui est minimum. Le second permet d'obtenir certains préordres flous inférieurs à $\underset{\sim}{R}$ et maximaux.

2.1 <u>Recherche de la fermeture transitive</u>

Si $\underset{\sim}{R}$ est une relation floue définie sur $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, en notant $\underset{\sim}{R}^2 = \underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{R}$, $\underset{\sim}{R}^3 = \underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{R}$, ... la relation

$$\overline{\underset{\sim}{R}} = \underset{\sim}{R} \cup \underset{\sim}{R}^2 \cup \underset{\sim}{R}^3 \cup \ \ldots \cup \underset{\sim}{R}^n,$$

est la plus petite des relations transitives incluant $\underset{\sim}{R}$ (8). Si $\underset{\sim}{R}$ est réflexif, on voit facilement que $\overline{\underset{\sim}{R}} = \underset{\sim}{R}^{n-1}$ et que par conséquent $\overline{\underset{\sim}{R}}$ s'obtient en s itérations (calculs de $\underset{\sim}{R}^2, \underset{\sim}{R}^4, \ldots, \underset{\sim}{R}^{2^s}$) avec $s < \log_2(n-1) + 1$.

Cette méthode n'est pourtant pas la plus rapide, comme l'a fait remarquer Tomescu dans le contexte plus particulier de la fermeture transitive d'un graphe fini. La méthode matricielle qu'il propose est facilement généralisable aux relations floues.

Introduisons l'opérateur T_{ij} $(i,j \in \{1,2, \ldots,n\})$

sur l'ensemble des relations floues réflexives sur E.

$$T_{ij}(\underset{\sim}{R}) = \underset{\sim}{R}' = \{(x_k, x_l, R'(x_k, x_l)) \mid k,l=1,2, \ldots, n\}$$

avec $R'(x_k,x_l) = R(x_k,x_l)$ si $(k,l) \neq (i,j)$ et $R'(x_i,x_j) = \sup\{\inf\{R(x_i,x_r), R(x_r,x_j)\} \mid x_r \in E\} = R^2(x_i,x_j)$.

Puisque $\underset{\sim}{R}$ est réflexif, on a pour tout i : $T_{ii}(\underset{\sim}{R}) = \underset{\sim}{R}$.

Définissons comme suit l'opérateur T :

$$T = \prod_{i \neq j} T_{ij} = T_{12} o T_{13} o \ldots o T_{1n} o T_{21} o \ldots o T_{2n} o \ldots o T_{(n-1)n}.$$

En fait, l'ordre des opérateurs dans le produit peut être quelconque ; les résultats établis dans ce qui suit en sont indépendants ; nous l'avons fixé pour la simplicité de l'exposé. Remarquons toutefois que changer l'ordre des opérateurs revient à changer l'opérateur T.

Il est facile de montrer que pour tout $q \in N$, $\underset{\sim}{R}^{2^q} \subset T^q(\underset{\sim}{R})$ et que si q est le plus petit indice pour lequel $2^q \geq n-1$, on a $\overline{\underset{\sim}{R}} = \underset{\sim}{R}^{2^q} = T^q(\underset{\sim}{R})$. $\overline{\underset{\sim}{R}}$ s'obtient donc au moins aussi vite avec l'opérateur T que via le calcul de $\underset{\sim}{R}^2, \underset{\sim}{R}^4, \ldots, \underset{\sim}{R}^{2^q}$.

La démonstration de ces résultats est en fait une simple généralisation aux relations floues de ce qui se trouve dans (10). Elle ne sera donc pas donnée.

Approcher une relation $\underset{\sim}{R}$ par un préordre flou supérieur impose de surestimer certaines des relations entre objets. Si dans certains cas cela n'est pas trop gênant, il existe des situations où la relation obtenue est très diférente de la relation de départ $\underset{\sim}{R}$. On peut alors approcher $\underset{\sim}{R}$ par un (ou des) préordre(s) flou(s) inférieur(s) maximal(aux). Il faut souligner ici que l'ensemble des préordres flous inférieurs à $\underset{\sim}{R}$ ne possède malheureusement pas d'élément maximum !

2.2 Recherche de préordres flous inférieurs maximaux

Dans le cadre des relations vulgaires, C.Heuchenne a présenté un algorithme permettant d'engendrer à partir d'une relation donnée toutes les sous-relations transitives maximales (4). Sa méthode est généralisable mais devient malheureusement très lourde. De plus, elle fournit des relations transitives non maximales et des relations non transitives. Par contre, un autre de ses algorithmes permettant d'obtenir récursivement une sous-relation transitive maximale particulière nous a inspiré une construction rapide d'un préordre flou, inférieur maximal.

L'algorithme que nous proposons construit récursivement la fonction d'appartenance $L(.,.)$ d'un préordre flou $\underset{\sim}{L}$, maximal, inférieur à une relation réflexive floue donnée. Ainsi, si $E = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$, on définit $L(x_1,x)$ pour tous les $x \in E$, puis $L(x_2,x)$ pour tous les $x \in E$, puis $L(x_3,x)$ ... jusque $L(x_n,x)$.

Si $\underset{\sim}{R}$ est la relation floue réflexive donnée, les $L(x_j,x)$ sont définis récursivement comme suit : pour $j = 0,1, \ldots, n-1$, posons

$$L(x_{j+1},x) = \inf\{R(x_{j+1},x), A(x), M_l(x) \mid l \leq j\}$$

où $A(x_l) = R(x_{j+1},x_l)$ si $l > j$;
$\qquad = \inf\{R(x_{j+1},x) \mid x : R(x_{j+1},x) < L(x_l,x)\}$ sinon ;
et où $M_l(x) = L(x_l,x)$ si
$\qquad L(x_l,x) < \inf\{L(x_l,x_{j+1}), R(x_{j+1},x)\}$;
$\qquad = R(x_{j+1},x)$ sinon.

Remarquons que les fonctions A et M_l varient avec j.

THEOREME 1

La relation $\underset{\sim}{L}$ ainsi construite est transitive.

Preuve : nous allons procéder par récurrence. A tout j associons une relation floue $\underset{\sim}{L}_{(j)}$ (à ne pas confondre avec la relation vulgaire L_j) déduite de $\underset{\sim}{L}$ comme suit :

$L_{(j)}(x_k,x) = L(x_k,x)$ pour tout $k \leq j$ et tout $x \in E$;

$L_{(j)}(x_k,x) = 0$ en les autres couples.

Démontrons par induction que, quel que soit j, $\underset{\sim}{L}_{(j)}$ est transitif. Si $j = 1$, l'énoncé est évident. Supposons le vrai pour j et démontrons qu'il l'est toujours pour j+1. Montrons donc que pour tous $x,y,z \in E$, $L_{(j+1)}(x,z) \geq \inf\{L_{(j+1)}(x,y),L_{(j+1)}(y,z)\}$. Quatre cas sont à envisager.

1° Si $x,y \in \{x_1,x_2, \dots,x_j\}$, c'est évident par la récurrence.

2° Si $x = y = x_{j+1}$, c'est toujours évident.

3° Si $x = x_l$ avec $l \leq j$ et si $y = x_{j+1}$, la thèse peut s'écrire $L(x_l,z) \geq \inf\{L(x_l,x_{j+1}),L(x_{j+1},z)\}$. Or par construction, $L(x_{j+1},z) \leq R(x_{j+1},z)$. Si $L(x_l,z) < \inf\{L(x_l,x_{j+1}),R(x_{j+1},z)\}$, on a $L(x_{j+1},z) \leq L(x_l,z)$ car $L(x_{j+1},z) < M_l(z)$ et le théorème est démontré ; si par contre $L(x_l,z) \geq \inf\{L(x_l,x_{j+1}),R(x_{j+1},z)\}$, la thèse est démontrée de manière évidente.

4° Si $y = x_l$ avec $l \leq j$ et si $x = x_{j+1}$, la thèse peut s'écrire $L(x_{j+1},z) \geq \inf\{L(x_{j+1},x_l),L(x_l,z)\}$. Ce dernier cas est légèrement plus difficile. Procédons par l'absurde et supposons que $L(x_{j+1},z) < L(x_{j+1},x_l)$ et $L(x_{j+1},z) < L(x_l,z)$. Si $L(x_{j+1},z) = R(x_{j+1},z)$, on a $R(x_{j+1},z) < L(x_l,z)$ et comme $L(x_{j+1},x_l) < A(x_l)$, on a $L(x_{j+1},x_l) \leq L(x_{j+1},z)$ ce qui est absurde. On a donc $L(x_{j+1},z) < R(x_{j+1},z)$. Deux cas sont alors possibles. Soit il existe $k \leq j$ avec $L(x_{j+1},z) = L(x_k,z) < \inf\{L(x_k,x_{j+1}),R(x_{j+1},z)\}$. Dans ce cas, en se servant du 3°, on a $L(x_k,x_l) \geq \inf\{L(x_k,x_{j+1}),L(x_{j+1},x_l)\}$; or $\inf\{L(x_k,x_{j+1}),L(x_{j+1},x_l)\} > L(x_{j+1},z)$, par conséquent en se servant de la récurrence et des inégalités précédentes, $L(x_k,z) \geq \inf\{L(x_k,x_l),L(x_l,z)\} > L(x_{j+1},z)$ ce qui est absurde. Soit $z = x_r$ avec $r \leq j$ et il existe $u \in E$ avec $L(x_{j+1},x_r) = A(x_r) =$

$R(x_{j+1},u) < L(x_r,u)$. Dans ce cas, en se servant toujours de la récurrence et des inégalités précédentes, on a : $L(x_l,u) \geqslant \inf\{L(x_l,x_r),L(x_r,u)\} > R(x_{j+1},u)$ et donc, comme $L(x_{j+1},x_l) \leqslant A(x_l)$, $L(x_{j+1},x_l) \leqslant R(x_{j+1},u)$ puisque $R(x_{j+1},u) < L(x_l,u)$, ce qui est absurde.

THEOREME 2

<u>La relation $\underset{\sim}{L}$ ainsi construite est une sous-relation transitive maximale.</u>

Preuve : $\underset{\sim}{L}$ est trivialement inclus dans $\underset{\sim}{R}$. Supposons qu'il existe une relation transitive $\underset{\sim}{T}$ telle que $\underset{\sim}{L} \subset \underset{\sim}{T} \subset \underset{\sim}{R}$ et montrons par récurrence que $\underset{\sim}{L} = \underset{\sim}{T}$.

On a évidemment $L(x_1,x) = T(x_1,x) = R(x_1,x)$ pour tout $x \in E$. Supposons que pour tout $l \leqslant j$ et tout $x \in E$, $L(x_l,x) = T(x_l,x)$ et montrons que l'on a toujours $L(x_{j+1},x) = T(x_{j+1},x)$ quel que soit $x \in E$.

On a, pour tout $y \in E$, $T(x_{j+1},y) \leqslant R(x_{j+1},y)$. De plus, si $y = x_l$ avec $l \leqslant j$, lorsque $R(x_{j+1},x) < L(x_l,x)$, comme $\underset{\sim}{T}$ est transitif, on a : $R(x_{j+1},x) \geqslant T(x_{j+1},x) \geqslant \inf\{T(x_{j+1},x_l),T(x_l,x)\} = \inf\{T(x_{j+1},x_l),L(x_l,x)\}$, et par conséquent $T(x_{j+1},x_l) \leqslant T(x_{j+1},x) \leqslant R(x_{j+1},x)$. On a donc, pour tout $y \in E$, $T(x_{j+1},y)$ inférieur au $A(y)$ défini à la $j+1^{e}$ itération. On voit encore que pour tout $l \leqslant j$, tel que $L(x_l,y) < \inf\{L(x_l,x_{j+1}),R(x_{j+1},y)\}$, on a par transitivité de $\underset{\sim}{T}$ et par récurrence, $L(x_l,y) = T(x_l,y) \geqslant \inf\{T(x_l,x_{j+1}),T(x_{j+1},y)\} = \inf\{L(x_l,x_{j+1}),T(x_{j+1},y)\}$. Par conséquent, $T(x_{j+1},y) \leqslant L(x_l,y)$. On a donc, pour tout $y \in E$, $T(x_{j+1},y) \leqslant M_l(y)$ et $T(x_{j+1},x) \leqslant L(x_{j+1},x)$ pour tout $x \in E$. Le théorème est ainsi démontré.

Notons que cet algorithme ne permet pas d'obtenir toutes les relations inférieures, transitives, maximales (4).

Il y a pourtant moyen d'agrandir la classe des préordres flous inférieurs maximaux ainsi obtenus. Il suffit de remarquer que si $\underset{\sim}{R}'$ est la relation $\underset{\sim}{R}$ inversée (c'est à dire que pour tous x,y, $R'(x,y)=R(y,x)$) et si $\underset{\sim}{L}'$ est un préordre inférieur à $\underset{\sim}{R}'$ et maximal, l'inverse $\underset{\sim}{L}$ de $\underset{\sim}{L}'$ est un préordre inférieur à $\underset{\sim}{R}$ et maximal. Appliquer notre algorithme à la relation $\underset{\sim}{R}'$ puis inverser les résultats obtenus permet visiblement d'agrandir la classe des préordres flous obtenus. Une caractérisation simple de la classe des préordres obtenus par notre algorithme (appliqué à $\underset{\sim}{R}$ puis à $\underset{\sim}{R}'$) ne semble pas possible. Remarquons toutefois qu'ils sont toujours tels qu'il existe $x \in E$ avec $L(x,y) = R(x,y)$ pour tout $y \in E$ ou $L(y,x) = R(y,x)$ pour tout $y \in E$; il en existe malheureusement qui échappent à cette construction comme le montre l'exemple qui suit. La relation floue $\underset{\sim}{R}$ donnée par la matrice

$\underset{\sim}{R}$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	2	0	0	1
x_2	1	2	1	0
x_3	0	1	2	1
x_4	1	0	0	2

admet le préordre flou

$\underset{\sim}{L}$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	2	0	0	0
x_2	1	2	0	0
x_3	0	0	2	1
x_4	0	0	0	2

comme préordre inférieur maximal, préordre qui ne peut être obtenu par notre algorithme quel que soit l'ordre de traitement des sommets.

Remarquons encore que dans la construction récurrente de $L(x_j,x)$, si $L(x_1,x) = R(x_1,x)$, pour tout $x \in E$, plus j est grand, plus la fonction d'appartenance $R(x_j,x)$ est susceptible d'être modifiée pour obtenir $L(x_j,x)$. En effet, pour sauvegarder la transitivité de $\underset{\sim}{L}$ à la j^e itération, il y a lieu de tenir compte entre autres de tout ce qui a été défini aux itérations précédentes. Si on veut obtenir une relation $\underset{\sim}{L}$ pas trop éloignée de $\underset{\sim}{R}$, il serait peut-être bon de numéroter les éléments de manière à ce que

$$\sum_{y \in E} R(x_1,y) \geq \sum_{y \in E} R(x_2,y) \geq \ \ldots \geq \sum_{y \in E} R(x_n,y).$$

3. GENERALISATIONS DE LA TRANSITIVITE

Nous avons examiné dans le paragraphe précédent deux méthodes permettant de déduire d'une relation floue réflexive des préordres flous. Malheureusement, dans certains cas, le préordre flou est une structure trop particulière ; l'exigence de transitivité est, semble-t-il, trop sévère. Différentes généralisations ont été proposées. Nous allons en citer deux introduites par Jardine et Sibson (7) et en étudier une autre déjà mentionnée par Hubert (5). En fait, ces auteurs travaillent sur des relations symétriques mais leurs concepts sont généralisables.

Soit R une relation vulgaire définie sur E. Appelons chaîne de R tout ensemble ordonné $(z_1,z_2, \ldots,z_l)$ (éléments de E non nécessairement tous distincts) tel que pour tout i et tout $j > i$, on ait $(z_i,z_j) \in R$.

On voit facilement que R est transitif si et seulement si, lorsque $(x,y, \ldots,z)$ et $(z,u, \ldots,v)$ sont des chaînes, $(x,y, \ldots,z,u, \ldots,v)$ est encore une chaîne. Dans certains contextes, cette exigence peut s'avérer fort lourde ; les données s'y prêtent difficilement. Pour pallier cet inconvénient, c'est à dire mieux épouser la structure des données, on peut proposer une première généralisation de la transitivité : une relation vulgaire R est k-transitive de type 1 si et seulement si, lorsque $(x,y,\ldots,z_1,z_2,\ldots,z_k)$ et $(z_1,z_2,\ldots,z_k,u,\ldots,v)$ sont des chaînes de R, $(x,y,\ldots,z_1,z_2,\ldots,z_k,u,\ldots,v)$ est encore une chaîne de R, si $z_1,z_2,\ldots,z_k$ sont k éléments distincts de E. Remarquons que l'exigence faiblit lorsque k augmente ; une relation 1-transitive de type 1 est une relation transitive au sens habituel du mot et une relation réflexive sur E ($|E| = n$) est toujours (n-1)-transitive de type 1. Cette k-transitivité de type 1 admet une définition plus simple : une relation vulgaire R est k-transitive de type 1 si et seulement si pour toute chaîne $(z_1,z_2,\ldots,z_k)$ d'éléments distincts, lorsque (x,z_i) et (z_i,y) appartiennent à R pour tout $i \leqslant k$, on a $(x,y) \in R$ si x et y appartiennent à E.

Une autre généralisation est possible : une relation vulgaire R est k-transitive de type 2 si et seulement si, pour tout $S \subset E$ tel que $|S| = k$, lorsque (x,z) et (z,y) appartiennent à R pour tout $z \in S$, on a $(x,y) \in R$ si x et y appartiennent à E. Dans cette dernière définition l'ensemble S est a priori amorphe alors que dans la définition de la k-transivité de type 1 S doit être structuré en chaîne. Une relation k-transitive de type 2 est évidemment k-transitive de type 1. La deuxième généralisation proposée exige donc que deux points liés par k chemins disjoints de longueur 2 soient liés entre eux, si on appelle chemin un ensemble ordonné de couples distincts de R , $(u_1,u_2,\ldots,u_q)$ où pour tout couple u_i $(i < q)$ l'extrémité du couple coïncide avec l'origine du couple u_{i+1}.

La restriction "de longueur 2" peut paraître un peu arbitraire. De plus, en notant $\overline{R}$ la fermeture k-transitive de type 2 d'une relation vulgaire R, si $(x,y) \in \overline{R} - R$, cela n'implique pas qu'il existe dans R k chemins disjoints de longueur 2 de x à y, mais plutôt, comme on le verra dans ce paragraphe, qu'il existe k chemins de x à y, ces chemins n'ayant deux à deux en commun que les sommets x et y (nous dirons qu'ils sont disjoints). La réciproque n'est malheureusement pas vraie.

Nous avons donc modifié comme suit la définition de la k-transitivité de type 2.
Une relation vulgaire R définie sur E est k-transitive de type 3 si et seulement si elle contient les couples (x,y) liés par k chemins disjoints.

Une relation k-transitive de type 3 est évidemment k-transitive de type 2 et k-transitive de type 1. Les deux premières généralisations ont été étudiées par Jardine et Sibson (7) et Defays (2) dans le cadre des relations symétriques. Nous ne développerons dans cet article que la dernière généralisation présentée.

Avec la définition classique de la transitivité, l'existence dans une relation R réflexive d'un seul chemin de x à y imposait au couple (x,y) d'appartenir à la fermeture transitive $\overline{R}$. Ainsi, par exemple, la structuration de E obtenue au moyen de la relation $\overline{R}$ était éventuellement tributaire de la présence dans E d'un seul élément z établissant une "jonction" entre une partie connexe de E contenant x et une partie connexe de E contenant y comme par exemple dans le graphe ci-dessous :

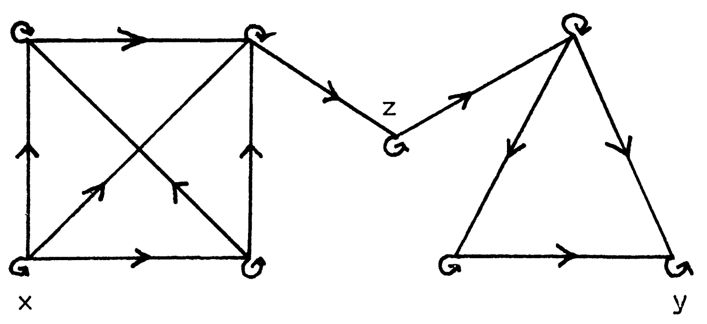


Figure 1. <u>Effet de chaînage</u>

Avec la définition adoptée ci-dessus, cet inconvénient bien connu ("chaining effect") est supprimé lorsque k > 1. Comme nous allons le montrer, une liaison de x à y n'est imposée dans la fermeture k-transitive de type 3 d'une relation R que pour autant qu'elle repose sur l'existence de k chemins disjoints liant x à y et par conséquent sur l'existence de k éléments distincts de E intervenant dans la jonction. En fait, un couple (x,y) n'appartiendra en propre à la fermeture k-transitive de type 3 d'une relation R que s'il faut éliminer de E au moins k éléments pour supprimer tout chemin de x à y. Comme on le démontrera en fin de paragraphe, en notant $\overline{R}$ la fermeture k-transitive de type 3 de R, $(x,y) \in \overline{R} - R$ si et seulement si il existe k chemins disjoints de longueur > 1 liant x à y. Ce théorème traduit l'intérêt de notre dernière généralisation.

Une illustration graphique peut aider à bien saisir la différence entre les trois types de transitivité. Les arcs en pointillés représentent les liaisons imposées par la k-transitivité.

Soit k = 3.

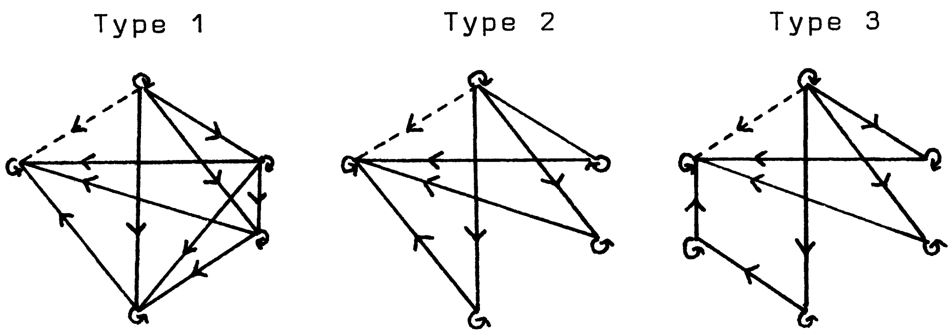


Figure 2. 3 Types de 3-transitivité

Nous omettrons lorsque c'est possible la spécification "de type 3". Les k-préordres et les k-ordres se définissent de manière naturelle : un k-préordre est une relation réflexive, k-transitive ; un k-ordre est un k-préordre antisymétrique.

Généralisons ces notions aux sous-ensembles flous.

Soit $\underset{\sim}{R}$ une relation floue définie sur E. Appelons valeur dans $\underset{\sim}{R}$ du chemin $(z_1, z_2, \ldots, z_l)$ de ExE, le nombre

$v(z_1, \ldots, z_l) = \inf\{R(z_1,z_2), R(z_2,z_3), \ldots, R(z_{l-1},z_l)\}$.

La relation $\underset{\sim}{R}$ est k-transitive de type 3 si et seulement si, pour tout couple (x,y) et tout ensemble de k chemins disjoints de x à y notés en abrégé $(x \ldots z_1 \ldots y)$, $(x \ldots z_2 \ldots y)$, ..., $(x \ldots z_k \ldots y)$, on a :

$R(x,y) \geqslant \inf\{v(x..z_1..y), v(x..z_2..y), \ldots, v(x..z_k..y)\}$.

Les k-préordres, k-ordres flous de type 3 s'introduisent de manière habituelle. La fermeture k-transitive de type 3 d'une relation floue $\underset{\sim}{R}$, notée $\overline{\underset{\sim}{R}}_k$, est l'intersection des relations k-transitives de type 3 comprenant $\underset{\sim}{R}$. Il s'agit visiblement bien d'une fermeture ; en effet, $\underset{\sim}{R} \subset \overline{R}_k$ (extensivité), l'intersection de relations k-transitives de type 3 étant k-transitive de type 3 on a $\overline{(\overline{\underset{\sim}{R}}_k)}_k = \overline{\underset{\sim}{R}}_k$ (idempotence), et enfin $\overline{\underset{\sim}{R}}_k \subset \overline{\underset{\sim}{S}}_k$ si $\underset{\sim}{R} \subset \underset{\sim}{S}$ (isotonie).

La fermeture k-transitive d'une relation vulgaire se définit de la même manière.

Présentons quelques propriétés intéressantes de la k-transitivité.

THEOREMES 2, 3, 4, 5

<u>Si $\underset{\sim}{R}$ est un k-préordre flou, on a $\underset{\sim}{R} = \overline{\underset{\sim}{R}}_k$.</u>

<u>$\underset{\sim}{R}$ est un k-préordre flou (resp. un k-ordre flou) si et seulement si $\underset{\sim}{R} = \bigcup_{i=1}^{S} i\underset{\sim}{R_i}$, les R_i étant des k-préordres (resp; des k-ordres) emboîtés ($R_{i+1} \subset R_i$) avec $R_S = \{(x,x) \mid x \in E\}$.</u>

<u>Si $\underset{\sim}{R}$ est une relation floue, $\overline{\underset{\sim}{R}}_k = \bigcup_i i(\overline{R_i})_k$, en notant $(\overline{R_i})_k$ la fermeture k-transitive de R_i.</u>

<u>Si $\underset{\sim}{L}$ et $\underset{\sim}{M}$ sont 2 k-préordres (resp. k-ordres) flous, alors $\underset{\sim}{L} \cap \underset{\sim}{M}$ est encore un k-préordre (resp. un k-ordre) flou.</u>

Les démonstrations de ces théorèmes sont quasi immédiates et ne sont pas données.

La définition de la fermeture k-transitive ne nous fournit malheureusement pas une méthode pour la construire. Les théorèmes qui suivent vont y remédier. Nous ne travaillerons au début que sur des relations vulgaires, nous généraliserons ensuite les énoncés établis.

Soit R une relation vulgaire définie sur E.

THEOREME 6

<u>Pour tout $(x,y) \notin R$, il existe au moins k chemins disjoints de x à y si et seulement si, pour tout $S \subset E$, tel que $|S| = k-1$ et $x \notin S$ et $y \notin S$, il existe encore dans E - S un chemin de x à y.</u>

Ce théorème bien connu en théorie des graphes (théorème de Menger) ne sera pas démontré.

THEOREME 7

<u>Si on note M la relation obtenue en ajoutant à R les couples (x,y) reliés dans R par k chemins disjoints, on a $M = \overline{R}_k$.</u>

Preuve : il suffit de démontrer que M est k-transitif. Soit x lié à y par k chemins disjoints. Soit S un ensemble tel que tout chemin de R de x à y passe par un point de S ($x \notin S, y \notin S$). Ou bien tout chemin de M de x à y passe par S et alors $|S| \geqslant k$. Ou bien il existe un tel chemin en dehors de S ; si (a_i, a_{i+1}) est un couple quelconque de ce chemin n'appartenant pas à R, il existe par construction de M, k chemins disjoints dans R reliant a_i à a_{i+1} ; si $|S| < k$, on voit immédiatement qu'il subsistera dans R un chemin de x à y n'ayant aucun sommet dans S, ce qui est absurde, donc $|S| \geqslant k$. Par le théorème 6, il existe dans R k chemins disjoints liant x à y ; donc $(x,y) \in M$ et M est k-transitif.

THEOREME 8

<u>$\overline{R}_k = \bigcap \{ (\overline{R_S} \cup (E\times S) \cup (S\times E)) \mid |S| = k-1, S \subset E \}$, R_S étant la restriction de R à E - S, $\overline{R_S}$ étant la fermeture transitive (au sens habituel du mot) de R_S.</u>

Preuve : montrons en premier lieu que $\overline{R}_k \subset \bigcap \{ (\overline{R_S} \cup (E\times S) \cup (S\times E)) \mid |S| = k-1, S \subset E \}$.

Si $(x,y) \in R$, alors, pour tout S tel que $|S| = k-1$, on a $(x,y) \in \overline{R_S} \cup (E\times S) \cup (S\times E)$.

Si $(x,y) \in \overline{R}_k - R$ et si $x \in S$ ou $y \in S$, on a $(x,y) \in (E\times S) \cup (S\times E)$.

Si $(x,y) \in \overline{R}_k - R$ et si $x \notin S$ et $y \notin S$, par le théorème 7, on a $(x,y) \in \overline{R_S}$.

Réciproquement si $(x,y) \in \bigcap \{ (\overline{R_S} \cup (E\times S) \cup (S\times E)) \mid |S| = k-1, S \subset E \}$, pour tout S d'effectif k-1 ne comprenant ni x ni y, on a nécessairement $(x,y) \in \overline{R_S}$; par conséquent, par le théorème 6, on a $(x,y) \in \overline{R}_k$.

Ces deux théorèmes se généralisent aisément.

Soit $\underset{\sim}{R}$ une relation floue définie sur E. Si on pose $N(x,y) = \sup\{\inf\{v(x..z_1..y), \ldots, v(x..z_k..y)\}\}$ la borne supérieure étant prise sur tous les ensembles de k chemins disjoints de x à y et $M(x,y) = \sup\{N(x,y), R(x,y)\}$, on a $\overline{\underset{\sim}{R}}_k = \underset{\sim}{M}$.
Ce théorème se déduit quasi immédiatement du théorème correspondant pour les relations vulgaires.

De même, en notant pour tout $S \subset E$,

$R_S(x,y) = R(x,y)$ si x et y n'appartiennent pas à S ;
$\quad = 0$ sinon ;

$Q_S(x,y) = 0$ si x et y n'appartiennent pas à S ;
$\quad = \sup\{R(u,v) \mid (u,v) \in E\times E\}$ sinon,

on a $\overline{\underset{\sim}{R}}_k = \bigcap\{(\overline{\underset{\sim}{R}_S} \cup \underset{\sim}{Q}_S) \mid |S| = k-1, S \subset E\}$, $\overline{\underset{\sim}{R}_S}$ étant la fermeture transitive au sens habituel du mot de la relation floue $\underset{\sim}{R}_S$. Ce théorème n'est de nouveau que la traduction "en flou" du théorème correspondant dans le cadre vulgaire. Sa démonstration, classique, ne sera pas donnée.
Remarquons que si n et k ne sont pas trop grands, ce dernier théorème permet d'obtenir simplement la k-fermeture d'une relation floue. En effet, il suffit, pour tout S d'effectif k-1 inclus dans E (il y en a $\binom{n}{k-1}$), de calculer la fermeture de $\underset{\sim}{R}$ restreint à E - S en utilisant l'algorithme présenté au paragraphe 2.1 et d'étendre la fermeture ainsi obtenue en prenant en tous les couples où elle n'est pas définie la fonction d'appartenance égale à $\sup\{R(u,v) \mid (u,v) \in E\times E\}$. La relation cherchée est l'intersection des relations ainsi obtenues.
Citons quelques chiffres pour fixer les idées ; les temps indiqués sont uniquement les temps de calcul ; l'ordinateur est un IBM 370/158. Pour k = 1, la fermeture s'obtint en 0,1 - 1,0 - 3,5 - 8,2 secondes pour n = 10 - 20 - 30 - 40. Pour k = 2, le temps semble en moyenne multiplié par n. Ici la fermeture 2-transitive s'obtint en 0,8 - 16,0 - 101,0 - 320,0 secondes avec les mêmes effectifs. Ces temps

dépendent évidemment de la structure de la relation de départ $\underset{\sim}{R}$. Ils ont été obtenus sur des données générées aléatoirement (distribuées uniformément sur $[0,100]$).

Remarquons enfin que lorsque n et k sont élevés, les fermetures k-transitives risquent souvent d'être des structures peu "lisibles" et par conséquent peu utiles.

Un exemple ne nuira certainement pas à la bonne compréhension de nos résultats.

4. EXEMPLE

Soit $\underset{\sim}{R}$ une relation floue présentée sous forme matricielle comme suit :

$\underset{\sim}{R}$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	5	4	0	3
x_2	3	5	1	2
x_3	0	0	5	0
x_4	1	2	2	5

$\underset{\sim}{R}$ peut se décomposer en une suite de relations emboîtées dont la figure suivante donne une représentation graphique.

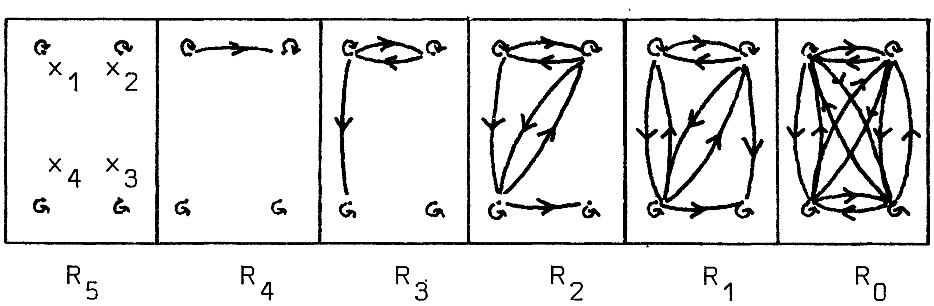
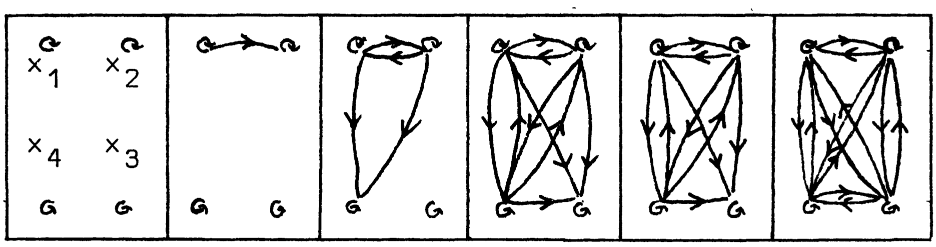


Figure 3. Décomposition de $\underset{\sim}{R}$.

La relation $\underset{\sim}{R}^2$ peut se représenter par la matrice suivante :

$\underset{\sim}{R}^2$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	5	4	2	3
x_2	3	5	2	3
x_3	0	0	5	0
x_4	2	2	2	5

$\underset{\sim}{R}^2$ est déjà transitif ; la fonction d'appartenance de $\overline{\underset{\sim}{R}}$ est donc la même que celle de $\underset{\sim}{R}^2$: $\overline{\underset{\sim}{R}} = \underset{\sim}{R}^2$.
La fermeture transitive $\overline{\underset{\sim}{R}}$ ainsi obtenue peut se décomposer en une suite de relations transitives emboîtées, relations qui sont les fermetures des relations correspondantes (de même niveau) de $\underset{\sim}{R}$.
En voici une représentation graphique.



$\overline{R}_5$ $\overline{R}_4$ $\overline{R}_3$ $\overline{R}_2$ $\overline{R}_1$ $\overline{R}_0$

Figure 4. <u>Décomposition de $\overline{\underset{\sim}{R}}$</u>

Cette fermeture peut aussi s'obtenir au moyen de l'opérateur T :

$$T(\underset{\sim}{R}) = T_{12}\circ T_{13}\circ T_{14}\circ T_{21}\circ T_{23}\circ T_{24}\circ T_{31}\circ T_{32}\circ T_{34}\circ T_{41}\circ T_{42}\circ T_{43}\begin{bmatrix}5&4&0&3\\3&5&1&2\\0&0&5&0\\1&2&2&5\end{bmatrix}$$

$$= T_{12}\circ T_{13}\circ\ldots\circ T_{41}\circ T_{42}\begin{bmatrix}5&4&0&3\\3&5&1&2\\0&0&5&0\\1&2&2&5\end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$= \begin{bmatrix}5&4&2&3\\3&5&2&3\\0&0&5&0\\2&2&2&5\end{bmatrix}$$

$\underset{\sim}{R}$ peut aussi être approché par un préordre inférieur maximal. Permutons les lignes et colonnes de la matrice représentative de $\underset{\sim}{R}$ de manière à satisfaire à la relation donnée à la fin du paragraphe 2.
La matrice devient :

	x_1	x_2	x_4	x_3
x_1	5	4	3	0
x_2	3	5	2	1
x_4	1	2	5	2
x_3	0	0	0	5

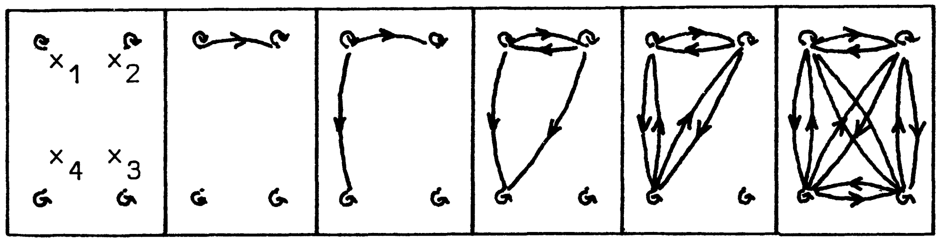
Modifions cette matrice ligne par ligne comme prescrit dans l'algorithme. La première ligne reste inchangée. Modifions la seconde en entourant les éléments de la matrice qui changent.

	x_1	x_2	x_4	x_3
x_1	5	4	3	0
x_2	2	5	2	0
x_4	1	2	5	2
x_3	0	0	0	5

Modifions la troisième ligne.

	x_1	x_2	x_4	x_3
x_1	5	4	3	0
x_2	2	5	2	0
x_4	1	1	5	0
x_3	0	0	0	5

On voit immédiatement que l'on peut arrêter ici, la quatrième ligne ne pouvant être modifiée.
Le préordre $\underset{\sim}{L}$ trouvé peut se représenter graphiquement comme suite de préordres emboîtés.



L_5 L_4 L_3 L_2 L_1 L_0

Figure 5. Décomposition de $\underset{\sim}{L}$.

Recherchons maintenant la fermeture 2-transitive de type 3. Pour ce faire, on peut par exemple appliquer le dernier théorème énoncé dans le paragraphe 3 et construire les relations $\overline{\underset{\sim}{R}_S} \cup \underset{\sim}{Q}_S$. Le résultat peut se représenter graphiquement comme suit :

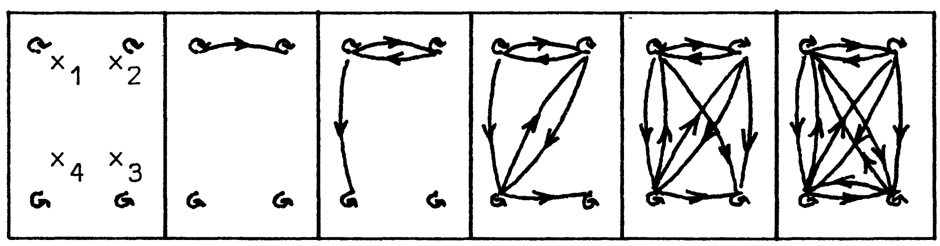


Figure 6. Décomposition de $\overline{\underset{\sim}{R}}_2$.

Sous forme matricielle, $\overline{\underset{\sim}{R}}_2$ se représente comme suit :

$\overline{\underset{\sim}{R}}_2$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	5	4	1	3
x_2	3	5	1	2
x_3	0	0	5	0
x_4	1	2	2	5

$\underset{\sim}{R}$ est 3-transitif, par conséquent $\underset{\sim}{R} = \overline{\underset{\sim}{R}}_3$.

BIBLIOGRAPHIE

(1) BERGE C., Graphes et hypergraphes, Paris, Dunod, 1970.

(2) DEFAYS D.,"K-recouvrement et sous-ensembles flous", Bull.Soc.Roy.Sci.Liège, 3-4 (1976), 81-88.

(3) DEFAYS D.,"Relations floues et analyse hiérarchique des questionnaires", Math.Sci.hum., 55 (1976), 45-60.

(4) HEUCHENNE C.,"Sous-relations transitives maxima", Bull.Soc.Roy.Sci.Liège, 9-10 (1969), 435-449.

(5) HUBERT L.,"Some applications of graph theory to clustering", Psychometrika, 39 (1974), 283-309.

(6) JACQUET-LAGREZE E., La modélisation des préférences, préordres, quasi-ordres et relations floues, Thèse, Université Paris V, 1975.

(7) JARDINE N., SIBSON R., Mathematical taxonomy, London, John Wiley & Sons Ltd, 1971.

(8) KAUFMANN A., Introduction à la théorie des sous-ensembles flous à l'usage des ingénieurs. Tome 1-Eléments théoriques de base, Paris, Masson et Cie, 1973.

(9) ROBERTS F.S.,"Homogeneous families of semi-orders and the theory of probabilistic consistency", J.Math. Psychol., 8 (1971), 248-263.

(10) TOMESCU I.,"Méthode pour la détermination de la fermeture transitive d'un graphe fini", Rev. fr.d'Inf.et de R.O., 4 (1967), 33-37.