MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

JEAN-PIERRE BARTHELEMY

Remarques sur les propriétés métriques des ensembles ordonnés

Mathématiques et sciences humaines, tome 61 (1978), p. 39-60

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1978__61__39_0>

Math. Sci. hum. (16^e année, n°61, *1978*, p.39-60)

REMARQUES SUR LES PROPRIETES METRIQUES DES ENSEMBLES ORDONNES

Jean-Pierre BARTHELEMY*

INTRODUCTION

C'est un problème usuel en Analyse des Données que de comparer les individus d'un tableau de données selon leurs "réponses" aux caractères.

A côté des méthodes statistiques ([2] , [6]) on peut songer à des méthodes ordinales ([8]) : imaginons les individus écrits en ligne et les caractères en colonne, il est très fréquent qu'une ligne d'un tableau puisse s'interpréter comme un élément d'un ensemble ordonné.

Cet ordre se lit parfois directement : c'est le cas lorsque les cases du tableau sont des éléments d'un ensemble ordonné F ($\{0, 1\}$, ou $[0, 1]$ par exemple), s'il y a p caractères, une colonne est un élément de F^p.

Il arrive aussi que l'ordre ne se lise pas directement, il en est ainsi des "partages multicritères" :
On doit partager une quantité formée de n unités selon différents critères $c_1,\ldots,c_p$. Les critères jouent le rôle de caractère, les individus sont les entiers $\leqslant n$. Le tableau de données peut se construire en écrivant, dans la case correspondant à la ième ligne et la jème colonne, le nombre de fois que l'entier i intervient dans le partage relatif à c_j. Il sera, dans ce cas, judicieux de se placer dans l'ensemble (ordonné) de tous les partages de n

*Ecole Nationale Supérieure de Chronométrie et Micromécanique,
25030 Besançon Cedex.

(plutôt que dans $\mathbb{N}^p$).

Quoiqu'il en soit, la méthode consiste à plonger l'ensemble des lignes du tableau dans un ensemble ordonné E et de comparer celles-ci en tant qu'éléments de E. Il est donc nécessaire, dans cette optique, d'étudier les métriques qu'on peut déduire d'une relation d'ordre. C'est ce que nous nous proposons (à la suite de Boorman et Oliver [4], Haskins et Gudder [12], Monjardet [14]) de faire ici.

Notons enfin, qu'en général, le choix de l'ensemble E n'est que rarement arbitraire et dépend de la nature du tableau (ainsi pour un tableau de préférences multicritères E sera un ensemble de préordres ou d'ordres).

1. PROPRIETES METRIQUES DES ENSEMBLES ORDONNES

Tous les ensembles ordonnés de ce texte sont supposés finis. Signalons toutefois que les résultats que l'on obtient s'étendent (moyennant quelques précautions et restrictions) aux ensembles ordonnés de longueur localement finie.

1.1. La notion de valuation

Il s'agit d'une extension, pratiquement immédiate, aux ensembles ordonnés quelconques de quelques remarques de Bordes ([5]) concernant les demi-treillis.

Soit E un ensemble ordonné, pour $x \in E$, on note $(x)^+$ l'ensemble des majorants de x et $(x)^-$ l'ensemble de ses minorants.

Considérons une application strictement croissante $E \to \mathbb{R}$.

Lorsque E possède un plus petit élément, on pose :

$$w^-(x,y) = \max_{t \in (x)^- \cap (y)^-} v(t) \quad \text{et} \quad d^-(x,y) = v(x) + v(y) - 2\,w^-(x,y).$$

On dira que v est une <u>valuation inférieure</u> lorsque, pour tout x, y, z avec $x \leqslant z$, $y \leqslant z$:

$$v(x) + v(y) \leqslant w^{-}(x,y) + v(z)$$

Lorsque E possède un plus grand élément, on pose :

$$w^{+}(x,y) = \underset{t \in (x)^{+} \cap (y)^{+}}{\mathrm{Min}} v(t) \quad \text{et} \quad d^{+}(x,y) = 2\, w^{+}(x,y) - v(x) - v(y).$$

On dira que v est une <u>valuation supérieure</u> lorsque, pour tout x, y, t avec $t \leqslant x$, $t \leqslant y$:

$$v(x) + v(y) \geqslant v(t) + w^{+}(x,y)$$

Lorsque E possède un plus grand élément et un plus petit élément, on pose :

$$d(x,y) = \frac{d^{+}(x,y) + d^{-}(x,y)}{2} = w^{+}(x,y) - w^{-}(x,y).$$

On dira que v est une valuation lorsque pour tout x, y :

$$v(x) + v(y) = w^{-}(x,y) + w^{+}(x,y).$$

Lorsqu'ils sont définis, d^{-}, d^{+} et d sont des indices de distance.

<u>PROPOSITION 1⁻</u> : <u>Lorsque</u> E <u>possède un plus petit élément</u>, <u>les trois assertions ci-dessous sont équivalentes</u> :

(i) d^{-} <u>est une distance</u>.

(ii) <u>Pour tout</u> x, y, z ∈ E <u>avec</u> $x \leqslant y$,

$$v(x) + w^{-}(y,z) \leqslant v(y) + w^{-}(x,z).$$

(iii) v <u>est une valuation inférieure</u>.

Preuve : Seule mérite d'être démontrée l'implication (iii) entraîne (i).

Soient x, y, z ∈ E, $t \in (x)^{-} \cap (y)^{-}$, $t' \in (z)^{-} \cap (y)^{-}$.

Il vient, d'après (iii) : $v(t) + v(t') \leqslant v(y) + w^{-}(t,t')$.

Donc : $w^{-}(x,y) + w^{-}(y,z) \leqslant v(y) + w^{-}(x,z)$ (puisque $w^{-}(t,t') \leqslant w^{-}(x,z)$). L'inégalité que l'on vient d'obtenir n'est autre que l'inégalité triangulaire : $d^{-}(x,z) \leqslant d^{-}(x,y) + d^{-}(y,z)$.

Dualement, on obtient :

PROPOSITION 1^+ : Lorsque E possède un plus grand élément, les trois assertions ci-dessous sont équivalentes :

(i) d^+ est une distance.

(ii) Pour tout $x, y, z \in E$ avec $x \leqslant y$:

$$v(x) + w^+(y,z) \geqslant v(y) + w^+(x,z)$$

(iii) v est une valuation supérieure.

Des deux propositions, on déduit :

PROPOSITION 1 : Lorsque E possède un plus grand et un plus petit élément, les quatre assertions ci-dessous sont équivalentes :

(i) d est une distance.

(ii) v est une valuation inférieure et une valuation supérieure.

(iii) v est une valuation.

(iv) $d^+ = d^- = d$

1.2. Exemple : valuations logarithmiques et exponentielles.

PROPOSITION 2 : (1) Si E possède un plus grand élément et si v est une valuation supérieure strictement positive $\operatorname{Log} v$ est une valuation supérieure (avec $(\operatorname{Log} v)(x) = \operatorname{Log}(v(x))$).

(2) Si E possède un plus petit élément et si v est une valuation inférieure, e^v est une valuation inférieure (avec $e^v(x) = e^{v(x)}$).

Preuve : Tout d'abord, il est clair, par monotonie, que :

$$\min_{t \in (x)^+ \cap (y)^+} \operatorname{Log} v(t) = \operatorname{Log} w^+(x,y) \quad \text{et} \quad \max_{t \in (x)^- \cap (y)^-} e^{v(t)} = e^{w^-(x,y)}$$

(1) Il suffit de montrer que $H = v(z)\, w^+(x,y) - v(x)\, v(y)$ est négatif pour $z \leqslant x$, $z \leqslant y$. Puisque v est une valuation supérieure, $w^+(x,y) \leqslant v(x) + v(y) - v(z)$, donc :

$$H. v(x) . v(y) \leqslant \frac{v(z)}{v(x)} + \frac{v(z)}{v(y)} - \frac{v(z)}{v(x)} - \frac{v(z)}{v(y)} - 1.$$

Le résultat découle immédiatement du fait que, pour

$0 \leqslant \alpha \leqslant 1,\ 0 \leqslant \beta \leqslant 1\ :\ 0 \leqslant \alpha + \beta - \alpha\beta \leqslant 1.$

(2) Evaluons le signe de $K = e^{v(z)} + e^{w^-(x,y)} - e^{v(x)} - e^{v(y)}$, pour $x \leqslant z$, $y \leqslant z$. Puisque v est une valuation inférieure :

$w^-(x,y) \geqslant v(x) + v(y) - v(z)$. Donc :

$$K . v(z) > 1 + \frac{e^{v(x)}}{e^{v(z)}} . \frac{e^{v(y)}}{e^{v(z)}} - \frac{e^{v(x)}}{e^{v(z)}} - \frac{e^{v(y)}}{e^{v(z)}}$$

On trouve une quantité de la forme $1 + \alpha\beta - \alpha - \beta$, qui est positive pour $0 \leqslant \alpha \leqslant 1,\quad 0 \leqslant \beta \leqslant 1$. D'où le résultat.

Ainsi, si E est l'ensemble des parties d'un ensemble fini X et si $v(A) = |A|$, on retrouve des quantités bien connues en théorie de l'information :

$\text{Log } v(A) = \text{Log } |A| \quad (A \neq \emptyset),\quad e^{v(A)} = e^{|A|}.$

Les distances correspondantes valent :

- Pour v : $d(A, B) = |A \,\Delta\, B|$
- Pour Log v : $d^+(A, B) = \text{Log}\left(\dfrac{|A \cup B|^2}{|A|\,|B|}\right)$
- Pour e^v : $d^-(A, B) = e^{|A|} + e^{|B|} - 2e^{|A \cap B|}$

1.3. <u>Caractérisation des métriques définies par une valuation dans un demi-treillis.</u>

On dit qu'une application $q = E \times E \to \mathbb{R}$ <u>respecte l'intermédiarité</u> lorsque pour tout x, y, z $\in$ E avec $x \leqslant y \leqslant z$:

$q(x, z) = q(x, y) + q(y, z).$

On suppose que E est un inf-demi-treillis, soit q une application $E \times E \to \mathbb{R}$, on pose $v(x) = q(0,x)$ pour $x \in E$ (0 étant le plus petit élément de E).

<u>PROPOSITION 3^-</u> : v <u>est une valuation inférieure et</u> q <u>est l'écart défini par</u> v (<u>i.e.</u> $q = d^-$) <u>si et seulement si</u> q <u>vérifie les trois conditions ci-dessous</u> :

(i) q <u>respecte l'intermédiarité et</u> $q(x, y) \neq 0$ <u>pour</u> $x \neq y$.

$(ii)^-$ $q(x, y) \geqslant q(x \wedge z, y \wedge z)$, <u>pour tout</u> $x, y, z \in E$ avec $x \leqslant y$.

$(iii)^-$ $q(x, y) = q(x \wedge y, x) + q(x \wedge y, y)$, <u>pour tout</u> $x, y \in E$.

Preuve : Tout d'abord, il est clair que si v est une valuation inférieure et si $q = d^-$, q vérifie les conditions (i), $(ii)^-$ et $(iii)^-$.

Réciproquement, montrons d'abord que si q vérifie (i) et $(ii)^-$, v est une valuation inférieure.

q respectant l'intermédiarité $q(0, 0) = 0$ et comme, d'après $(ii)^-$ $q(x, y) \geqslant q(0, 0)$, $q(x, y) \geqslant 0$ pour $x \leqslant y$. Donc ((i)) $q(x, y) > 0$ pour $x < y$. Or, dans ce cas, ($x < y$) : $q(0, x) + q(x, y) = q(0, y)$, c'est-à-dire $v(x) < v(y)$: v est strictement croissante.

Par ailleurs, pour $x, y, z \in E$, avec $x \leqslant y$:

$$v(x) + w^-(y, z) - v(y) - w^-(x, z) = v(x) + v(y \wedge z) - v(y) - v(x \wedge z)$$
$$= q(x \wedge z, y \wedge z) - q(x, y) \quad \text{(d'après (i))}.$$

Or, d'après $(ii)^-$ cette quantité est négative ; la condition (ii) de la proposition 1^- est vérifiée : v est une valuation inférieure.

Il resterait à vérifier l'égalité $q(x, y) = v(x) + v(y) - 2v(x \wedge y)$. Mais celle-ci découle immédiatement de la condition $(iii)^-$.

Supposons maintenant que E est un sup. demi-treillis. Si q est une application $E \times E \to \mathbb{R}$, on posera $v(x) = q(x, 1)$ (où 1 désigne le plus grand élément de E).

La proposition 3^- se dualise en :

<u>PROPOSITION 3^+</u> : v <u>est une valuation supérieure et</u> d <u>est la distance définie</u>

par v si et seulement si q vérifie les trois conditions ci-dessous :

(i) q respecte l'intermédiarité.

$(ii)^+$ $q(x, y) \geqslant q(x \vee z, y \vee z)$, pour tout $x, y, z \in E$ avec $x \leqslant y$.

$(iii)^+$ $q(x, y) = q(x, x \vee y) + q(y, x \vee y)$, pour tout $x, y \in E$.

Enfin :

PROPOSITION 3 : Si E est un treillis et si q est une application $E \times E \to \mathbb{R}$ · v (avec soit $v(x) = q(0, x)$, soit $v(x) = q(x, 1)$) est une valuation si et seulement si q vérifie les conditions (i), $(ii)^-$, $(iii)^-$, $(ii)^+$ et $(iii)^+$.

1.4. Interprétation d'une valuation dans le graphe non orienté de couverture.

Nous allons donner, en termes de graphes, une interprétation de la notion de valuation. La voie dans cette direction a déjà été tracée :

- par Comyn, Grimonprez et Van Dorpe ([7] , [9]), dans le cas des demi-treillis (à noter que ceux-ci ont préféré plutôt qu'un graphe, utiliser la notion de "séquence d'éléments comparables").
- par Monjardet ([14]) dans le cas particulier où v est une fonction de rang (c.f. aussi, à ce propos [12]).

Rappelons qu'on dit que $y \in E$ couvre $x \in E$ (notation : $x \prec y$) lorsque $x < y$ et il n'existe pas d'éléments $z \in E$ tel que $x < z < y$.

Soit $G(E) = (E, A(E))$ le graphe non orienté de couverture de E (g. n. o. c.), ses sommets sont les éléments de E, xy est une arête de G (E) si et seulement si $x \prec y$ ou $y \prec x$.

Lorsque G (E) est un graphe connexe, on dit que l'ensemble ordonné E est connexe.

Soit v une application de E dans $\mathbb{R}$, on définit la v - longueur d'un chemin $c = x_1 x_2 \dots x_n$ de G (E) par la formule

$$\tilde{v}(c) = \sum_{i=1}^{n} | v(x_{i+1}) - v(x_i) |$$

Supposons que E est connexe et désignons par $\Gamma(x, y)$ l'ensemble des chemins de $G(E)$ joignant x et y, on pose :

$$\delta(x, y) = \inf_{c \in \Gamma(x, y)} \tilde{v}(c) .$$

Il est clair (et bien connu) que δ est un écart sur E.

Si $\delta(x, y) = \tilde{v}(c)$, pour $c \in \Gamma(x, y)$, on dit que c est une <u>v - minimal</u>.

<u>LEMME</u> : <u>Soit</u> v <u>une fonction strictement croissante</u> $E \to \mathbb{R}$.

(1) <u>Lorsque</u> E <u>possède un plus petit élément</u>, $\delta(x, y) \leqslant d^-(x, y)$.
<u>Si, de plus</u>, $x \leqslant y$, $\delta(x, y) = d^-(x, y)$.

(2) <u>Lorsque</u> E <u>possède un plus grand élément</u>, $\delta(x, y) \leqslant d^+(x, y)$.
<u>Si, de plus</u>, $x \leqslant y$, $\delta(x, y) = d^+(x, y)$.

(3) <u>Lorsque</u> E <u>possède un plus petit et un plus grand élément</u>,
$\delta(x, y) \leqslant d(x, y)$. <u>Si, de plus</u>, $x \leqslant y$, $\delta(x, y) = d(x, y)$.

Preuve : Il suffit de démontrer l'assertion (1), (2) en est duale et (3) découle immédiatement de (1) et (2).

Supposons d'abord $x \leqslant y$. Soit $c = x_1 \ldots x_n = y$ un chemin de G (E) entre x et y : $\tilde{v}(c) = \Sigma\,|v(x_{i+1}) - v(x_i)| \geqslant |\Sigma\, v(x_{i+1}) - v(x_i)|$ $= v(y) - v(x)$. Or, toute chaîne maximale de x vers y définit un chemin de G (E). En vertu de l'inégalité ci-dessus, un tel chemin est v - minimal :

$$\delta(x, y) = v(y) - v(x) = d^-(x, y).$$

Dans le cas général, il existe $t \in (x)^- \cap (y)^-$ tel que $v(t) = w^-(x, y)$. Alors, $d^-(x, y) = d^-(x, t) + d^-(y, t) = \delta(x, t) + \delta(y, t)$ $\geqslant \delta(x, y)$.

<u>PROPOSITION 4</u> : <u>Soit</u> $v : E \to \mathbb{R}$ <u>une fonction strictement croissante</u>.

(1) <u>Si</u> E <u>possède un plus petit élément</u>, v <u>est une valuation inférieure si</u>
et seulement si $\delta = d^-$.

(2) Si E possède un plus grand élément, v est une valuation supérieure si et seulement si $\delta = d^+$.

(3) Si E possède un plus grand et un plus petit élément, v est une valuation si et seulement si $\delta = d$.

Preuve : Comme pour le lemme 1, il suffit de démontrer (1). On sait que v est une valuation inférieure si et seulement si d^- est une distance (proposition 1^-), donc si $d^- = \delta$, v est une valuation inférieure.

Réciproquement, en vertu du lemme, il suffit de montrer que, si v est une valuation inférieure, $d^- \leqslant \delta$. Pour ceci, nous allons effectuer une récurrence sur la borne inférieure ℓ (xy) des longueurs des chemins v - minimaux entre x et y.

D'après le lemme, le résultat est vrai pour tous les couples (x, y) tels que $\ell(xy) = 1$.

Supposons que $d^- (x', y') \leqslant \delta (x', y')$ pour tout (x', y') tel que $\ell (x'y') < n$. Soit (x, y) tel que $\ell (xy) = n$. Considérons un chemin v - minimal $c : x = x_1 x_2 \dots x_n = y$ entre x et y : $\ell (x x_{n-1}) = n - 1$ et $c' : x_1 \dots x_{n-1}$ est un chemin v - minimal.
Par définition de δ, $\delta (x, y) = \delta(x, x_{n-1}) + \delta(x_{n-1}, y)$.
Par hypothèse de récurrence, $\delta (x, x_{n-1}) \geqslant d^- (x, x_{n-1})$, tandis que $\delta (x_{n-1}, y) = d^- (x_{n-1}, y)$. Donc $\delta (x, y) \geqslant d^- (x, y)$.

Pour x, y $\in$ E, notons $(x \cap y)_v$ (resp. $(x \cup y)_v$) l'ensemble des $t \in (x)^- \cap (y)^-$ (resp. $t \in (x)^+ \cap (y)^+$) tels que $v (t) = w^- (x, y)$ (resp. $v (t) = w^+ (x, y)$).

COROLLAIRE : Soit $v : E \to \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante.

(1) Lorsque E possède un plus petit élément, v est une valuation inférieure si et seulement si, pour tout x, y $\in$ E il existe un chemin v - minimal $x = x_0 \dots x_n = y$, tel qu'on puisse trouver un indice m ($0 \leqslant m \leqslant n$) vérifiant $x_m \in (x \cap y)_v$, $x_i \succ x_{i+1}$, pour $i \leqslant m - 1$; $x_i \prec x_{i+1}$, pour

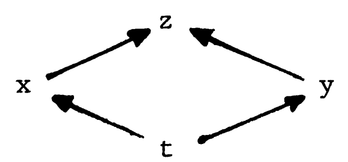
$i \geqslant m$.

(2) Lorsque E possède un plus grand élément, v est une valuation supérieure si et seulement si, pour tout $x, y \in E$, il existe un chemin v - minimal $x = x_0 \ldots x_n = y$, tel que l'on puisse trouver un indice m ($0 \leqslant m \leqslant n$) vérifiant $x_m \in (x \cup y)_v$, $x_i \prec x_{i+1}$, pour $i \leqslant m - 1$; $x_i \succ x_{i+1}$, pour $i \geqslant m$.

2. ENSEMBLES ORDONNES SEMI-MODULAIRES.

2.1. Quelques définitions et quelques rappels

Soit E un ensemble ordonné, un quadrilatère de E est un quadruplet (x, y, t, z) d'éléments de E tels que $t \prec x$, $t \prec y$, $x \prec z$ et $y \prec z$.



On note q (E) l'ensemble des quadrilatères de E.

E est semi-modulaire supérieurement ([1]) lorsque, pour tout $x, y, t \in E$ avec $t \prec x$, $t \prec y$, il existe $z \in E$ tel que : $(x, y, t, z) \in q(E)$.

Dualement, E est semi-modulaire inférieurement lorsque, pour tout $x, y, z \in E$ avec $x \prec z$, $y \prec z$, il existe $t \in E$ tel que $(x, y, t, z) \in q(E)$.

Lorsque ces deux conditions sont réalisées, on dit que E est modulaire.

Un ensemble ordonné semi-modulaire vérifie la condition de Jordan - Dedekind : pour tout $x, y \in E$, toutes les chaînes maximales de x vers y ont même longueur. S'il admet, de plus, un élément extrêmal, il est gradué : il existe une application $v : E \to \mathbb{R}$ (appelée fonction de rang) telle que $x \prec y$ entraîne $v(y) = v(x) + 1$.

2.2. Un critère pour les valuations.

PROPOSITION 5^- : On suppose que E est semi-modulaire inférieurement et possède un plus petit élément. Soit $v : E \to \mathbb{R}$ une application strictement crois-

<u>sante</u>.

<u>Si, pour tout quadrilatère</u> (x, y, t, z) <u>de</u> E : $v(x) + v(y) \leqslant v(t) + v(z)$, v <u>est une valuation inférieure</u>.

Preuve : Soit $x, y, z \in E$ avec $x < z$, $y < z$. Nous allons montrer, par récurrence sur la longueur ℓ d'une chaîne de x vers z que :

$$v(x) + v(y) \leqslant w^{-}(x, y) + v(z).$$

1) Pour $\ell = 1$: $x \prec z$; considérons une chaîne maximale $y = s_0 \prec s_1 \prec \ldots \prec s_n = z$ de y vers z, cette chaîne définit par semi-modularité la chaîne $x = t_n \succ t_{n-1} \succ \ldots \succ t_0$ telle que $t_{n-1} \prec x$, $t_{n-1} \prec s_{n-1}, \ldots$; $t_0 \prec t_1$, $t_0 \prec s_0 = y$. Pour chaque indice i, $1 \leqslant i \leqslant n$, on obtient donc un quadrilatère :

$(t_i, s_{i-1}, t_{i-1}, s_i)$. Il vient alors, par hypothèse :

$$v(x) + v(s_{n-1}) \leqslant v(t_{n-1}) + v(z)$$

$$v(t_{n-1}) + v(s_{n-2}) \leqslant v(t_{n-2}) + v(s_{n-1})$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$v(t_1) + v(s_0) \leqslant v(t_0) + v(s_1).$$

En sommant membre à membre ces inégalités, on obtient :

$v(x) + v(y) \leqslant v(z) + v(t_0) \leqslant v(z) + w^{-}(x - y)$, puisque $t_0 \in (x)^{-} \cap (y)^{-}$.

2) Supposons le résultat vérifié pour une chaîne maximale de x vers z de longueur ℓ (quelle que soit la longueur d'une chaîne maximale de y vers z).

Lorsqu'une telle chaîne est de longueur $\ell + 1$, il existe $u \in E$ tel que $x < u$, $u \prec z$. D'après le 1), il existe $t \in (u)^{-} \cap (y)^{-}$ $(t \prec y)$ tel que : $v(u) + v(y) \leqslant v(t) + v(z)$. On applique alors l'hypothèse de récurrence au triplet (x, t, u) : $v(x) + v(t) \leqslant w^{-}(x, t) + v(u)$. Donc :
$v(x) + v(y) + v(u) \leqslant v(x) + v(z) + v(t) \leqslant w^{-}(x, t) + v(z) + v(u)$.
Or, $(x)^{-} \cap (t)^{-} \subset (x)^{-} \cap (y)^{-}$. Donc :
$w^{-}(x, t) \leqslant w^{-}(x, y)$, d'où le résultat.

Dualement, on obtient :

PROPOSITION 5^+ : *On suppose que* E *possède un plus grand élément et est semi-modulaire supérieurement. Soit* v *une application strictement croissante* $E \to \mathbb{R}$.

Si, pour tout quadrilatère (x, y, t, z) *de* E, $v(x) + v(y) \geqslant v(t) + v(z)$, v *est une valuation supérieure.*

2.3. Application 1 : caractérisation métrique des ensembles ordonnés semi-modulaires.

Les propositions 5^- et 4 permettent d'obtenir, assez rapidement, une caractérisation métrique des ensembles ordonnés semi-modulaires établie par Monjardet ([14]).

COROLLAIRE 1 : [Monjardet] *On suppose que* E *est gradué par une fonction de rang* v.

1) *Lorsque* E *possède un plus petit élément,* E *est semi-modulaire inférieurement si et seulement si* v *est une valuation inférieure.*

2) *Lorsque* E *possède un plus grand élément,* E *est semi-modulaire supérieurement si et seulement si* v *est une valuation supérieure.*

3) *Lorsque* E *possède un plus grand et un plus petit élément,* E *est modulaire si et seulement si* v *est une valuation.*

Preuve : Il suffit de démontrer la première assertion : la seconde en est duale et la troisième découle des deux autres.

Supposons que v est une valuation inférieure ; soient $x, y, z \in E$ tels que $x \prec z$, $y \prec z$. Il existe $t \in (x)^- \cap (y)^-$ tel que $v(x) + v(y) \leqslant v(t) + v(z)$. Comme $v(x) = v(y) = v(z) - 1$, on a nécessairement soit $v(t) = v(x) = v(y)$ soit $v(t) = v(x) - 1$. La première inégalité correspond au cas banal $x = y$; la seconde montre que : $t \prec x$, $t \prec y$: E est semi-modulaire inférieurement.

Réciproquement, supposons que E est semi-modulaire inférieurement, puisque, pour tout quadrilatère (x, y, t, z) de E on a :

$v(x) + v(y) = v(t) + v(z)$, il suffit d'appliquer la proposition 5^-.

En introduisant la distance δ relative à la fonction de rang v (1-4), on déduit immédiatement de ce corollaire et de la proposition 4 :

COROLLAIRE 2: [Monjardet]. On suppose que E est gradué par v :

1) Lorsque E possède un plus petit élément, E est semi-modulaire inférieurement si et seulement si $\delta = d^-$.

2) Lorsque E possède un plus grand élément, E est semi-modulaire supérieurement si et seulement si $\delta = d^+$.

3) Lorsque E possède un plus grand et un plus petit élément, E est modulaire si et seulement si $\delta = d$.

2.4. Application 2 : Caractérisation métrique des demi-treillis semi-modulaires. Axiomatique de la distance de Kemeny-Snell.

Indiquons ce qu'on obtient pour les inf.demi-treillis en utilisant le corollaire 1 et la proposition 3^-. Les autres cas (sup.demi-treillis, treillis), s'obtiennent par dualité.

COROLLAIRE 3 : Soit E un inf.demi-treillis. Les deux assertions ci-dessous sont équivalentes :

1) E est semi-modulaire inférieurement.

2) Il existe une application $q : E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant les quatre conditions ci-dessous :

(a) q respecte l'intermédiarité.

(b) $q(x, y) \geqslant q(x \wedge z, y \wedge z)$, pour tout $x, y, z \in E$ avec $x \leqslant y$.

(c) $q(x, y) = q(x \wedge y, y) + q(x \wedge y, x)$, pour tout $x, y \in E$.

(d) $q(x, y) = 1$ pour tout $x, y \in E$ avec $x \prec y$.

En outre, l'application q est unique, est une distance et est définie par une fonction de rang v sur E ($q = d^-$).

C'est un problème qui se pose parfois en "mathématique sociale" ([13])

que de caractériser certaines métriques sur des "ensembles d'opinions" (le plus souvent des préférences).

Ainsi, Kenneth P. Bogart ([3]) caractérise la "distance de Kemeny-Snell" (alias la "distance de la différence symétrique") sur l'ensemble O des ordres d'un ensemble fini X par une liste de sept axiomes.

Or, il est bien connu que O est un inf.demi-treillis semi-modulaire inférieurement, une fonction de rang sur O étant définie par $v(r) = |r|$ ([1]). La distance de la différence symétrique Δ n'est autre que la distance définie par la valuation inférieure v :

$$\Delta(r, s) = |r \Delta s| = |r| + |s| - 2|r \cap s|.$$

En paraphrasant le corollaire 3, on peut énoncer :

Il existe une application $\Delta : O \times O \to \mathbb{R}$ et une seule telle que :

(A1) : Δ <u>respecte l'intermédiarité</u>.

(A2) : $\Delta(r, s) \geqslant \Delta(r \cap t, s \cap t)$, <u>pour tout</u> $r, s, t, \in O$ avec $r \subset s$.

(A3) : $\Delta(r, s) = \Delta(r \cap s, r) + \Delta(r \cap s, s)$, <u>pour tout</u> $r, s \in O$.

(A4) : <u>Si</u> $a, b \in X$ <u>et</u> $r \in O$ <u>sont tels que</u> $(a, b) \notin r$ <u>et</u> $r \cup \{(a, b)\} \in O$, $\Delta(r, r \cup \{(a, b)\}) = 1$.

Δ <u>sera alors une distance</u>.

2.5. <u>Un exemple d'ensemble ordonné (non latticiel) modulaire : les partages</u>.

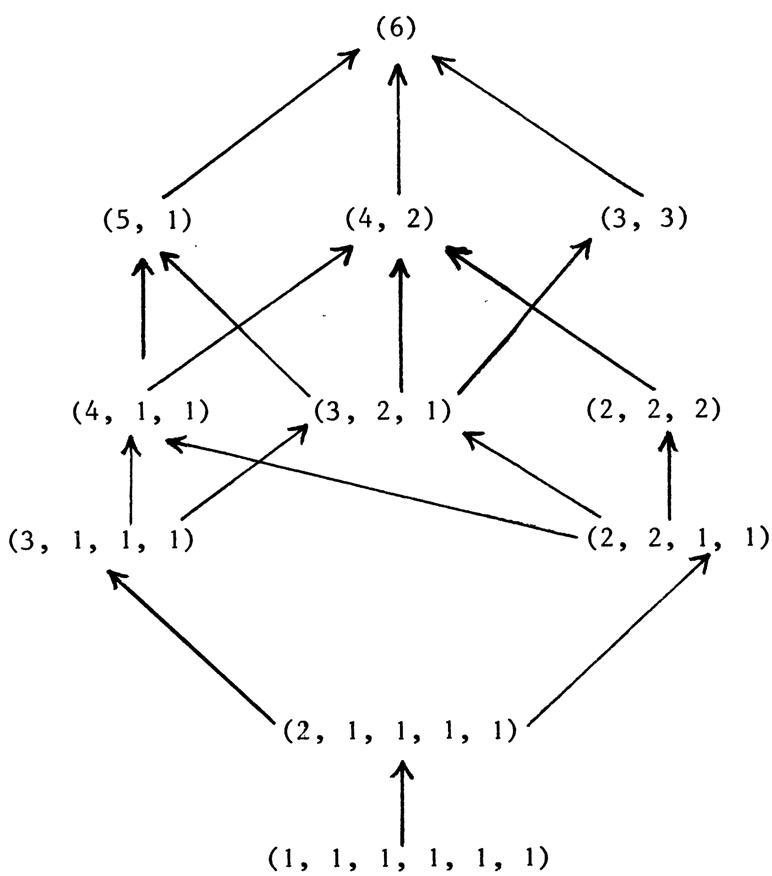
Soit n un entier > 0, un <u>partage</u> ([11] , [15]) de n est une suite décroissante $\alpha = (n_1,\dots,n_p)$ d'entiers > 0 tels que $n_1 + \dots + n_p = n$ (on dira que les n_i , $1 \leqslant i \leqslant p$, sont les <u>composantes</u> de α).

L'ensemble $P(n)$ des partages de n est muni d'une relation d'ordre définie par :

$(n_1, \dots, n_p) \leqslant (n'_1, \dots, n'_q)$ si et seulement si il existe une partition en q classes $I_1, \dots, I_q$ de l'ensemble $\{1, \dots, p\}$ telle que pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant q$, $n'_j = \sum_{i \in I_j} n_i$.

Ainsi, $(n_1, \ldots , n_p) \prec (n'_1, \ldots , n'_q)$ si et seulement si il existe i et k $1 \leqslant i,\ k \leqslant p$ tels que les composantes de $(n'_1,\ldots,n'_q)$ sont $n_i + n_k$ et les composantes de $(n_1, \ldots , n_p)$ différentes de n_i et n_k (d'où $q = p - 1$).

$P (n)$ est gradué par la fonction de rang v :
$v ((n_1, \ldots , n_p)) = n + 1 - p$, possède un plus grand élément : (n), un plus petit élément : le partage dont toutes les composantes valent 1. Toutefois, l'ordre de $P (n)$ n'est pas latticiel comme le montre la figure ci-dessous :



<u>PROPOSITION 6</u> : P (n) <u>est modulaire</u>.

Preuve : Soit $\alpha = (n_1,\dots,n_p)$ $\in$ P (n), si β et γ couvrent α, il existe i, j et k, l ($i \neq j$, $k \neq l$) $\in$ $\{1,\dots,p\}$ tels que :

- les composantes de β sont $n_i + n_j$ et les composantes de α différentes de n_i et n_j ;
- les composantes de γ sont $n_k + n_l$ et les composantes de α différentes de n_k et n_l.

Excluons le cas banal $\{ i, j \} = \{ k, l \}$ ($\alpha = \beta$), deux situations sont alors à considérer :

(a) $\{ i, j \} \cap \{ k, l \} \neq \emptyset$: β et γ sont couverts par δ dont les composantes sont : $n_i + n_j$, $n_k + n_l$ et les composantes de α différentes de n_i, n_j, n_k et n_l.

(b) $\{ i, j \} \cap \{ k, l \} = \emptyset$: supposons, pour fixer les idées, $i = k$, β et γ sont alors couverts par ε dont les composantes sont : $n_i + n_j + n_l$ et les composantes de α différentes de n_i, n_j, n_l.

Si μ et ν sont couverts par α, il existe i, j $\in$ $\{ 1,\dots,p \}$ tels que :

- les composantes de μ sont : m^1 , m^2 avec $m^1 + m^2 = n_i$ ($1 < i < p$) et les composantes de α différentes de n_{ij}.
- les composantes de ν sont : q^1 , q^2 avec $q^1 + q^2 = n_j$ ($1 < j < p$) et les composantes de α différentes de n_j.

Deux cas sont alors à distinguer :

(a) $n_i \neq n_j$: μ et ν couvrent alors le partage dont les composantes sont : m^1 , m^2 , q^1 , q^2 et les composantes de α différentes de n_i et n_j.

(b) $n_i = n_j$. Si $\mu \neq \nu$, $\{ m^1, m^2 \} \cap \{ q^1, q^2 \} = \emptyset$

Si $m^1 > q^1$, nécessairement $m^2 < q^2$ et μ et ν recouvrent le partage dont les composantes sont :

q^1 , $m^1 - q^1$, m^2

et les composantes de α différentes de n_i.

Si $q^1 < m^1$, on échange les rôles de m^1 et m^2 , q^1 et q^2.

P(n) est donc semi-modulaire inférieurement.

On peut alors résoudre simplement le problème suivant : en combien d'étapes, au minimum, peut-on passer un partage α à un partage β, (une étape étant représentée par une arête du G.N.O.C. $G (P (n))$: on divise un "tas" en deux, ou on réunit deux "tas" en un) : puisque $d^- = \delta$ (ces quantités étant relatives à la fonction de rang v de P (n)) il suffit de déterminer un partage γ de rang minimum tel que $\alpha \leqslant \gamma$, $\beta \leqslant \gamma$, le nombre minimum d'étapes nécessaires sera :

$$2 v (\gamma) - v (\alpha) - v (\beta).$$

3. CARACTERISATION METRIQUE DES ENSEMBLES ORDONNES ARBORESCENTS.

3.1. Généralités

La semi-modularité constitue, d'après ce qui précède, un cadre privilégié pour la définition des métriques. Poussant un peu plus loin notre investigation, il est naturel de se demander quels sont les ensembles ordonnés (avec un plus petit élément) ou toute fonction strictement croissante est une valuation (inférieure).

Soit E un ensemble ordonné avec un plus petit élément. On dit qu'une application strictement croissante $v : E \to \mathbb{R}$ est une valuation ultramétrique inférieure (v. u. i.) lorsque :

pour tout $x, y, z \in E$:

$$\inf (w^- (x, y) , w^- (y, z)) \leqslant w^- (x, z).$$

Toute v.u.i. est une valuation inférieure (il suffit d'appliquer la proposition 1^-) et la restriction, à $E_\alpha = \{ x,\ v(x) = \alpha \}$, de d^- est, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, une distance ultramétrique.

On dit que E est arborescent ([1]) si tout élément non minimal de E couvre un élément et un seul et s'il est connexe.

E admet alors nécessairement un plus petit élément.

Il est bien connu que les quatre assertions ci-dessous sont équivalentes :

(1) E est arborescent.

(2) Tout intervalle de E est une chaîne.

(3) Pour tout $x, y \in E$, s'il existe z tel que $x \leqslant z$ et $y \leqslant z$, on a nécessairement $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$.

(4) Le g.n.o.c. de E est un arbre (au sens de la théorie des graphes non orientés [10]).

3.2. Ensembles ordonnés où toute fonction strictement croissante définit une valuation inférieure.

PROPOSITION 8 : Soit E un ensemble ordonné avec un plus petit élément. Les quatre assertions ci-dessous sont équivalentes :

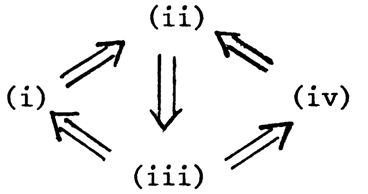
(i) Il existe une v.u.i. sur E.

(ii) E est arborescent.

(iii) Toute application strictement croissante $E \to \mathbb{R}$ est une v.u.i.

(iv) Toute application strictement croissante $E \to \mathbb{R}$ est une valuation inférieure.

Preuve : Nous allons suivre le schéma d'implications ci-dessous :



Remarquons tout d'abord que deux de ces implications sont triviales, ce sont (iii) $\Rightarrow$ (i) et (iii) $\Rightarrow$ (iv).

(i) entraîne (ii) : Soit v une v.u.i. sur E. Soient $x, y \in E$ tels qu'il existe z vérifiant $x \leqslant z$ et $y \leqslant z$. L'inégalité :

$\inf(w^-(x, z), w^-(y, z)) \leqslant w^-(x, y)$ entraîne, soit $v(x) = w^-(x, y)$, soit $v(y) = w^-(x, y)$. C'est-à-dire soit $x \leqslant y$, soit $y \leqslant x$: E est arborescent.

(ii) entraîne (iii). Supposons que E est arborescent. Soit $v : E \to \mathbb{R}$, une fonction strictement croissante. Soit $t \in (x \cap y)_v$, $t' \in (y \cap z)_{v'}$, $t'' \in (x \cap z)_v$. On a, entre $(t)^+$, $(t')^+$ et $(t'')^+$ l'inclusion $(t)^+ \subset (t')^+ \subset (t'')^+$ ou l'une des cinq autres obtenues en permutant les lettres t, t' et t''. Supposons par exemple : $(t)^+ \subset (t')^+ \subset (t'')^+$. Dans ce cas, $t'' \leqslant t' \leqslant t$, donc $t \leqslant x$ et $t' \leqslant z$. Comme $v(t'') = \sup\limits_{u \in (x)^- \cap (y)^-} v(u)$, on a nécessairement $t' = t''$, c''est-à-dire :

$w^-(x, z) = w^-(y, z) \leqslant w^-(x, y)$.

Les cinq autres cas se traitent de manière analogue et on obtient finalement une des trois expressions

$w^-(x, z) = w^-(y, z) \leqslant w^-(x, y)$,

$w^-(x, z) = w^-(x, y) \leqslant w^-(y, z)$,

$w^-(y, z) = w^-(x, y) \leqslant w^-(x, z)$.

Donc, dans tous les cas, $\inf(w^-(x,y), w^-(y,z)) \leqslant w^-(x,z)$: v est une v.u.i.

(iv) entraîne (ii) : Supposons que E n'est pas arborescent. Il existe alors, dans E, un triplet x, y, z avec $x \leqslant z$, $y \leqslant z$ où x et y sont incomparables. Nous allons montrer qu'on peut alors construire une application $v : E \to \mathbb{R}$ strictement croissante qui n'est pas une valuation inférieure.

Désignons par E'' les éléments maximaux de $(x)^- \cap (y)^-$ et posons $E' = \{x, y, z\} \cup E''$. Les éléments de E'' sont deux à deux incomparables et on obtient une application strictement croissante $v' : E' \to \mathbb{R}$ en posant :

$v'(x) = v'(y) = \alpha$, $v'(z) = \beta$ et $v'(u) = \gamma$ pour $u \in E''$, avec: $\gamma < \alpha < \beta$ et $\alpha > \beta + \gamma$.

On peut prolonger v' en une application strictement croissante $v : E \to \mathbb{R}$, comme on le vérifie facilement en effectuant une récurrence sur le cardinal $|E - E'|$. Cette fonction ne sera pas une valuation inférieure puisque : $v(x) + v(y) \geqslant v(z) + w^{-}(x, y)$.

Cette proposition étend "à toute l'arborescence" le théorème de Johnson -Benzécri, bien connu en Taxinomie "E est une arborescence si et seulement si toute fonction croissante et constante sur les sommets pendants de E définit, sur l'ensemble de ces sommets une ultramétrique". Elle admet comme corollaire immédiat :

<u>COROLLAIRE</u> : <u>Si</u> E <u>est un ensemble ordonné avec un plus grand et un plus petit élément, les conditions ci-dessous sont équivalentes</u> :

(i) <u>Toute fonction strictement croissante</u> $E \to \mathbb{R}$ <u>est une valuation</u>.

(ii) <u>Toute fonction strictement croissante</u> $E \to \mathbb{R}$ <u>est une valuation inférieure</u>.

(iii) <u>Toute fonction strictement croissante</u> $E \to \mathbb{R}$ <u>est une valuation supérieure</u>.

(iv) E <u>est totalement ordonné</u>.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARBUT M., MONJARDET B., Ordre et classification. Algèbre et combinatoire, Paris, Hachette, 1971.

[2] BENZECRI J.P. et al., L'Analyse des Données, Paris, Dunod, 1973.

[3] BOGART K.P., "Preference structures I : Distance between transitive preference relations", Journal of Math. Sociology, Vol. 3, (1973), 49 - 67.

[4] BOORMAN S.A., OLIVER D.C., "Metrics on spaces of finite trees", J. Math. Psycho., Vol. 10, (1973), 26 - 59.

[5] BORDES G., "Métriques bornées définies par des valuations sur un demi-treillis", Math. Sci. Hum., 56, (1976), 89 - 95.

[6] CAILLEZ F., PAGES J.P., Introduction à l'analyse des données, Paris, Société de Mathématiques et de Sciences Humaines, 1976.

[7] COMYN G., VAN DORPE J.C., "Valuation et semi-modularité dans les demi-treillis", Math. Sci. Hum., 56, (1976), 63 - 75.

[8] DEGENNE A., Techniques ordinales en analyse des données : statistique, Paris, Hachette, 1972.

[9] GRIMONPREZ G., VAN DORPE J.C., "Distance définie par une application monotone sur un treillis", Math. Sci. Hum., 56, (1976), 47 - 62.

[10] HARARY F., Graph theory, Reading, Addison - Wesley, 1969.

[11] HARDY G.H., WRIGHT E.M., An introduction to the theory of numbers, Oxford, Clarendon Press, 1965.

[12] HASKINS L., GUDDER S., "Height on posets and graphs", Discr. Math., 2, (1972), 357 - 382.

[13] KEMENY J.G., SNELL J.C., Mathematical models in the Social Sciences, New-York, Gin and Co, 1962.

[14] MONJARDET B., "Caractérisations métriques des ensembles ordonnés semi-modulaires", Math. Sci. Hum., 56, (1976), 77 - 87.

[15] RIORDAN J., An introduction to combinatorial analysis, New-York, Wiley, 1967.

-o-o-o-o-o-o-o-o-