MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

J. P. BARTHELEMY

Sur les éloignements symétriques et le principe de Pareto

Mathématiques et sciences humaines, tome 56 (1977), p. 97-125

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1977__56__97_0>

Math. Sci. hum. (*14*^{e} année, n° 56, *1976*, p.97-125)

SUR LES ELOIGNEMENTS SYMETRIQUES ET LE PRINCIPE DE PARETO

J.P. BARTHELEMY [1]

1 - INTRODUCTION ET NOTATIONS

C'est un problème central, en théorie de la décision, que d'agréger diverses opinions individuelles (préférences ou classements) afin de définir une opinion collective. Dès lors (au moins) deux voies sont possibles :

1) indiquer des constructions explicites de procédures d'agrégation (c'est le cas, par exemple, des méthodes Electre ([2]) en analyse multicritère) ;

2) étudier les propriétés des opinions individuelles qui minimisent un certain "éloignement" à un groupe d'opinions.

C'est ce second point de vue que nous adoptons ici et, parmi les propriétés possibles des opinions individuelles, relativement à un groupe d'opinions, nous étudierons surtout la <u>règle de l'unanimité</u> (ou <u>principe de Pareto</u>).

Une opinion individuelle est, ici, toujours représentée par une relation binaire. Les relations qui entrent en jeu sont les ordres totaux,

1 Ecole Nationale Supérieure de Chronométrie et Micromécanique de Besançon

les préordres totaux et les relations d'équivalence. L'existence de l'effet Condorcet nous amènera à considérer aussi les matchs et les tournois.

NOTATIONS :

X désigne un ensemble fini de cardinal $|X| = n$ et R l'ensemble des relations binaires sur X (i.e. l'ensemble des parties de $X \times X$).

A chaque relation binaire $r \in R$ est associée sa fonction caractéristique $\hat{r}$:

$$\hat{r}(x,y) = 1 \ , \ \text{si} \ (x,y) \in r \ ;$$
$$\hat{r}(x,y) = 0 \ , \ \text{sinon.}$$

On considérera les cinq sous-ensembles de R ci-dessous :

M : les matchs de X (i.e. les relations réflexives et totales sur X)

T : les tournois de X (relations réflexives, antisymétriques et totales)

O : les ordres totaux de X (relations réflexives, transitives, antisymétriques et totales)

P : les préordres totaux de X (relations réflexives, transitives et totales)

E : les équivalences de X (relations réflexives, symétriques et transitives).

2 - LA NOTION D'ELOIGNEMENT

La notion d'éloignement d'une opinion individuelle à un groupe d'opinions a été considérée explicitement, ou implicitement, par plusieurs auteurs ([4], [8]), mais toujours dans des cas assez particuliers. Nous tentons d'en donner, ici, une définition générale.

2.1 - Opinions individuelles, groupes d'opinions

Un ensemble d'opinions (sur X) est un sous-ensemble L de relations réflexives de R. Une L - opinion individuelle (ou L - opinion) est un élément de L ; un L - groupe d'opinions est un élément de L^p où p est un entier > 0.

L'ensemble des L - groupes d'opinions est donc la réunion $G(L) = \bigcup_{p>0} L^p$. Il est parfois utile de considérer, sur cet ensemble, sa structure de monoïde libre, obtenue en ajoutant l'opinion vide (qui correspondrait à $p = 0$) et par concaténation des L - groupes d'opinions :

Si $e = (r_1, \ldots, r_p) \in L^p$ et $e' = (r'_1, \ldots, r'_q) \in L^q$,

$ee' = (r_1, \ldots, r_p, r'_1, \ldots, r'_q) \in L^{p+q}$

2.2 - La procédure Condorcet et la distance de la différence symétrique

Nous nous proposons de placer la procédure Condorcet dans un contexte assez général, afin de justifier l'emploi de la distance de la différence symétrique. Pour plus de détails sur cette procédure et sur "l'effet Condorcet", nous renvoyons le lecteur à l'un des nombreux auteurs ayant étudié ces questions (c.f. [3], [5], [8], [10], par exemple).

Soit $e = (r_1, \ldots, r_p) \in R^p$. Pour chaque couple $(x,y) \in X \times X$, posons $v(x,y) = |\{ i \in I, (x,y) \in r_i \}|$.

Soit $\gamma(e)$ la relation binaire sur X définie par :

$$(x,y) \in \gamma(e) \text{ si et seulement si } v(x,y) \geqslant v(y,x) .$$

La relation $\gamma(e)$ est toujours totale et réflexive (c'est donc un match), mais elle n'est, en général, ni antisymétrique, ni transitive (même si chaque r_i l'est). Toutefois, si p est impair et si chaque relation r_i est un tournoi, $\gamma(e)$ est un tournoi.

On dit qu'un tournoi t (sur X) est extrait d'un match m lorsque $t \subset m$. Si $N(m)$ désigne le nombre de couples (x,y) tels que $(x,y) \in m$ et $(y,x) \in m$, on peut extraire de m , $2^{N(m)}$ tournois.

On définit la distance de la différence symétrique entre deux relations binaires par la formule :

$$\delta (r,s) = \sum_{(x,y) \in X \times X} | \hat{r} (x,y) - \hat{s} (x,y) | \quad .$$

Il est clair que δ est une distance sur R et que :

$$\delta (r,s) = | r \Delta s | = | r \cup s - r \cap s | \quad .$$

Si $e = (t_1, \ldots, t_p)$ est une famille de tournois, on trouve :

$$\sum_{i=1}^{p} \delta (\gamma(e) , t_i) = 2 \sum_{\substack{(x,y) \in \gamma(e) \\ x \neq y}} v (y,x)$$

PROPOSITION 1 [Folklore]

Si $e = (t_1, \ldots, t_p)$ est une famille de tournois de X, les relations binaires s telles que : $\sum_{i=1}^{p} \delta(s,m_i) = \inf_{r \in m} (\sum_{i=1}^{p} \delta(r,t_i))$,

sont les tournois extraits du match $\gamma (e)$.

2.3 - Eloignements sur un ensemble d'opinions

Soit L un ensemble d'opinions, pour $s \in L$ et pour $e \in L^p$, nous avons introduit la quantité $D(s,e) = \sum_{i=1}^{p} \delta (s,r_i)$ (avec $e = (r_1, \ldots, r_p)$) qui mesure, en quelque sorte, l'éloignement de l'opinion individuelle s , au groupe d'opinions e . C'est cette notion que nous nous proposons de systématiser.

DEFINITION 1 :

Un indice d'éloignement sur L est une application.

$D : L \times G(L) \to \mathbb{R}$ (ensemble des réels) telle que :

(E_1) La restriction D_1 de D à $L \times L$ est une distance sur L.

(E_2) Pour tout $(s,e) \in L \times G(L)$, $D(s,e) \geqslant 0$.

(E_3) $D(s,e) = 0$ si et seulement si $e = (r_1,\ldots, r_p)$ est tel que $r_1 = \ldots = r_p = s$.

D est un éloignement s'il vérifie, en outre :

(E_4) Pour tout $s \in L$, $e \in G(L)$, $e' \in G(L)$, $D(s,ee') \leqslant D(s,e) + D(s,e')$.

Si l'inégalité de (E_4) est remplacée par :

(E_4') $D(s,ee') \leqslant \sup(D(s,e), D(s,e'))$,

on dit que D est un éloignement ultramétrique.

Un indice d'éloignement (resp. un éloignement) est dit monotone lorsque :

(M) Pour tout $e = (r_1,\ldots, r_p) \in G(L)$ et pour tout $(s,s') \in L \times L$, $D(s,e) < D(s',e)$ dès que $D_1(s,r_i) \leqslant D_1(s',r_i)$, pour tout i , l'une au moins de ces p inégalités étant stricte.

2.4 - Trois éloignements classiques et leurs généralisations

Un éloignement D est dit additif lorsque (E) est remplacé par :

(A) $D(s,ee') = D(s,e) + D(s,e')$.

Pour $e = (r_1,\ldots, r_p)$, on obtient alors :

$$D(s,e) = \sum_{i=1}^{p} D_1(s,r_i) .$$

On dit que D est <u>euclidien</u>, lorsque :

(E) $D(s,ee')^2 = D(s,e)^2 + D(s,e')^2$.

Il vient alors : $D(s,e)^2 = \sum_{i=1}^{p} D_1(s,r_i)^2$.

Enfin, on dit qu'un éloignement ultramétrique D est <u>uniforme</u> lorsque (E_4') est remplacé par :

(U) $D(s,ee') = \sup(D(s,e), D(s,e'))$.

Dans ce cas, $D(s,e) = \sup_{1 \leq i \leq p} D_1(s,r_i)$

Ces trois éloignements correspondent aux trois normes classiques, dans $\mathbb{R}^p$, du vecteur $\vec{v}(s,e) = (D_1(s,r_1), \ldots, D_1(s,r_p))$. Leur inconvénient est qu'ils demeurent invariants dans toute permutation des "coordonnées" de e . Autrement dit, au sein d'un groupe d'opinions, toutes les opinions individuelles ont même importance. Cette hypothèse est inacceptable, en analyse multicritère, où les critères, conduisant aux groupes d'opinions, sont souvent pondérés. Cette remarque conduit à la généralisation suivante :

Soit d une distance sur L et soit $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs. On définit les indices d'éloignements <u>linéaire</u>, <u>quadratique</u> et <u>sup</u> par les formules :

indice linéaire : $D(s,e) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \, d(s,r_i)$;

indice quadratique : $D(s,e) = \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2 \, d(s,r_i)^2\right)^{1/2}$;

indice sup : $D(s,e) = \sup_{1<i<p} (\lambda_i \, d(s,r_i))$.

Tous ces indices d'éloignement (proposés initialement par Feldman, c.f. [4]) sont monotones.

En général, la condition (E_4) (ou (E_4') pour l'indice sup) n'est plus vérifiée, pour ces trois indices. Elle le sera si l'on suppose que la suite $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est décroissante (au sens large). Cette hypothèse n'est pas contraignante et on pourra toujours s'y ramener, en analyse multicritère, en supposant que les critères sont toujours rangés par ordre d'importance décroissante.

2.5 - Opinions centrales - Eloignements parétiens

DEFINITION 2 :

Soit L un ensemble d'opinions et soit D un indice d'éloignement sur L, on dit qu'une L-opinion individuelle s est <u>D-centrale</u> pour un L-groupe d'opinions e lorsque :

$$D(s,e) = \inf_{r \in L} D(r,e) \quad .$$

On dit que l'indice d'éloignement D est <u>parétien</u> sur L si quelque soit $e = (r_1, \ldots, r_p) \in G(L)$ toute opinion individuelle s D-centrale pour e contient l'intersection $\bigcap_{i=1}^{p} r_i$ (autrement dit s contient tous les couples (x,y) tels que $(x,y) \in r_i$, pour tout indice de i).

On dit que D est <u>quasi-parétien</u> sur L si toute opinion individuelle s D-centrale pour e contient tous les couples $(x,y) \in X \times X$ tels que :

- $(x,y) \in r_i$ pour tout i,
- il existe un indice j tel que $(y,x) \notin r_j$.

Autrement dit, s contient tous les couples (x,y), non "unanimement indifférents", tels que $(x,y) \in r_i$ pour tout i.

Tout éloignement n'est pas parétien. Il suffit, pour s'en convaincre de considérer <u>l'éloignement discret</u> sur L :

$D(s,e) = 0$, si $r_1 = \ldots = r_p = s$;

$D(s,e) = 1$, sinon .

C'est un problème particulièrement important que de déterminer si un éloignement donné est ou non parétien.

Notons aussi que si tous les éléments de L sont antisymétriques, les notions de "parétien" et de "quasi-parétien" coïncident.

2.6 - Ensembles d - réguliers et éloignements monotones

DEFINITION 3 :

Soit L un ensemble d'opinions et soit d une distance sur L . Soit $s \in L$ et soit $(x,y) \in X \times X$ tel que $(x,y) \notin s$. On appelle <u>d - modification</u> de s par (x,y) une L - opinion individuelle s' telle que :

(M_1) $(x,y) \in s'$.

(M_2) Pour tout $r \in L$ telle que $(x,y) \in r$, $(y,x) \notin r$, $d(s',r) < d(s,r)$.

(M_3) Pour tout $r \in L$ telle que $(x,y) \in r$ et $(y,x) \in r$, $d(s',r) \leqslant d(s,r)$.

On dit que L est <u>d - régulier</u> lorsque, pour tout $s \in L$ et pour tout $(x,y) \in X \times X$ tel que $(x,y) \notin s$, il existe au moins une d - modification de s par (x,y) .

PROPOSITION 2 :

<u>Soit</u> D <u>un indice d'éloignement monotone sur un ensemble d'opinions</u> L .
<u>Si</u> L <u>est D_1 - régulier,</u> D <u>est quasi-parétien sur</u> L .

<u>Preuve</u> : Soit $e = (r_1,.., r_p) \in G(L)$ et soit $(x,y) \in X \times X$ tel que $(x,y) \in r_i$, pour tout i , et $(y,x) \notin r_j$, pour au moins un indice j . Soit $s \in L$ tel que $(x,y) \notin s$.

Considérons une D_1 - modification s' de s par (x,y) . En vertu de (M_2) et de (M_3) : $D_1(s',r_i) \leqslant D_1(s,r_i)$, pour tout i , l'une au moins de ces p inégalités étant stricte. La monotonie de D (condition (M) 2 - 3) entraîne alors : $D(s',e) < D(s,e)$: s n'est pas D-centrale pour e .

COROLLAIRE 1 :

<u>Soit</u> D <u>un indice d'éloignement monotone sur un ensemble d'opinions</u> L . <u>On suppose que</u> L <u>est</u> D_1 - <u>régulier</u>. <u>Si</u> $e = (r_1,\ldots, r_p) \in G(L)$ <u>est tel qu'il n'existe pas de couple</u> $(x,y) \in X \times X$, $x \neq y$, <u>vérifiant</u> $(x,y) \in r_i$ <u>et</u> $(y,x) \in r_i$, <u>pour tout indice</u> i ; <u>toute L - opinion individuelle</u>, D - <u>centrale pour</u> e , <u>contient l'intersection</u> $\bigcap_{i=1}^{p} r_i$.

COROLLAIRE 2 [J. Feldman] :

<u>Soit</u> D <u>un indice d'éloignement monotone sur un ensemble d'opinions</u> L .
<u>Si</u> L <u>est</u> D_1 - <u>régulier et si tous les éléments de</u> L <u>sont antisymétriques</u>
D <u>est parétien sur</u> L .

2.7 - Eloignements non dictatoriaux

L'absence de dictateur est l'une des conditions exigées par Arrow ([1]) .

DEFINITION 4 :

On dit qu'un indice d'éloignement D sur un ensemble d'opinions L est dictatorial à l'ordre $p > 1$, s'il existe un entier k , $1 \leqslant k \leqslant p$ tel que, pour tout groupe d'opinions $e = (r_1, \ldots, r_p) \in L^p$, r_k est D - centrale pour e .

PROPOSITION 3 :

Soit D un éloignement sur L et soit $p > 1$ un entier tel que :

$(\overline{F})$ Pour tout $e = (r_1, \ldots, r_p) \in L^p$ et pour tout $s \in L$, $D_1 (s, r_i) < D(s,e)$, pour tout indice i , sauf si $r_j = s$ pour tout $j \neq i$.

Alors D n'est pas dictatorial à l'ordre p .

Preuve : Supposons que D est dictatorial à l'ordre p , il existe un entier k , $1 \leqslant k \leqslant p$ tel que pour tout $e = (r_1, \ldots, r_p)$,

$$D (r_k, e) = \inf_{t \in L} D(t,e) .$$

Soient r et s deux opinions individuelles distinctes. Considérons le groupe d'opinions $e = (r_1, \ldots, r_p)$ tel que : $r_i = r$ pour $i \neq k$ et $r_k = s$.

En vertu de (E_4) : $D(t,e) \leqslant (p-1) D_1(t,r) + D_1(t,s)$. Donc : $D(s,e) \leqslant (p-1) D_1(t,r) + D_1(t,s)$, pour tout $t \in L$. En posant $t = r$, on obtient : $D(s,e) \leqslant D_1(s,r)$, ce qui contredit la condition $(\overline{F})$.

3 - PROPRIETES DE LA DISTANCE DE LA DIFFERENCE SYMETRIQUE ET PROPRIETE PARETIENNE SUR M , T , O et P .

3.1 - Eloignements symétriques

On dit qu'un indice d'éloignement (resp. un éloignement) D sur un ensemble d'opinions L est <u>symétrique</u> lorsqu'il existe un nombre réel λ tel que, pour tout $(r,s) \in L \times L$, $D_1(r,s) = \lambda\,\delta(r,s)$ (où δ est la distance de la différence symétrique, c.f. 2.1 , sur R) . Les notions de D_1 - modifications et de δ - modifications sont alors confondues.

Etant donné un ensemble d'opinions L , on appelle <u>diamètre</u> de L le nombre $\Delta = \sup\limits_{(s,t) \in L \times L} \delta(s,t)$. L'<u>image</u> de L est l'ensemble : $Im(L) = \{ \delta(s,t) , s \in L , t \in L \} \subset \mathbb{N}$. Les <u>antipodes</u> de L sont les ensembles à deux éléments $\{ s,t \}$ tels que $\delta(s,t) = \Delta$.

3.2 - Etude de la distance de la différence symétrique sur M et T .

Rappelons que si $r \in R$, r^{-1} est la relation binaire définie par : $(x,y) \in r^{-1}$ si et seulement si $(y,x) \in r$.

PROPOSITION 4 [Folklore] :

<u>Les diamètres de</u> M <u>et de</u> T <u>ont même valeur</u> : $n^2 - n$.

$Im(M) = \{ p \in \mathbb{N} , 0 \leq p \leq n^2 - n \}$, $Im(T) = \{ 2p , p \in \mathbb{N} , 0 \leq p \leq \frac{n^2-n}{2} \}$

<u>Les antipodes de</u> M <u>sont les antipodes de</u> T . <u>Les antipodes de</u> T <u>sont les ensembles de la forme</u> (t,t^{-1}) .

PROPOSITION 5 : M et T sont δ-réguliers

Preuve : Soit m un match et soit $(x,y) \in X \times X$ tel que $(x,y) \notin m$. On définit un match m' vérifiant (M_1) (c.f. 2.6) par les conditions suivantes (à l'exclusion de toute autre) :

$$\begin{cases} (u,v) \in m' \text{ si et seulement si } (u,v) \in m \text{ pour } u \neq x \text{ et } u \neq y \\ (x,y) \in m' \end{cases}$$

Si r est un match tel que $(x,y) \in r$, il vient $\delta(m',r) = \delta(m,r)-1$: m' vérifie (M_2) et (M_3).

Si t est un tournoi tel que $(x,y) \notin t$, on définit un tournoi t' vérifiant (M_1) en posant :

- $(u,v) \in t'$ si et seulement si $(u,v) \in t$ pour $u \notin \{x,y\}$, $v \notin \{x,y\}$
- $(x,x) \in t'$, $(y,y) \in t'$, $(x,y) \in t'$.

Si r est un tournoi tel que $(x,y) \in r$, il vient $\delta(t',r) = \delta(t,r) - 2$. Ce qui prouve que t' vérifie (M_2) (donc (M_3) les tournois étant antisymétriques).

Remarque : Pour les matches, les conditions (M_2) et (M_3) sont remplacées par :

(M_2') Pour tout $r \in M$ tel que $(x,y) \in r$, $\delta(m',r) < \delta(m,r)$.

On en déduit immédiatement :

COROLLAIRE : Tout indice d'éloignement monotone symétrique est parétien sur M et sur T.

3.3 - Etude de la distance de la différence symétrique sur O et sur P

PROPOSITION 6 [Folklore] : Les diamètres de O et P ont même valeur : $n^2 - n$.

Im (P) = Im (M) ; Im (O) = Im (T) .

Les antipodes de P sont les antipodes de O . Les antipodes de O sont les ensembles de la forme $\{ r, r^{-1} \}$.

PROPOSITION 7 : P est δ-régulier.

Preuve : Soit $s \in P$ et soit $(x,y) \in X \times X$ tel que $(x,y) \notin s$. Posons $Z = X - \{ x,y \}$ et définissons un préordre total s' , vérifiant (M_1) , par les conditions suivantes (à l'exclusion de toute autre) :

- Si $(u,v) \in Z \times Z$, $(u,v) \in s'$ si et seulement si $(u,v) \in s$.
- $(x,x) \in s'$, $(x,y) \in s'$, $(y,y) \in s'$.
- Pour $u \in Z$, $(x,u) \in s'$ si et seulement si $(y,u) \in s$; $(u,x) \in s'$ si et seulement si $(u,y) \in s$; $(y,u) \in s'$ si et seulement si $(x,u) \in s$; $(u,y) \in s'$ si et seulement si $(u,x) \in s$.

Si r est un préordre total tel que $(x,y) \in r$, on trouve :

- $\delta (s,r) - \delta (s',r) = 2 + U$, si $(y,x) \notin r$;
- $\delta (s,r) - \delta (s',r) = U$, si $(y,x) \in r$.

Avec $U = \sum_{u \in Z} (Au - Bu)$, où :

$$Au = |\hat{s}(u,x) - \hat{r}(u,x)| + |\hat{s}(u,y) - \hat{r}(u,y)| + |\hat{s}(x,u) - \hat{r}(x,u)| + |\hat{s}(y,u) - \hat{r}(y,u)| ,$$

$$Bu = |\hat{s}(u,x) - \hat{r}(u,y)| + |\hat{s}(u,y) - \hat{r}(u,x)| + |\hat{s}(x,u) - \hat{r}(y,u)| + |\hat{s}(y,u) - \hat{r}(x,u)| .$$

Pour prouver que s' vérifie (M_2) et (M_3) , il suffira de montrer que, pour chaque $u \in Z$, $Au - Bu \geqslant 0$. Pour celà, considérons les sous-ensembles Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 de Z définis comme suit :

$Z_1 = \{ u \in Z \ , \ (u,y) \in s \ , \ (y,u) \notin s \}$,

$Z_2 = \{ u \in Z \ , \ (u,y) \in s \ , \ (y,u) \in s \}$,

$Z_3 = \{ u \in Z \ , \ (u,u) \in s \ , \ (u,y) \notin s \ , \ (u,x) \in s \ , \ (x,u) \notin s \}$,

$Z_4 = \{ u \in Z \ , \ (u,x) \in s \ , \ (x,u) \in s \}$,

$Z_5 = \{ u \in Z \ , \ (x,u) \in s \ , \ (u,x) \notin s \}$.

On obtient ainsi une partition de Z (certains de ces ensembles peuvent être vides).

1) Si $u \in Z_1$, $(u,x) \in s$ et $(x,u) \notin s$ (sinon on aurait $(x,y) \in s$) et $Au - Bu = 0$.

2) Si $u \in Z_2$, $(u,x) \in s$ et $(x,u) \notin s$: $Au - Bu = 2(\hat{r}(x,u) - \hat{r}(y,u))$.
Puisque $(x,y) \in r$, $\hat{r}(x,u) \geqslant \hat{r}(y,u)$, pour tout u : $Au - Bu \geqslant 0$.

3) Si $u \in Z_3$, $Au - Bu = 2\,(\hat{r}(x,u) - \hat{r}(y,u)) + 2\,(\hat{r}(u,y) - \hat{r}(u,x))$ et, comme $\hat{r}(u,y) \geqslant \hat{r}(u,x)$, pour tout u : $Au - Bu \geqslant 0$.

4) Si $u \in Z_4$, $(y,u) \in s$, $(u,y) \notin s$ et $Au - Bu = 2\,(\hat{r}(u,y) - \hat{r}(u,x)) \geqslant 0$.

5) Si $u \in Z_5$, $(y,u) \in s$, $(u,y) \notin s$ et $Au - Bu = 0$.

D'où le résultat.

<u>Remarque sur la démonstration précédente</u> : s' est en fait obtenu, en <u>transposant</u> (y,x) dans s . Si s est une relation d'ordre, $Z_1 = Z_3 = \emptyset$ et Z_2 est l'intervalle ouvert (relativement à s) $]\,y,x\,[\,s$. s' est

alors un ordre total et on retrouve ainsi un résultat de Feldman (corollaire 1, ci-dessous) . D'ailleurs, dans ce cas :

$$\delta\ (s,r) - \delta\ s',r) \;=\; 2 + 4 \sum_{u \in]\, y,x\, [_s} (\hat{r}\,(x,u) - \hat{r}\,(y,u)) \quad .$$

COROLLAIRE 1 [Feldman] : 0 <u>est</u> δ - <u>régulier</u>.

COROLLAIRE 2 : <u>Tout indice d'éloignement monotone symétrique est quasi-parétien sur</u> P .

COROLLAIRE 3 [Feldman] : <u>Tout indice d'éloignement monotone symétrique est parétien sur</u> 0

Nous n'aborderons pas la question de la δ - régularité de E , celle-ci est, en effet, sans intérêt pour établir une propriété parétienne (la condition (M_2) n'intervenant pas dans E). Le concept utile, dans ce cas, est celui de <u>transfert</u>.([9])

4 - PROPRIETES DE LA DISTANCE DE LA DIFFERENCE SYMETRIQUE ET PROPRIETE PARETIENNE SUR P ET E .

4.1 - <u>Etude de la distance de la différence symétrique sur</u> E .

Soit $r \in E$, pour $x \in X$, désignons par $\overline{x_r}$ la classe d'équivalence de x modulo r .

Pour $(r,s) \in E \times E$, il vient :

$$\delta\ (r,s) = \sum_{(x,y) \in X\times X} |\ \hat{r}\ (x,y) - \hat{s}\ (x,y)\ | = \sum_{x \in X} \left(\sum_{y \in X} |\ \hat{r}\ (x,y) - \hat{s}(x,y)\ | \right) =$$

$$\sum_{x \in X} \left(\sum_{y \in \overline{x_r}} (1 - \hat{s}\ (x,y)) + \sum_{y \notin \overline{x_r}} \hat{s}\ (x,y) \right) = \sum_{x \in X} \left(|\overline{x_r}| - |\overline{x_r} \cap \overline{x_s}\ | + |\ (X - \overline{x_r}) \cap \overline{x_s}\ | \right) \ . \text{ Donc :}$$

$$\delta\ (r,s) = \sum_{x \in X} |\ \overline{x_r}\ \Delta\ \overline{x_s}\ | \quad .$$

Celà s'écrit encore, si l'on utilise les ensembles quotients X/r et X/s :

$$\delta\ (r,s) = \sum_{A \in X/r, B \in X/s} |\ A \cap B\ | \cdot |\ A\ \Delta\ B\ | \quad .$$

Si l'on désigne par r_α l'équivalence discrète (i.e. l'égalité), on obtient :

$$\delta\ (r,r_\alpha) = \sum_{A \in X/r} |\ A\ |^2 - n \quad .$$

Si r_ω désigne l'équivalence grossière $(X/r_\omega = \{ X \})$:

$$\delta\ (r,r_\omega) = n^2 - \sum_{A \in X/r} |\ A\ |^2 \quad .$$

En particulier :

$$\delta\ (r_\alpha,r_\omega) = n^2 - n \quad .$$

D'une manière générale, en utilisant l'inégalité :

$2\ \delta\,(r,s) \leqslant \delta\,(r,r_\alpha) + \delta\,(r_\alpha,s) + \delta\,(r,r_\omega) + \delta\,(r_\omega,s)$, on trouve que :

$$\delta\ (r,s) \leqslant n^2 - n \quad .$$

$n^2 - n$ est donc le diamètre de E . Par ailleurs, on vérifie facilement que $\{ r_\alpha , r_\omega \}$ est la seule antipode de E .

4.2 - Transferts dans les relations d'équivalence

Soit $s \in E$ et soit $(x,y) \in X \times X$ tel que $(x,y) \notin s$. Désignons par $A_1, A_2, \ldots , A_q$ les classes d'équivalence, modulo s, avec : $x \in A_1$, $y \in A_2$

A la partition $A_1 \cup \{ y \}$, $A_2 - \{ y \}$, A_3 , ... , A_q est associée une relation d'équivalence, notée $s\ [x,y]$, obtenue par transfert de y

dans $\overline{x_s}$. On définit de même la relation d'équivalence $s\,[y,x]$ (transfert de x dans $\overline{y_s}$) associée à la partition :

$$A_1 - \{x\}\ ,\quad A_2 \cup \{x\}\ ,\quad A_3\ ,\ \dots\ ,\ A_q\quad .$$

PROPOSITION 8 : <u>Soit</u> $s \in E$ <u>et soit</u> $(x,y) \in X \times X$ <u>tel que</u> $(x,y) \notin s$. <u>Si</u> r <u>est une relation d'équivalence telle que</u> $(x,y) \in r$, <u>on a</u> :

$$\delta(s,r) - \delta(s[x,y], r) - 2 = \delta(s[y,x], r) - \delta(s,r) + 2\,.$$

<u>Preuve</u> : Soient $A_1, A_2, \dots, A_q$ les classes d'équivalence modulo s avec $x \in A_1$, $y \in A_2$. Soient $B_1, B_2, \dots, B_m$ les classes d'équivalence modulo r avec $x \in B_1$, $y \in B_1$.

On trouve facilement :

$$\delta(s,r) - \delta(s[x,y], r) = \sum_{i=1}^{m} \Big(|A_1 \cap B_i|\,|A_1 \Delta B_i| - |(A_1 \cup \{y\}) \cap B_i|\,|(A_1 \cup \{y\}) \Delta B_i| + |A_2 \cap B_i|\,|A_2 \Delta B_i| - |(A_2 - \{y\}) \cap B_i|\,|(A_2 - \{y\}) \Delta B_i| ,$$

$$\delta(s,r) - \delta(s[x,y], r) = \sum_{i=1}^{m} \Big(|A_1 \cap B_i|\,|A_1 \Delta B_1| - |(A_1 - \{x\}) \cap B_i|\,|(A_1 - \{x\}) \Delta B_i| + |A_2 \cap B_i|\,|A_2 \Delta B_i| - |(A_2 \cup \{x\}) \cap B_i|\,|(A_2 \cup \{x\}) \Delta B_i| .$$

Or :

$$|(A_1 \cup \{y\}) \cap B_1| = |A_1 \cap B_1| + 1\ ,\quad |(A_2 - \{y\}) \cap B_1| = |A_2 \cap B_1| - 1\,,$$
$$|(A_1 \cup \{y\}) \Delta B_1| = |A_1 \Delta B_1| - 1\ ,\quad |(A_2 - \{y\}) \Delta B_1| = |A_2 \Delta B_1| + 1\,;$$

$$|(A_1 - \{x\}) \cap B_1| = |A_1 \cap B_1| - 1\ ,\quad |(A_2 \cup \{x\}) \cap B_1| = |A_2 \cap B_1| + 1\,,$$
$$|(A_1 - \{x\}) \Delta B_1| = |A_1 \Delta B_1| + 1\ ,\quad |(A_2 \cup \{x\}) \Delta B_1| = |A_2 \Delta B_1| - 1\,.$$

Et , pour $i > 1$:

$$|(A_1 \cup \{y\}) \cap B_i| = |(A_1 - \{x\}) \cap B_i| = |A_1 \cap B_i|\ ,$$
$$|(A_2 - \{y\}) \cap B_i| = |(A_2 \cup \{x\}) \cap B_i| = |A_2 \cap B_i|\ ;$$

$|(A_1 \cup \{y\}) \Delta B_i| = |A_1 \Delta B_i| + 1$, $|(A_2 - \{y\}) \Delta B_i| = |A_2 \Delta B_i| - 1$;

$|(A_1 - \{x\}) \Delta B_i| = |A_1 \Delta B_i| - 1$, $|(A_2 \cup \{x\}) \Delta B_i| = |A_2 \Delta B| + 1$.

De telle sorte que :

$\delta(r,s) - \delta(s[x,y], r) = 2 + U$ et

$\delta(r,s) - \delta(s[y,x], r) = 2 - U$, avec :

$$U = |A_1 \cap B_1| - |A_2 \cap B_1| + |A_2 \Delta B_1| - |A_1 \Delta B_1| + 2 \sum_{i=2}^{m} \left(|A_2 \cap B_i| - |A_1 \cap B_i| \right) .$$

D'où le résultat.

COROLLAIRE 1 : <u>Sous les hypothèses de la proposition 8, on a</u> :

$$\delta(s, s[x,y]) = \delta(s, s[y,x]) = 2[\overline{x_s}] + 2[\overline{y_s}] - 2 .$$

$$\delta(s[x,y], s[y,x]) = 4[\overline{x_s}] + 4[\overline{y_s}] - 8 .$$

COROLLAIRE 2 : $\mathrm{Im}(E) = \{ 2p , p \in \mathbb{N} , 0 \leqslant p \leqslant \frac{n^2 - n}{2} \}$

<u>Preuve</u> : Il est clair que tous les éléments de $\mathrm{Im}(E)$ sont pairs. On établit alors la formule énoncée en réitérant la première formule du corollaire 1, à partir de l'équivalence discrète : $s = r_\alpha$.

4.3 - <u>Propriété parétienne des indices d'éloignement linéaires symétriques sur</u> E .

PROPOSITION 9 [Régnier] : <u>Tout indice d'éloignement linéaire symétrique est parétien sur</u> E .

<u>Preuve</u> : Soit $e = (r_1, \dots, r_p) \in G(E)$ et soit $(x,y) \in X \times X$ tel que $(x,y) \in r_i$, pour tout indice i . Soit $s \in E$ tel que $(x,y) \notin s$.

Montrons qu'il existe une relation d'équivalence s' telle que $D(s',e) < D(s,e)$.

En vertu de la proposition 8, il existe, pour chaque indice i, un nombre réel u_i tel que :

$$\delta(s,r_i) - \delta(s[x,y], r_i) = 2 + u_i \quad ,$$

$$\delta(s,r_i) - \delta(s[y,x], r_i) = 2 - u_i \quad .$$

Donc, si :

$$D(s,e) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \, \delta(s,r_i) \qquad (\lambda_i > 0) \quad ,$$

il vient :

$$D(s[x,y], e) = D(s,e) - 2 \sum_{i=1}^{p} \lambda_i - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i \qquad \text{et}$$

$$D(s[y,x], e) = D(s,e) - 2 \sum_{i=1}^{p} \lambda_i + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i \qquad .$$

Il suffit de poser :

$$s' = s[x,y] \quad \text{si} \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i \geqslant 0 \quad \text{et}$$

$$s' = s[y,x] \quad \text{si} \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i \leqslant 0 \quad .$$

4.4 - Transferts dans les préordres totaux

Pour les préordres totaux, on a aussi une notion de transfert. Rappelons qu'à tout préordre (total) r sur X est associée une relation d'équivalence $eq(r)$: $(x,y) \in eq(r)$ si et seulement si $(x,y) \in r$ et $(y,x) \in r$. r induit sur l'ensemble quotient $X/eq(r)$ un ordre (total) $\bar{r}$: $(\bar{x},\bar{y}) \in \bar{r}$ si et seulement si $(x,y) \in r$.

Réciproquement, la donnée d'une relation d'équivalence sur X et d'un ordre (total) $\bar{t}$ sur X/s permet de définir un préordre (total) $\bar{t} \times s$ sur X : $(x,y) \in \bar{t} \times s$ si et seulement si $(\bar{x},\bar{y}) \in \bar{t}$. En outre : $eq(\bar{t} \times s) = s$, $\bar{r} \times eq(r) = r$.

Considérons, maintenant, un préordre total s sur X et un couple $(x,y) \in X \times X$ tel que $(x,y) \notin s$. Soient $A_1, A_2, \ldots, A_q$ les classes d'équivalence modulo $eq(s)$ avec $x \in A_1$, $y \in A_2$. Les classes d'équivalence modulo $eq(s)[x,y]$ et $eq(s)[y,x]$ sont respectivement :

$A'_1, A'_2, \ldots, A'_q$ et $A''_1, A''_2, \ldots, A''_q$, avec :

$A'_1 = A_1 \cup \{y\}$, $A'_2 = A_2 - \{y\}$, $A''_1 = A_1 - \{x\}$, $A''_2 = A_2 \cup \{x\}$

et, pour $i > 2$: $A''_i = A'_i = A_i$.

Sur les ensembles quotients $X/eq(s)[x,y]$ et $X/eq(s)[y,x]$, on a les préordres totaux $\bar{s}[x,y]$ et $\bar{s}[y,x]$ définis par :

$(A'_i, A'_j) \in \bar{s}[x,y]$ si et seulement si $(A_i, A_j) \in \bar{s}$,

$(A''_i, A''_j) \in \bar{s}[y,x]$ si et seulement si $(A_i, A_j) \in \bar{s}$.

On pose alors :

$s[x,y] = \bar{s}[x,y] \times eq(s)[x,y]$ et

$s[y,x] = \bar{s}[y,x] \times eq(s)[y,x]$.

On dit que $s[x,y]$ (resp. $s[y,x]$) est obtenu par <u>transfert</u> de y en x (resp. par transfert de x en y).

PROPOSITION 10 : <u>Soit</u> s <u>un préordre total sur</u> X <u>et soit</u> $(x,y) \in X \times X$ <u>tel que</u> $(x,y) \notin s$. <u>Pour tout</u> $r \in P$ <u>tel que</u> $(x,y) \in r$ <u>et</u> $(y,x) \in r$, <u>on a</u> :

$$\delta(s,r) - \delta(s[x,y], r) - 1 = \delta(s[y,x], r) - \delta(s,r) + 1 .$$

<u>Preuve</u> : Posons $W = X - \{x,y\}$,

$Z_1 = \{ u \in W , (y,u) \in s , (u,y) \in s , (u,x) \in s \}$,

$Z_2 = \{ u \in W , (y,u) \in s , (u,x) \in s , (u,y) \notin s, (x,u) \notin s \}$

$Z_3 = \{ u \in W , (y,u) \in s , (u,x) \in s , (u,x) \in s \}$.

Posons aussi, pour $(u,v) \in X \times X$:

$$\Theta_1\ (u,v) = |\hat{r}(u,v) - \hat{s}(u,v)| - |\hat{r}(u,v) - \hat{s}[x,y](u,v)| \quad ,$$

$$\Theta_2\ (u,v) = |\hat{r}(u,v) - \hat{s}(u,v)| - |\hat{r}(u,v) - \hat{s}[y,x](u,v)| \quad .$$

Or, un calcul facile montre que :

$$\delta(s,r) - \delta(s[x,y], r) = 1 + \sum_{u \in W} (\Theta_1\ (u,x) + \Theta_1\ (x,u) + \Theta_1(u,y) + \Theta_1(y,u)) \quad ,$$

$$\delta(s,r) - \delta(s[y,x], r) = 1 + \sum_{u \in W} (\Theta_2\ (u,x) = \Theta_2\ (x,u) + \Theta_2(u,y) + \Theta_2(y,u)) \quad .$$

Si $u \notin Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3$, il vient alors :

$$\hat{s}[x,y]\ (x,u) = \hat{s}\ (x,u) \quad , \quad \hat{s}[x,y]\ (u,x) = \hat{s}\ (u,x) \quad ,$$

$$\hat{s}[x,y]\ (u,y) = \hat{s}\ (u,y) \quad , \quad \hat{s}[x,y]\ (y,u) = \hat{s}\ (y,u) \quad .$$

De telle sorte que, dans ce cas :

$$\Theta_1\ (u,x) = \Theta_1\ (x,u) = \Theta_1\ (u,y) = \Theta_1\ (y,u) = 0 \quad .$$

On vérifie, de même que (toujours pour $u \notin Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3$) :

$$\Theta_2\ (u,x) = \Theta_2\ (x,u) = \Theta_2\ (u,y) = \Theta_2\ (y,u) = 0 \quad .$$

Par ailleurs :

a) Si $u \in Z_1$ $\quad \hat{s}\ (x,u) = 0$ et $\hat{s}\ (u,x) = \hat{s}\ (y,u) = \hat{s}\ (u,y) = 1$;

$\hat{s}[x,y]\ (u,x) = \hat{s}[x,y]\ (u,y) = 1$, $\hat{s}[x,y]\ (x,u) = \hat{s}[x,y](y,u) = 0$;

$\hat{s}[y,x]\ (u,x) = \hat{s}[y,x]\ (u,y) = \hat{s}[y,x](x,u) = \hat{s}[y,x](y,u) = 1$.

De telle sorte que :

$\Theta_1\ (u,x) = 0$, $\Theta_1\ (x,u) = 0$, $\Theta_1\ (y,u) = 1 - 2\,\hat{r}\ (y,u)$, $\Theta_1\ (u,y) = 0$;

$\Theta_2\ (x,u) = -1 + 2\,\hat{r}\ (x,u)$, $\Theta_2\ (u,x) = 0$, $\Theta_2\ (y,u) = 0$, $\Theta_2\ (u,y) = 0$.

b) Si $u \in Z_2$ $\quad \hat{s}\ (x,u) = 0$, $\hat{s}\ (u,x) = 1$, $\hat{s}(y,u) = 1$, $\hat{s}\ (u,y) = 0$;

$\hat{s}[x,y](x,u) = 0$, $\hat{s}[x,y](u,x) = 1$, $\hat{s}[x,y](y,u) = 0$, $\hat{s}[x,y](u,y) = 1$;

$\hat{s}[y,x](x,u) = 1$, $\hat{s}[y,x](u,x) = 0$, $\hat{s}[y,x](y,u) = 1$, $\hat{s}[y,x](u,y) = 0$.

Et :

$\Theta_1(x,u) = 0$, $\Theta_1(u,x) = 0$, $\Theta_1(y,u) = 1 - 2\hat{r}(y,u)$, $\Theta_1(u,y) = 2\hat{r}(u,y) - 1$;

$\Theta_2(x,u) = -1 + 2\hat{r}(x,u)$, $\Theta_2(u,x) = 1 - 2\hat{r}(u,x)$, $\Theta_2(y,u) = 0$, $\Theta_2(u,y) = 0$.

c) Si $u \in Z_3$ $\hat{s}(x,u) = 1$, $\hat{s}(u,x) = 1$, $\hat{s}(y,u) = 1$, $\hat{s}(u,y) = 0$.

$\hat{s}[x,y](x,u) = 1$, $\hat{s}[x,y](u,x) = 1$, $\hat{s}[x,y](y,u) = 1$, $\hat{s}[x,y](u,y) = 1$;

$\hat{s}[y,x](x,u) = 1$, $\hat{s}[y,x](u,x) = 0$, $\hat{s}[y,x](y,u) = 1$, $\hat{s}[y,x](u,y) = 0$.

Donc :

$\Theta_1(x,u) = 0$, $\Theta_1(u,x) = 0$, $\Theta_1(y,u) = 0$, $\Theta_1(u,y) = -1 + 2\hat{r}(u,y)$;

$\Theta_2(x,u) = 0$, $\Theta_2(u,x) = 1 - 2\hat{r}(u,x)$, $\Theta_2(y,u) = 0$, $\Theta_2(u,y) = 0$.

On obtient donc :

$$\delta(s,r) - \delta(s[x,y],r) = 1 + |Z_1| - 2\sum_{u \in Z_1} \hat{r}(y,u) + 2\sum_{u \in Z_2}\left(\hat{r}(u,y) - \hat{r}(y,u)\right) - |Z_3| - 2\sum_{u \in Z_3} \hat{r}(u,y) ,$$

$$\delta(s,r) - \delta(s[y,x],r) = 1 + |Z_1| + 2\sum_{u \in Z_1} \hat{r}(x,u) + 2\sum_{u \in Z_2}\left(\hat{r}(x,u) - \hat{r}(u,x)\right) + |Z_3| - 2\sum_{u \in Z_3} \hat{r}(u,x) .$$

D'où le résultat, en remarquant que, pour tout $u \in X$:

$\hat{r}(x,u) = \hat{r}(y,u)$, $\hat{r}(u,x) = \hat{r}(u,y)$.

COROLLAIRE : Sous les hypothèses de la proposition 10, on a :

$$\delta(s, s[x,y]) = \delta(s, s[y,x]) = 1 + |Z_1| + |Z_3| + 2|Z_2| ,$$

$$\delta(s[x,y], s[y,x]) = 2|Z_1| + 2|Z_3| + 4|Z_2| .$$

4.5 - Propriété parétienne des indices d'éloignements linéaires symétriques sur P .

PROPOSITION 11 : Tout indice déloignement linéaire symétrique D est parétien sur P .

Preuve : Soit $e = (r_1, \dots, r_p) \in G(P)$ et soit $(x,y) \in r_i$, pour tout i, considérons un préordre total s tel que $(x,y) \notin s$.

Premier cas : il existe un indice j tel que $(y,x) \notin r_j$. L'indice D étant monotone est quasi-parétien sur P (prop. 7, Corol. 2), s n'est donc pas D-central.

Deuxième cas : $(y,x) \in r_i$ pour tout i. En raisonnant comme pour la preuve de la proposition 9, on trouve que l'une (au moins) des deux inégalités ci-dessous est vraie

$$D(s[x,y], e) < D(s,e)$$

$$D(s[y,x], e) < D(s,e).$$

Là encore, s n'est pas D-central.

5 - THEOREMES DE REDUCTION POUR LES INDICES D'ELOIGNEMENT LINEAIRES SYMETRIQUES

Soit Z un sous-ensemble de X et soit L un ensemble d'opinions (sur X). Pour $r \in L$, on pose $r^Z = r \cap (Z \times Z)$. On désigne alors par L^Z l'ensemble $\{ r^Z, r \in L \}$: L^Z est un ensemble d'opinions sur Z.
Il est clair que M^Z est l'ensemble des matches de Z ; T^Z, l'ensemble des tournois de Z ; O^Z, l'ensemble des ordres totaux de Z ; P^Z, l'ensemble des préordres totaux de Z ; E^Z, l'ensemble des équivalences sur Z.

Désignons par δ^Z la distance de la différence symétrique sur R^Z et pour $e = (r_1, \dots, r_p) \in G(L)$, posons : $e^Z = (r_1{}^Z, \dots, r_p{}^Z)$.

On peut alors définir la restriction d'un indice d'éloignement linéaire symétrique sur L à L^Z :

Si $D(s,e) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \, \delta(s, r_i)$, on pose :

$$D^Z(s^Z, e^Z) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \, \delta^Z(s^Z, r_i{}^Z) \quad .$$

Les <u>théorèmes de réduction</u> affirment que, pour un ensemble d'opinions L sur X et pour un indice d'éloignement linéaire symétrique D, $s \in L$ est D-centrale pour $e \in G(L)$ si et seulement si s^Z est D^Z-centrale pour e^Z, pour tout Z décrivant un ensemble de parties, convenablement choisi, de X.

5.1 - <u>Théorème de réduction pour</u> M , T , O <u>et</u> P

PROPOSITION 11 [Monjardet] : <u>Soit D un indice d'éloignement linéaire symétrique. Un match m (resp. un tournoi t) est D-central pour $e \in G(M)$ (resp. $e \in G(T)$) si et seulement si, pour tout $Z \subset X$, m^Z (resp. t^Z) est D^Z-central pour e^Z.</u>

<u>Preuve</u> : c.f. [8] .

Rappelons qu'étant donné un préordre total s sur X et $(x,y) \in X \times X$, l'intervalle $[x,y]_s$, relatif à s, est l'ensemble $\{u, (x,u) \in s, (u,y) \in s\}$.

PROPOSITION 12 : <u>Soit D un indice d'éloignement linéaire symétrique. Un préordre total s est D-central pour $e \in G(P)$ si et seulement si, pour tout intervalle Z, relatif à s, s^Z est D^Z-central pour e^Z.</u>

<u>Preuve</u> : Il est clair que la condition est suffisante (poser $Z = X$). Réciproquement, supposons qu'il existe un intervalle $Z = [u,v]_s$ tel que s^Z n'est pas D^Z-central pour e^Z et désignons par t^Z un préordre total sur Z central pour e^Z. Soit t la préordre total défini comme suit :

Si $(x,y) \in Z \times Z$, $(x,y) \in t$ si et seulement si $(x,y) \in t^z$.

Si $(x,y) \in (X - Z) \times (X - Z)$, $(x,y) \in t$ si et seulement si $(x,y) \in s$.

Si $(x,y) \in (X - Z) \times Z$, $(x,y) \in t$, si et seulement si $(x,u) \in s$.

Si $(x,y) \in Z \times (X - Z)$, $(x,y) \in t$, si et seulement si $(v,y) \in s$.

Il est clair que, pour tout préordre total r :

$\delta (s,r) - \delta (t,r) = \delta^z (s^z,r^z) - \delta^z (t^z,e^z)$.

Donc, par linéarité de D :

$D (s,e) = D (t,e) + D^z (s^z,e^z) - D^z (t^z,e^z)$,

$D (t,e) < D (s,e)$, ce qui contredit le fait que s est D - central pour e .

COROLLAIRE [Jacquet - Lagrèze] : Soit D un indice d'éloignement linéaire symétrique. Un ordre total s est D - central pour $e \in G(D)$ si et seulement si, pour tout intervalle Z , relatif à s , s^z est D^z - central pour e^z .

5.2 - Théorème de réduction pour E .

PROPOSITION 13 : Une relation d'équivalence r est D - centrale pour $e \in G(E)$ si et seulement si s^z est D^z - central pour e^z , pour toute réunion $Z = Y_1 \cup \dots \cup Y_q$ de classes d'équivalence modulo s .

Preuve : La condition est suffisante. Par ailleurs, il est clair qu'on peut se contenter de montrer qu'elle est nécessaire lorsque Z est de la forme $(X - Y)$ où Y est une classe d'équivalence modulo s .

Soit $r \in E$, $\delta (s,r) = \sum_{x \in X} | \overline{x_s} \Delta \overline{x_s} | = 2 \sum_{x \in Z} \Big(| \overline{x_r} | + | \overline{x_s} | - 2 | \overline{x_r} \cap \overline{x_s} | \Big) + \sum_{x \in Y} (| \overline{x_r} | + | \overline{x_s} | - 2 | \overline{x_r} \cap \overline{x_s} |) =$

$$\sum_{x \in Z} (| \bar{x}_r z | + | \bar{x}_s z | - 2 | \bar{x}_{rz} \cap \bar{x}_{sz} | \quad | \bar{x}_r \cap Y |) +$$

$$\sum_{x \in Z} (| \bar{x}_r | + | Y | - 2 | \bar{x}_r \cap Y |) = \delta^z (s^z, r^z) + \sum_{x \subset \bar{Z}} | \bar{x}_r \cap Y | +$$

$$\sum_{y \in Y} | \bar{x}_r \; \Delta \; Y | \; .$$

Pour $e \in G(E)$, on obtient, par linéarité :

$$D (s,e) = D^z (s^z, e^z) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \left(\sum_{x \in Z} | \bar{x}_{r_i} \cap Y | + \sum_{x \in Y} | \bar{x}_{r_i} \; \Delta \; Y | \right) .$$

Lorsqu'on fait "varier" s sur Z , le deuxième terme de cette somme reste constant. D'où le résultat.

6 - QUELQUES REMARQUES

Les principaux résultats de ce travail peuvent se résumer en un théorème :

THEOREME : Tout indice d'éloignement monotone symétrique est parétien sur M, T, O et quasi-parétien sur P .

Tout indice d'éloignement linéaire symétrique est parétien sur P et E .

C'est Feldman ([4]) qui, le premier, a remarqué que la propriété parétienne sur O dépend essentiellement de la monotonie de l'éloignement considéré. C'est sa démarche que nous avons systématisée en définissant la notion d'ensemble d - régulier.

La propriété parétienne sur E a été initialement démontrée par Régnier ([9]) dans un article que nous n'avons, malheureusement, jamais eu entre les mains. Les relations d'équivalences centrales jouent un rôle important en classification ([7]) .

La propriété parétienne semble beaucoup plus difficile à établir quand un groupe d'opinions peut être unanimement indifférent à un couple (x,y) . D'une manière générale, on peut définir un indice d'éloignement <u>transférable</u> sur L comme un indice d'éloignement symétrique D tel que : pour tout $e = (r_1, \dots, r_p) \in G(L)$ vérifiant $(x,y) \in r_i$ et $(y,x) \in r_i$ pour tout i et pour tout $s \in L$ tel que $(x,y) \notin s$ ou $(y,x) \notin s$, on ait :

$$D(s[x,y], e) < D(s,e) \quad \text{ou} \quad D(s[y,x], e) < D(s,e) .$$

Ainsi, tout indice linéaire symétrique est transférable.

Il est aisé de voir qu'un indice sup n'est pas, en général, transférable, (x_i étant positif et u_i de signe quelconque, on n'a pas, en général, :

$$\sup_{1 \leqslant i \leqslant p} (x_i - 2 - u_i) < \sup_{1 \leqslant i \leqslant p} x_i \quad \text{ou} \quad \sup_{1 \leqslant i \leqslant p} (x_i - 2 + u_i) < \sup_{1 \leqslant i \leqslant p} x_i \;)$$

Les théorèmes de réduction n'ont été mentionnés que "pour mémoire", puisqu'ils ne sont pas utilisés par ce travail. Le premier théorème de ce type a été démontré par Jaquet-Lagrèze pour les ordres totaux ([6]) , démonstration reprise dans ([8]) . Monjardet a ensuite constaté une propriété analogue pour les tournois ([8]) .

Ces théorèmes ont une double utilité :

- Utilisés comme lemmes, ils permettent d'obtenir plus rapidement la propriété parétienne pour des indices linéaires symétriques (ce que nous n'avons pas fait, préférant mettre en lumière la notion de transfert) .
- Ils peuvent servir à construire des algorithmes pour déterminer des opinions centrales.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARROW K.J., Social choice and individual value, New-York, Wiley, 1951.

[2] BERNARD G. et BESSON M.L., "Douze méthodes d'analyse multicritère", Riro, vol. 3, (1971), 19 - 66.

[3] CONDORCET, CARITAT A. Marquis de, Essais sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix, Paris, 1785.

[4] FELDMAN J., "Pôles, intermédiaires et centres dans un groupe d'opinions", Mathématiques et Sciences Humaines, n° 43, (1973), 39 - 54.

[5] GUILBAUD G.Th., "Les théories de l'intérêt général et le problème logique de l'agrégation", Economie Appliquée, 15, (1952). ET : Elements de la théorie des jeux, Paris, Dunod, 1968.

[6] JACQUET-LAGREZE E., "L'agrégation des opinions individuelles", Informatique et Sciences Humaines, 4, (1966).

[7] LERMAN J.C., Les bases de la classification automatique, Paris Gauthier-Villars, 1970.

[8] MONJARDET B., "Tournois et ordres médians pour une opinion", Mathématiques et Sciences Humaines, 43, (1973), 55 - 70.

[9] REGNIER S., "Sur quelques aspects mathématiques des problèmes de classification automatique", I. C. C., Bulletin 4, (1965), 175 - 191.

[10] RIKER W.H., "Voting and the summation of preferences : an interpretative bibliographical review of selected developments during the last decade", American Political Science Review, vol. 55, n° 4, (1961), 900 - 911.