MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

G. COMYN
J. CL. VAN DORPE

Valuation et semi-modularité dans les demi-treillis

Mathématiques et sciences humaines, tome 56 (1977), p. 63-75
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1977__56__63_0>

Math. Sci. hum. (*14*^{e} année, n° 56, *1976*, p.63-75)

VALUATION ET SEMI-MODULARITE DANS LES DEMI-TREILLIS

G. COMYN *
J. Cl. VAN DORPE *

Nous** avons été amenés, dans [5] , à étudier les propriétés intrinsèques des applications monotones définies sur un treillis T et à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Nous avons étudié des chemins de longueur minimum joignant deux éléments x et y de T , dans le graphe non orienté de couverture associé à T ; nous notons $C_\wedge(x,y) = (x, x \wedge y, y)$ et $C_\vee(x,y) = (x, x \vee y, y)$ les chemins particuliers passant respectivement par l'infimum, ou par le supremum, de deux éléments x et y de T . Nous exposons ici une généralisation de ces résultats au cas des demi-treillis valués et énonçons une caractérisation de distance définie à partir d'une valuation.

En particulier, lorsque l'application monotone choisie est une graduation, nous retrouvons la caractérisation de la semi-modularité dans les demi-treillis énoncée par B. Monjardet [6] et qui généralise les résultats cités en [1] et [3] pour les treillis.

1. NOTATIONS

. Soit T un sup-demi-treillis (de longueur finie), dont la relation d'ordre est notée $\leq$.

En reprenant les notations de [5] , nous appelons séquence d'éléments comparables de $(T,\leq)$ (en abrégé s.e.c.), de longueur n , $n \in \mathbb{N}$, une séquence notée $[x_i]_0^n$ de n+1 éléments de T , telle que, pour

---

* I.U.T., Université des Sciences et Techniques de Lille-I, Département Informatique, Villeneuve d'Asq.

**Nous remercions B. Monjardet des conseils qu'il nous a donnés et de l'attention qu'il a portée à nos travaux en cours.

tout $i = 0,1,\dots,n-1$, on ait :

$$x_i \le x_{i+1} \quad \text{ou} \quad x_i \ge x_{i+1}$$

Soit v une application strictement croissante de T dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$:

$$x < y \text{ implique } v(x) < v(y)$$

Soit I l'ensemble des indices d'une s.e.c. $[x_i]_0^n$ donnée :

$$I^+ = \{i \in I \mid x_{i+1} \ge x_i\}$$

$$I^- = \{i \in I \mid x_i \ge x_{i+1}\}$$

Pour toute s.e.c., nous définissons :

$$\Delta^+([x_i]_0^n) = \sum_{i \in I^+} [v(x_{i+1}) - v(x_i)]$$

$$\Delta^-([x_i]_0^n) = \sum_{i \in I^-} [v(x_i) - v(x_{i+1})]$$

$$\Delta([x_i]_0^n) = \Delta^+([x_i]_0^n) + \Delta^-([x_i]_0^n)$$

Etant donné un couple quelconque $(x,y) \in T \times T$, nous notons $\mathcal{C}(x,y)$ l'ensemble (non vide) de toutes les s.e.c. reliant x à y .

Notons de plus $C_k(x,y)$ l'ensemble des s.e.c. de longueur k reliant x à y .

On montre facilement que [5] :

I.1.- PROPOSITION.

Etant donnés deux éléments x et y de T , C' et C'' deux s.e.c. reliant x à y , les inégalités suivantes sont équivalentes :

$$\Delta(C') \le \Delta(C'') \iff \Delta^+(C') \le \Delta^+(C'') \iff \Delta^-(C') \le \Delta^-(C'')$$

Nous dirons qu'une s.e.c. $C \in \mathcal{C}(x,y)$ est v-minimale si elle minimise l'une quelconque des trois quantités Δ, Δ^- ou Δ^+ et nous notons :

$$\delta(x,y) = \inf_{C \in \mathcal{C}(x,y)} \Delta(C)$$

Il a été démontré en [5] que, lorsqu'elle est définie à partir d'une application v strictement croissante sur T, δ est une distance sur T.

Si T est un sup-demi-treillis gradué et que v est une fonction de rang, δ coïncide avec la distance habituelle [2] définie sur le graphe de couverture G correspondant au sup-demi-treillis T par $\delta(x,y)$ = longueur du plus court chemin entre x et y, pour tout $(x,y) \in T \times T$. Dans le cas général, nous étudions ici les propriétés de δ et les conditions sur v pour que δ ait une expression simple.

II. CARACTERISATION DE s.e.c. v-MINIMALES DANS T.

II.1.- THEOREME.

Soit T un sup-demi-treillis, soit v une application strictement croissante définie sur T, à valeur dans $\mathbb{R}$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que la s.e.c. $C_V(x,y) = (x, x \vee y, y)$ soit v-minimale, est que, pour tout triplet (x,y,z) d'éléments de T tel que :

$$z \leq x \quad \text{et} \quad z \leq y$$

la condition suivante soit vérifiée :

$$v(x \vee y) + v(z) \leq v(x) + v(y)$$

REMARQUE. Les résultats obtenus dans [5] permettent de donner de ce théorème l'énoncé équivalent :

Une condition nécessaire et suffisante pour que :

$$\delta(x,y) = 2\, v(x \vee y) - v(x) - v(y)$$

est que, pour tout triplet (x,y,z) d'éléments de T tel que :

$$z \leq x \quad \text{et} \quad z \leq y$$

on ait : $$v(x \vee y) + v(z) \leq v(x) + v(y)$$

DEMONSTRATION.

. <u>La condition est nécessaire</u>

En effet, $C_v(x,y)$ est v-minimale

$$\Longleftrightarrow \forall\ (x,y) \in T \times T \ , \ \Delta^-(C_v(x,y)) \leq \Delta^-(C)$$

pour tout $C \in \mathcal{C}(x,y)$ d'après la proposition I-1

$$\Longleftrightarrow v(x \vee y) - v(y) \leq \Delta^-(C)$$

En particulier, pour la séquence (x,z,y) , pour tout z vérifiant la condition $z \leq x$, $z \leq y$,

$$v(x \vee y) - v(y) \leq v(x) - v(z)$$

soit

$$v(x \vee y) + v(z) \leq v(x) + v(y)$$ <u>c.q.f.d</u>.

. <u>La condition est suffisante</u>

Soit, en effet, $(x,y) \in T \times T$, un couple quelconque d'éléments de T ; soit z un élément de T vérifiant $z \leq x$ et $z \leq y$ (nous étudierons ultérieurement le cas où un tel z n'existe pas).

La démonstration s'effectue par récurrence sur la longueur des séquences reliant x à y .

La propriété est évidente pour des séquences appartenant à $\mathcal{C}_1(x,y)$ (x et y comparables), ainsi que pour des séquences appartenant à $\mathcal{C}_2(x,y)$. En effet, soit t un élément de T , soit $C \in \mathcal{C}_2(x,y)$ la séquence (x,t,y)

- Si $t \leq x$, $t \leq y \Longrightarrow v(x \vee y) - v(y) \leq v(x) - v(t)$

$$\Longrightarrow \Delta^-(C_v(x,y)) \leq \Delta^-(C)$$

- Si $t \geq x$, $t \geq y$, alors $t \geq x \vee y$

$$\Longrightarrow v(t) \geq v(x \vee y)$$

$$\Longrightarrow v(t) - v(y) \geq v(x \vee y) - v(y)$$

$$\Longrightarrow \Delta^-(C) \geq \Delta^-(C_v(x,y))$$

Montrons que la propriété reste vraie pour des séquences de longueur 3 . Soit $C = (x,t,u,y)$, $t \geq x$, $u \leq y$, $u \leq t$, une séquence de longueur 3 (la démonstration serait analogue si $t \leq x$, $u \geq y$, $t \leq u$) reliant x à y : $C \in C_3(x,y)$

$$t \geq x \Longrightarrow y \vee t \geq x \vee y \Longrightarrow v(t \vee y) \geq v(x \vee y)$$

$$\Longrightarrow \Delta^-(C_v(x,y)) = v(x \vee y) - v(y) \leq v(t \vee y) - v(y)$$

$$\Longrightarrow \Delta^-(C_v(x,y)) \leq v(t \vee y) - v(t) + v(t) - v(y)$$

Or : $v(t \vee y) - v(t) \leq v(y) - v(u)$ par hypothèse

$(u \leq t$ et $u \leq y)$

$$\Longrightarrow \Delta^-(C_v(x,y)) \leq v(y) - v(u) + v(t) - v(y)$$

$$\Longrightarrow \Delta^-(C_v(x,y)) \leq v(t) - v(u) = \Delta^-(C)$$

Ainsi $\Delta^-(C_v(x,y)) \leq \Delta^-(C)$ pour toute s.e.c. C appartenant à $C_3(x,y)$

Supposons maintenant que, pour tout couple (x,y) de $T \times T$ et pour toute s.e.c. $C \in C_{n-1}(x,y)$, $\Delta^-(C_v(x,y)) \leq \Delta^-(C)$. Soit $[x_i]_0^n$ une s.e.c. de longueur n reliant x à y :

$$\Delta^-([x_i]_0^n) = \Delta^-([x_i]_0^{n-1}) + \Delta^-((x_{n-1},y))$$

$$\geq \Delta^-(C_v(x,x_{n-1})) + \Delta^-((x_{n-1},y))$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence :

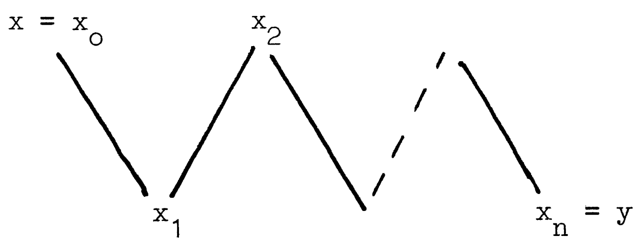
$$\Longrightarrow \Delta^-([x_i]_0^n) \geq \Delta^-((x,x \vee x_{n-1},x_{n-1},y))$$

$$\geq \Delta^-((x,x \vee y,y)) = \Delta^-(C_v(x,y))$$

en appliquant le résultat obtenu pour les séquences de longueur 3 .

c.q.f.d.

REMARQUE.- S'il n'existe pas de z tel que $z \leq x$ et $z \leq y$, la s.e.c. $C_\vee(x,y)$ est encore v-minimale pour tout $(x,y) \in T \times T$. En effet, si $[x_i]_0^n$ est une séquence de longueur n reliant x à y :



On peut appliquer au triplet (x_0, x_1, x_2) le raisonnement précédent qui permet d'obtenir :

$$\Delta^-((x_0, x_1, x_2)) \geq \Delta^-(x_0, x_0 \vee x_2, x_2)$$

En réïtérant ce raisonnement, on est ramené au cas des s.e.c. de longueur 2 pour lesquelles le résultat est évident.

On obtient, par dualité, le résultat suivant :

II.2.- THEOREME.

Soit T un inf-demi-treillis, soit v une application strictement croissante définie sur T à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que $C_\wedge(x,y) = (x, x \wedge y, y)$ soit v-minimale est que, pour tout triplet (x,y,z) d'éléments de T tels que :

$$z \geq x \quad \text{et} \quad z \geq y$$

la condition suivante est vérifiée :

$$v(x \wedge y) + v(z) \geq v(x) + v(y)$$

Comme précédemment, le résultat obtenu dans [5] : $C_\wedge(x,y)$ v-minimale équivalent à $\delta(x,y) = v(x) + v(y) - 2\, v(x \wedge y)$, permet de donner une autre formulation de ce Théorème.

Nous pouvons alors généraliser comme suit la notion de valuation dans les treillis au cas des demi-treillis :

II.3.- PROPOSITION.

Soit v une application strictement croissante d'un sup-demi-treillis T dans $\mathbb{R}$; les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $\delta(x,y) = \delta(x, x \vee y) + \delta(x \vee y, y)$ pour tout $(x,y) \in T \times T$

(2) $\delta(x,y) = 2\, v(x \vee y) - v(x) - v(y)$ pour tout $(x,y) \in T \times T$ ($C_v(x,y)$ est v-minimale)

(3) $2\, v(x \vee y) - v(x) - v(y)$ est une distance sur T

(4) pour tout $x,y,z \in T$, $v(x \vee y) + v(z) \leq v(x \vee z) + v(z \vee y)$

(5) pour tout $x,y,z \in T$ avec $z \leq x$

$$v(x \vee y) + v(z) \leq v(x) + v(z \vee y)$$

(6) pour tout $x,y,z \in T$ avec $z \leq x$, $z \leq y$

$$v(x) + v(y) \geq v(z) + v(x \vee y)$$

Si, de plus T est un treillis, ces conditions sont équivalentes à :

(7) pour tout $x,y \in T$, $v(x \vee y) + v(x \wedge y) \leq v(x) + v(y)$

DEMONSTRATION.-

.(1) $\Longleftrightarrow$ (2) évident d'après la définition de $\delta(x,y)$

.(3) $\Longrightarrow$ (4) : en appliquant l'inégalité triangulaire à $2\, v(x \vee y) - v(x) - v(y)$, on obtient :

$$2v(x \vee y) - v(x) - v(y) \leq 2v(x \vee y) - v(x) - v(z) + 2v(y \vee z) - v(y) - v(z)$$

soit encore :

$$v(x \vee y) + v(z) \leq v(x \vee z) + v(y \vee z)$$

.(4) $\Longrightarrow$ (5) et (5) $\Longrightarrow$ (6) sont évidents.

. L'équivalence des propriétés (1) et (6) a fait l'objet du théorème II-1.

. (2) $\Longrightarrow$ (3) : la démonstration a été réalisée en [5]

Si l'on suppose maintenant que T est un treillis, il résulte immédiatement des résultats énoncés en [5] que les propriétés (2) et (7) sont équivalentes.

REMARQUE.- G. BORDES [4] a montré par ailleurs que la relation (5) impliquait (3).
On obtient par dualité les propriétés suivantes relatives aux applications strictement croissantes sur les inf-demi-treillis :

II.4.- PROPOSITION.
Soit v une application strictement croissante d'un inf-demi-treillis T dans $\mathbb{R}$; les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $\delta(x,y) = \delta(x,x \wedge y) + \delta(x \wedge y,y)$ pour tout $(x,y) \in T \times T$

(2) $\delta(x,y) = v(x) + v(y) - 2v(x \wedge y)$ pour tout $(x,y) \in T \times T$
($C_\wedge(x,y)$ est v-minimale)

(3) $v(x) + v(y) - 2v(x \wedge y)$ est une distance sur T

(4) pour tout $x,y,z \in T$, $v(x \wedge y) + v(z) \geq v(x \wedge z) + v(z \wedge y)$

(5) pour tout $x,y,z \in T$ avec $z \geq x$.

$v(x \wedge y) + v(z) \geq v(x) + v(z \vee y)$

(6) pour tout $x,y,z \in T$ avec $z \geq x$, $z \geq y$

$v(x) + v(y) \leq v(z) + v(x \wedge y)$

Si, de plus, T est un treillis, ces conditions sont équivalentes à :

(7) pour tout $x,y \in T$, $v(x \vee y) + v(x \wedge y) \geq v(x) + v(y)$

Les deux propositions précédentes permettent de généraliser de la façon suivante, à des demi-treillis, la notion de valuation définie sur des treillis :

DEFINITION.-
Une application strictement croissante d'un sup-demi-treillis (resp. inf-demi-treillis) dans $\mathbb{R}$ sera dite valuation si elle vérifie l'une quelconque des propriétés figurant dans la proposition II-3 (resp. II-4).

III. GRADUATION ET SEMI-MODULARITE DANS LES DEMI-TREILLIS.

Les résultats que nous présentons dans ce paragraphe sont obtenus par application des propriétés précédentes aux demi-treillis gradués.
B. MONJARDET [6] aboutit à ces mêmes résultats en donnant directement une caractérisation métrique de la semi-modularité sur certains ensembles ordonnés.

Soit T un sup-demi-treillis; T est dit semi-modulaire supérieurement ([1] et [3]) si la condition suivante est vérifiée pour tout triplet (x,y,z) de $T \times T \times T$:

$$z \prec x \quad \text{et} \quad z \prec y \Longrightarrow x \prec x \vee y \quad \text{et} \quad y \prec x \vee y$$

en notant $\prec$ la relation : $x \prec y \Longleftrightarrow x$ précède y .
Pour traduire la notion de prédécesseur, nous utilisons les propriétés de graduation : une application r de T dans $\mathbb{N}$ est appelée graduation ou fonction de rang si elle vérifie la condition suivante :

$$(1) \qquad x \prec y \Longrightarrow r(y) = r(x) + 1$$

Les résultats obtenus précédemment avec des applications strictement croissantes restent valables; en outre, la propriété (1) intervient dans la démonstration des lemmes et théorèmes suivants :

LEMME 1.- [1] Un sup-demi-treillis semi-modulaire supérieurement est gradué.

LEMME 2.- [1] [6] Un sup-demi-treillis T est semi-modulaire supérieurement si et seulement si, pour tout $x,y,z \in T$, $y \,||\, z$ (i.e. y non comparable à z), $x \prec y$ et $x < z$ impliquent $z \prec y \vee z$.

III.1.- THEOREME

Un sup-demi-treillis T est semi-modulaire supérieurement si et seulement s'il est gradué, la fonction de rang vérifiant, pour tout $x,y,z \in T$ tels que :

$$z \leq x$$
$$z \leq y$$

la condition suivante :

$$(1) \qquad r(x \vee y) + r(z) \leq r(x) + r(y)$$

DEMONSTRATION.-

- Condition suffisante :

Soient $x,y,z \in T$ tels que :

$$z \prec x$$
et
$$z \prec y$$

$\Longrightarrow$ $r(x) = r(y) = r(z) + 1$

$r(x \vee y) - r(y) \leq r(x) - r(z) = 1$

$\Longrightarrow$ $r(x \vee y) - r(y) = 1$ (le cas $r(x \vee y) - r(y) = 0$ est impossible).

$\Longrightarrow$ $y \prec x \vee y$

On montre de même que $x \prec x \vee y$

$\Longrightarrow$ T est semi-modulaire supérieurement.

c.q.f.d.

- Condition nécessaire :

Soient $x,y,z \in T$ tels que :

$$z \leq x$$
et
$$z \leq y$$

La démonstration se fait par récurrence sur la longueur de la s.e.c. reliant z à x .

En vertu du lemme 1 , T est gradué par une fonction de rang r

1) supposons que $z \prec x$

$\Longrightarrow \; r(x) - r(z) = 1$

$z \prec x \Longrightarrow x \ngeq z \vee y = y$

Deux possibilités :

. $\quad x < z \vee y \Longrightarrow x \vee y = z \vee y = y \Longrightarrow x \leq y$

$\Longrightarrow \; r(x \vee y) - r(y) = 0 < r(x) - r(z) = 1$

. $\quad x \,\|\, z \vee y \Longrightarrow x \vee y \succ z \vee y = y$ en vertu du lemme 2.

$\Longrightarrow \; r(x \vee y) - r(y) = 1$

$\Longrightarrow \; r(x \vee y) - r(y) = r(x) - r(z)$

$\Longrightarrow$ l'inégalité (1) est bien vérifiée dans les 2 cas.

2) Supposons alors qu'il existe une s.e.c. $x_1, \ldots, x_n$ telle que

$$x \succ x_1 \succ x_2 \succ \cdots \succ x_n \succ z$$

et supposons l'inégalité (1) vérifiée à l'ordre n-1 , c'est-à-dire que le plus court chemin pour aller de x_1 à y est celui passant par $x_1 \vee y$, soit

$$r(x_1 \vee y) - r(y) \leq r(x_1) - r(z)$$

$x_1 \prec x$ implique $x \ngtr x_1 \vee y$

. soit $x < x_1 \vee y \Longrightarrow x \vee y = x_1 \vee y$

$\Longrightarrow \; r(x \vee y) - r(y) = r(x_1 \vee y) - r(y)$

$\leq r(x_1) - r(z) < r(x) - r(z)$

. soit $x \,\|\, x_1 \vee y \Longrightarrow x_1 \vee y \prec x \vee y$ en vertu du lemme 2

$\Longrightarrow \; r(x \vee y) - r(y) = r(x_1 \vee y) + 1 - r(y)$

$\leq r(x_1) + 1 - r(z) = r(x) - r(z)$

c.q.f.d.

Il résulte des Théorèmes II-1 et III-1 :

III-2.- COROLLAIRE.
Soit T un sup-demi-treillis; soit r une fonction de graduation sur T. Une condition nécessaire et suffisante pour que T soit semi-modulaire supérieurement est que $C_\vee(x,y)$ soit r-minimale pour tout couple (x,y) de $T \times T$.

Les résultats suivants sont obtenus immédiatement par dualité.

LEMME 3.- Un Inf-demi-treillis T est semi-modulaire inférieurement si et seulement si, pour tout $x,y,z \in T$, $x \succ y$, $x > z$ et $y \parallel z$ implique $z \succ y \wedge z$.

III.3.- THEOREME.
Un Inf-demi-treillis T est semi-modulaire inférieurement si et seulement si il est gradué, la fonction de rang vérifiant pour tout $x,y,z \in T$, tels que

$$z \geq x \quad \text{et} \quad z \geq y$$

la condition suivante :

$$r(x \wedge y) + r(z) \geq r(x) + r(y)$$

III.4.- COROLLAIRE.
Soit T un inf-demi-treillis; soit r une fonction de graduation sur T. Une condition nécessaire et suffisante pour que T soit semi-modulaire inférieurement est que $C_\wedge(x,y)$ soit r-minimale pour tout $(x,y) \in T \times T$.

Il résulte des corollaires III-2 et III-4 :

III-5.- COROLLAIRE.
Soit T un treillis; soit r une graduation sur T.
Une condition nécessaire et suffisante pour que T soit modulaire est que, pour tout couple (x,y) de $T \times T$, les séquences $C_\wedge(x,y)$ et $C_\vee(x,y)$ soient r-minimales.

On retrouve donc la caractérisation des treillis modulaires [1] :

Un treillis T est modulaire si et seulement s'il est gradué, sa fonction de rang vérifiant, pour tout $(x,y) \in T \times T$:

$$r(x \vee y) + r(x \wedge y) = r(x) + r(y)$$

B I B L I O G R A P H I E

[1] BARBUT M. et MONJARDET B., Ordre et classification, PARIS, Hachette, 1970.

[2] BERGE C., Graphes et hypergraphes, PARIS, Dunod, 1970

[3] BIRKHOFF G., Lattice theory, PROVIDENCE, American Math. Society, Colloquium Publication, 1967

[4] BORDES G., "Métrique bornée définie par des valuations sur un demi-treillis", Math. Sci. hum., 56, 1976

[5] GRIMONPREZ G. et VAN DORPE J. Cl., "Distance définie par une application monotone sur un treillis", Math. Sci. hum., 56, 1976

[6] MONJARDET B., "Caractérisation métrique de la semi-modularité dans les treillis", Math. Sci. hum., 56, 1976