MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

G. GRIMONPREZ
J. CL. VAN DORPE

Distance définie par une application monotone sur un treillis

Mathématiques et sciences humaines, tome 56 (1977), p. 47-62
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1977__56__47_0>

Math. Sci. hum. (*14*^{e} année, n° 56, *1976*, p.47-62)

DISTANCE DEFINIE PAR UNE APPLICATION MONOTONE SUR UN TREILLIS

G. GRIMONPREZ*
J. Cl. VAN DORPE*

Lors du Colloque de Marseille Luminy (1973), sur la Théorie de l'Information, J. Kampe de Feriet [11] expose les concepts de base de l'information et présente une excellente synthèse des différentes théories généralisant la Théorie de l'Information telle que la conçurent Wiener et Shannon en 1948, à partir de la notion de probabilité; deux directions axiomatiques sont essentiellement apparues :

. L'étude de la mesure d'information, notée $I(A)$, fournie par la réalisation d'un événement A ; l'espace de travail est $(\Omega, \mathcal{S})$, où $\mathcal{S}$ est une classe de parties de Ω (souvent, il s'agit de $\mathcal{P}(\Omega)$); cette axiomatique a été développée essentiellement par J. Kampe de Feriet et B. Forte.

. L'étude de la mesure d'information, notée $H(\pi)$, fournie par une expérience (ou partition π); l'espace de référence est alors l'ensemble des partitions définies sur un ensemble donné. Cette axiomatique a fait l'objet de nombreux travaux (en particulier de la part de B. Forte et N. Pintacuda).

D'autres espaces de référence furent ultérieurement choisis pour définir une information :

. Une classe $\mathcal{C}$ de propositions ayant une structure de treillis

---

* I.U.T. Université des Sciences et Techniques de Lille-I, département Informatique, Villeneuve d'Asq.

complet orthocomplété, utilisée par J. Sallantin pour appliquer la théorie généralisée de l'information à la mécanique quantique.

. Le treillis des préordres que G. Comyn et J. Losfeld [3] utilisèrent pour appliquer la Théorie de l'Information à l'analyse des données.

Afin d'unifier toutes ces définitions d'informations, J. Losfeld définit une mesure d'information généralisée sur un ensemble partiellement ordonné [12] et montra que la structure d'ensemble privilégiée pour la définition d'une information était celle de treillis.

En essayant de retrouver certains résultats informationnels fondamentaux de la Théorie des Questionnaires [6] , nous avons été amenés, à partir d'une mesure d'information généralisée J au sens de J. Losfeld, définie sur un ensemble partiellement ordonné T , à introduire la notion de bilan en information [7] . Nous en avons déduit, entre autres, une distance en information, ainsi qu'une application notée J_R , appelée information de ressemblance, qui généralise la notion d'information mutuelle à un treillis T quelconque ([8],[9]). L'ensemble de ces résultats est une conséquence directe de l'axiome de monotonicité de J . Il permet en particulier d'apporter des solutions à certains problèmes d'analyse des données du type suivant :

"Déterminer un critère qui quantifie la valeur de l'information qu'un résumé apporte sur la totalité des données initiales".

Ceci nous a amenés à étudier les propriétés intrinsèques des applications monotones définies sur T et à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ [9] .

Nous montrons que des notions introduites résulte naturellement la définition d'une quasi-métrique sur T , dont nous déduisons une métrique lorsque l'application v est strictement monotone.

L'introduction d'hypothèses particulières sur v permet de donner des expressions explicites de cette métrique. Nous retrouvons notamment la distance habituelle sur les treillis modulaires lorsque v est une valuation strictement croissante.

Les propriétés de la métrique que nous introduisons dans cet article ont permis son utilisation, lorsque l'application v est une mesure d'information généralisée, à la réalisation d'algorithmes en taxinomie numérique, notamment pour la détermination de "classes homogènes" de bactéries, et la construction de questionnaires sur ces classes [10].

Certains des résultats présentés ici ont été repris depuis dans le cadre des demi-treillis et ont permis, lorsque l'application v est une graduation, de caractériser la semi-modularité dans les demi-treillis [4] [13].

I.- RESULTATS GENERAUX

Soit T un treillis dont la relation d'ordre est notée $\leq$; nous appellons séquence d'éléments comparables de longueur $n \in \mathbb{N}$ de $(T,\leq)$ (en abrégé s.e.c.), une séquence notée $[x_i]_0^n$ de $n+1$ éléments de T telle que, pour tout $i = 0,1,\ldots,n-1$, on ait [7] :

$$x_i \leq x_{i+1} \quad \text{ou} \quad x_i \geq x_{i+1}$$

Soit v une application monotone de T dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, que nous supposerons décroissante, i.e. telle que, pour tout $(x,y) \in T \times T$, $x < y$ implique $v(x) \geq v(y)$. Nous donnerons, par la suite, les résultats duaux lorsque v est supposée croissante dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Notons $v(x/y)$ l'application de $T \times T$ dans $R \cup \{+\infty\}$ définie par :

$$v(x/y) = v(x \wedge y) - v(y) \quad \text{si} \quad v(y) < +\infty$$

$$v(x/y) = v(x) \quad \text{si} \quad v(y) = +\infty$$

Soit I l'ensemble des indices d'une s.e.c. $[x_i]_0^n$ donnée :

$$I^+ = \{i \in I | x_{i+1} \leq x_i\}$$

$$I^- = \{i \in I | x_i \leq x_{i+1}\}$$

Pour toute s.e.c., nous définissons [7] :

$$\Delta^+([x_i]_0^n) = \sum_{i \in I^+} |v(x_{i+1}/x_i)|$$

$$\Delta^-([x_i]_0^n) = \sum_{i \in I^-} |v(x_i/x_{i+1})|$$

(1) $$\Delta([x_i]_0^n) = \Delta^+([x_i]_0^n) + \Delta^-([x_i]_0^n)$$

Δ^+ , Δ^- , Δ sont des quantités finies ou non, positives ou nulles, et si Δ^+ et Δ^- ne prennent pas simultanément des valeurs infinies, elles vérifient :

(2) $$v(x_n) - v(x_0) = \Delta^+([x_i]_0^n) - \Delta^-([x_i]_0^n)$$

Cette quantité, finie ou non, peut être positive, négative ou nulle.

Etant donnés deux éléments quelconques x et y de T , il est naturel de considérer l'ensemble de toutes les s.e.c. reliant x à y . Nous noterons $C(x,y)$ cet ensemble : il n'est jamais vide.

Notons de plus $C_k(x,y)$ l'ensemble des s.e.c. de longueur k reliant x à y .

Parmi les éléments de $C(x,y)$, nous nous proposons d'étudier ceux qui minimisent les quantités Δ^+ , Δ^- ou Δ. On montre facilement que :

I.1.- PROPOSITION.
Etant donnés deux éléments x et y de T tels que $v(x) . v(y) < + \infty$, C_1 et C_2 deux s.e.c. reliant x à y , les inégalités suivantes sont équivalentes :

$$\Delta(C_1) \leq \Delta(C_2) \iff \Delta^+(C_1) \leq \Delta^+(C_2) \iff \Delta^-(C_1) \leq \Delta^-(C_2) .$$

DEMONSTRATION.

Par hypothèse, $v(x)$ et $v(y)$ prennent des valeurs finies; Δ^+, Δ^- et Δ prennent alors simultanément des valeurs finies ou infinies. Le cas infini étant trivial, considérons que Δ^+, Δ^- et Δ prennent des valeurs finies.

Supposons que $\Delta(C_1) \leq \Delta(C_2)$

Par définition :

$$\Delta(C_1) = \Delta^+(C_1) + \Delta^-(C_1)$$

$$\Delta(C_2) = \Delta^+(C_2) + \Delta^-(C_2)$$

$$V(C_1) = \Delta^+(C_1) - \Delta^-(C_1) = v(y) - v(x) = \Delta^+(C_2) - \Delta^-(C_2) = V(C_2)$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta(C_1) \leq \Delta(C_2) \\ \\ V(C_1) = V(C_2)\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l}\Delta^+(C_1) + \Delta^-(C_1) + \Delta^+(C_1) - \Delta^-(C_1) \\ \leq \Delta^+(C_2) + \Delta^-(C_2) + \Delta^+(C_2) - \Delta^-(C_2)\end{array}$$

soit

$$\Delta^+(C_1) \leq \Delta^+(C_2)$$

On montre, de manière analogue que :

$$\Delta^+(C_1) \leq \Delta^+(C_2) \Longrightarrow \Delta^-(C_1) \leq \Delta^-(C_2) \Longrightarrow \Delta(C_1) \leq \Delta(C_2)$$

En raison de la proposition précédente, nous dirons que $C \in \mathcal{C}(x,y)$ est v-minimale si et seulement si elle minimise l'une quelconque des quantités Δ, Δ^+ ou Δ^-.

Pour tout (x,y) de $T \times T$, notons alors :

$$\delta^+(x,y) = \operatorname*{Inf}_{C \in \mathcal{C}(x,y)} \Delta^+(C)$$

$$\delta^-(x,y) = \operatorname*{Inf}_{C \in \mathcal{C}(x,y)} \Delta^-(C)$$

$$\delta(x,y) = \operatorname*{Inf}_{C \in \mathcal{C}(x,y)} \Delta(C)$$

I.2.- PROPOSITION.

a) L'application δ de $T \times T$ dans $\bar{\mathbb{R}}^+$ est une quasi-distance sur T [2]

b) Si $x < y$, $\delta(x,y) = v(x) - v(y)$ pour tout $(x,y) \in T \times T$

c) Les quantités δ^+ et δ^- sont des applications de $T \times T$ dans $\bar{\mathbb{R}}^+$ vérifiant les propriétés suivantes :

. $\delta^+(x,x) = \delta^-(x,x) = 0$ pour tout $x \in T$

. $\delta^+(x,y) = \delta^-(y,x)$ pour tout $(x,y) \in T \times T$

. δ^+ et δ^- vérifient l'inégalité triangulaire

d) De plus, δ^+ et δ^- vérifient :

(i) $v(y) - v(x) = \delta^+(x,y) - \delta^-(x,y)$

pour tout (x,y) de $T \times T$ tel que $v(x).v(y) < +\infty$

(ii) $\delta(x,y) = \delta^+(x,y) + \delta^-(x,y)$.

DEMONSTRATION.

a) δ est une quasi-distance sur T , c'est-à-dire :

. $\delta(x,x) = 0$. Il suffit de considérer la s.e.c. de longueur 0 formée de l'élément x .

. $\delta(x,y) = \delta(y,x)$. Cette égalité résulte immédiatement de la remarque suivante :

A toute s.e.c. $C = (x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = y)$ correspond une s.e.c. $\bar{C}$ reliant y à x :

$$\bar{C} = (y_0 = y \ , \ y_1 = x_{n-1} \ , \ \ldots \ , \ y_n = x_0 = x)$$

et l'on a :

$$\Delta^+(C) = \Delta^-(\bar{C}) \quad , \quad \Delta^-(C) = \Delta^+(\bar{C}) \quad , \quad \Delta(C) = \Delta(\bar{C})$$

. $\delta(x,y) \leq \delta(x,z) + \delta(z,y)$

Soient $[x_i]_0^n$ une s.e.c. quelconque reliant x à z , $[y_i]_0^m$ une s.e.c. quelconque reliant z à y .

La s.e.c. $C = (x_0, x_1, \ldots, x_n = y_0, y_1, \ldots, y_m)$ relie x à y d'où :

$$\delta(x,y) \leq \Delta(C) = \Delta([x_i]_0^n) + \Delta([y_i]_0^m)$$

$$\Longrightarrow \delta(x,y) \leq \delta(x,z) + \delta(z,x)$$

b) Ce résultat est évident.

c) Les démonstrations des propriétés des quantités δ^+ et δ^- sont analogues aux démonstrations précédentes.

d) (i) résulte de l'égalité (2) et de la proposition I-1.
(ii) vient directement de (1) et de I-1.

En raison de la proposition précédente, l'égalité $\delta(x,y) = 0$ n'entraîne pas toujours $x = y$. Cependant, on montre que :

Etant donné un treillis T fini, $T_0 = \{x \in T | v(x) < +\infty\}$, une condition nécessaire et suffisante pour que la restriction de l'application δ à l'ensemble des couples (x,y) de $T_0 \times T_0$ définisse une distance est que l'application v soit strictement monotone.(L'application v est dite strictement monotone décroissante (resp. croissante) si $x < y$ implique $v(x) > v(y)$ (resp. $v(x) < v(y)$)).

II.- HYPOTHESES H.

Il est clair, lorsque le treillis T est fini, qu'il existe au moins une s.e.c. v-minimale entre deux éléments x et y donnés de T , ce qui n'est pas toujours le cas si T est quelconque. Dans le cas fini, nous pouvons mettre en oeuvre un algorithme de type Branch et Bound [5] permettant d'obtenir toutes les s.e.c. v-minimales reliant x à y , ce qui nous donne la possibilité de calculer les quantités $\delta^+(x,y)$, $\delta^-(x,y)$, $\delta(x,y)$. (Remarquons que la connaissance d'une seule s.e.c. v-minimale permet de déterminer toutes ces quantités).

Cet algorithme n'offre cependant qu'un intérêt relatif, étant donné qu'il nécessite des temps d'exécution importants; aussi avons-nous été amenés [7] lorsque le treillis T est quelconque (fini ou infini), à introduire des hypothèses particulières sur v permettant d'obtenir des expressions explicites des quantités δ^+ , δ^- et δ utilisables directement au niveau des applications.

Etant donnés deux éléments x et y de t tels que $v(x) \cdot v(y) < +\infty$, $C_2(x,y)$ l'ensemble des s.e.c. de longueur 2 reliant x à y , il est clair que la valeur minimale de la quantité $\Delta^-(C)$ pour toutes les s.e.c. de $C_2(x,y)$ est égale à :

$$\mathrm{Inf}(v(x/y)\ ,\ v(x/x \vee y)) \left\{ \begin{array}{l} \text{i.e. } \mathrm{Inf}(v(x \wedge y) - v(y)\ ,\ v(x) - v(x \vee y)) \\ \\ \text{si } v(x) \cdot v(y) < +\infty \end{array} \right\}$$

c'est-à-dire que, pour les s.e.c. de longueur 2 reliant x à y , une s.e.c. v-minimale est de la forme $(x, x \vee y, y)$ notée $C_\vee(x,y)$ ou de la forme $(x, x \wedge y, y)$ notée $C_\wedge(x,y)$. Ceci nous amène à introduire les hypothèses suivantes sur le treillis $(T,\leq)$:

H0 : $\forall\ (x,y) \in T \times T\ ,\ v(x) + v(y) = v(x \wedge y) + v(x \vee y)$

H1 : $\forall\ (x,y) \in T \times T\ ,\ v(x) + v(y) \geq v(x \wedge y) + v(x \vee y)$

H2 : $\forall\ (x,y) \in T \times T\ ,\ v(x) + v(y) \leq v(x \wedge y) + v(x \vee y)$

II-1.- THEOREME

. Une condition nécessaire et suffisante pour que, pour tout couple (x,y) de $T \times T$, la s.e.c. $C_\wedge(x,y) = (x, x \wedge y, y)$ soit v-minimale, est que v vérifie l'hypothèse H1 ; soit encore :

$$(1)\quad v \text{ vérifie H1} \iff \delta^+(x,y) = \Delta^+(C_\wedge(x,y)) = v(x \wedge y) - v(x)$$

$$\iff \delta^-(x,y) = \Delta^-(C_\wedge(x,y)) = v(x \wedge y) - v(y)$$

$$\iff \delta(x,y) = 2v(x \wedge y) - v(x) - v(y)$$

REMARQUE : On montre de même les équivalences suivantes :

. v vérifie H2

$\Longleftrightarrow$ $\delta^+(x,y) = \Delta^+(C_\vee(x,y)) = v(y) - v(x \vee y)$

$\Longleftrightarrow$ $\delta^-(x,y) = \Delta^-(C_\vee(x,y)) = v(x) - v(x \vee y)$

$\Longleftrightarrow$ $\delta(x,y) = v(x) + v(y) - 2v(x \vee y)$

. v vérifie H0

$$\Longleftrightarrow \delta^+(x,y) = \Delta^+(C_\wedge(x,y)) = \Delta^+(C_\vee(x,y)) = v(x \wedge y) - v(x) = v(y) - v(x \vee y)$$

$$\Longleftrightarrow \delta^-(x,y) = \Delta^-(C_\wedge(x,y)) = \Delta^-(C_\vee(x,y)) = v(x \wedge y) - v(y) = v(x) - v(x \vee y)$$

$$\Longleftrightarrow \delta(x,y) = v(x \wedge y) - v(x \vee y) - 2v(x \wedge y) - v(x) - v(y) = v(x) + v(y) - 2v(x \vee y)$$

. Si l'on suppose v monotone croissante, il vient alors :

. v vérifie H1

$\Longleftrightarrow$ $\delta^+(x,y) = \Delta^+(C_\vee(x,y)) = v(x \vee y) - v(x)$

$\Longleftrightarrow$ $\delta^-(x,y) = \Delta^-(C_\vee(x,y)) = v(x \vee y) - v(y)$

$\Longleftrightarrow$ $\delta(x,y) = 2v(x \vee y) - v(x) - v(y)$

. v vérifie H2

$\Longleftrightarrow$ $\delta^+(x,y) = \Delta^+(C_\wedge(x,y)) = v(y) - v(x \wedge y)$

$\Longleftrightarrow$ $\delta^-(x,) = \Delta^-(C_\wedge(x,y)) = v(x) - v(x \wedge y)$

$\Longleftrightarrow$ $\delta(x,y) = v(x) + v(y) - 2v(x \wedge y)$

. v vérifie H0

$$\Longleftrightarrow \delta^+(x,y) = \Delta^+(C_\vee(x,y)) = \Delta^+(C_\wedge(x,y)) = v(x \vee y) - v(x) = v(y) - v(x \wedge y)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \delta^-(x,y) = \Delta^-(C_\vee(x,y)) = \Delta^-(C_\wedge(x,y)) = v(x \vee y) - v(y)$$
$$= v(x) - v(x \wedge y)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \delta(x,y) = v(x \vee y) - v(x \wedge y)$$
$$= 2v(x \vee y) - v(x) - v(y)$$
$$= v(x) + v(y) - 2v(x \wedge y)$$

DEMONSTRATION.

Nous allons démontrer (1), les démonstrations étant analogues pour les autres résultats.

. CONDITION NECESSAIRE

$\forall\ (x,y) \in T \times T \quad , \quad \forall\ C \in \mathcal{C}(x,y) : \Delta^-(C_\wedge(x,y)) \leq \Delta^-(C)$

Prenons $C = (x, x \vee y, y) : \Delta^-(C) = v(x) - v(x \vee y)$

$$\Delta^-(C_\wedge(x,y)) = v(x \wedge y) - v(y)$$

d'où $\qquad v(x \wedge y) - v(y) \leq v(x) - v(x \vee y) \qquad$ c.q.f.d.

. CONDITION SUFFISANTE

- . si x est égal à y , le problème est résolu.
- . soit x différent de y :
  - . nous dirons qu'une s.e.c. $[x_i]_0^n \in \mathcal{C}(x,y)$ est sans cycle si

$$\forall\ (i,j) \in \{0,1,\ldots,n\} \times \{0,1,\ldots,n\} \ , \quad i \neq j \ ,$$

l'on a : $\qquad x_i \neq x_j$

  - . elle sera dite alternée si :

$$\forall\ i = 0,\ldots,n-2 : \quad (x_i \leq x_{i+1} \Longrightarrow x_{i+1} \geq x_{i+2})$$
$$\text{ou} \quad (x_i \geq x_{i+1} \Longrightarrow x_{i+1} \leq x_{i+2})$$

Etant donnée une s.e.c. C reliant x à y , il existe une s.e.c. unique, sans cycle et alternée, $\hat{C} = [x_i]_0^n$ construite à partir de C et telle que :

. $\forall\ i = 0,\ldots,n-1 \ : \ x_i \neq x_{i+1}$

. $\forall\ i = 0,\dots,n-2\ :\ (x_i < x_{i+1} \Longrightarrow x_{i+1} > x_{i+2})$

ou $(x_i > x_{i+1} \Longrightarrow x_{i+1} < x_{i+2})$

. $\Delta^-(\hat{C}) \leq \Delta^-(C)$

Nous n'utiliserons plus, désormais, que des s.e.c. du type $\hat{C}$.
La démonstration s'effectue par récurrence sur la longueur de la s.e.c. reliant x à y .
Il est facile de montrer que $\Delta^-(C_\wedge(x,y)) \leq \Delta^-(C)$ pour toute s.e.c. appartenant à $C_1(x,y)$ ou $C_2(x,y)$.

Soit C une s.e.c. de longueur 3 reliant x à y : $C \in C_3(x,y)$

$$C = (x,z,t,y) \text{ avec } (x \leq z\ ,\ z \geq t\ ,\ t \leq y)$$
$$\text{ou } (x \geq z\ ,\ z \leq t\ ,\ t \geq y)$$

Supposons que $(x \leq z\ ,\ z \geq t\ ,\ t \leq y\ )$

$$\left.\begin{array}{r} t \leq y \Longrightarrow x \wedge t \leq x \wedge y \\ v \text{ décroissante} \end{array}\right\} \Longrightarrow v(x \wedge t) \geq v(x \wedge y)$$

$$\begin{aligned}\Delta^-(C_\wedge(x,y)) &= v(x \wedge y) - v(y) \leq v(x \wedge t) - v(y) \\ &\leq v(x \wedge t) - v(t) + v(t) - v(y)\end{aligned}$$

v vérifie H1 $\Longrightarrow v(x \wedge t) - v(t) \leq v(x) - v(x \vee t)$

$$\Delta^-(C_\wedge(x,y)) \leq v(x) - v(x \vee t) + v(t) - v(y)$$

$$z \geq x \vee t \Longrightarrow v(z) \leq v(x \vee t)$$

ce qui donne :

$$\Delta^-(C_\wedge(x,y)) \leq v(x) - v(z) + v(t) - v(y) = \Delta^-(C)$$

On montre, de la même manière, que si C est de la forme :

$$(x \geq z \ , \ z \leq t \ , \ t \geq y)$$

alors

$$\Delta^-(C_\wedge(x,y)) \leq \Delta^-(C)$$

Ainsi, $\Delta^-(C_\wedge(x,y)) \leq \Delta^-(C)$ pour toute s.e.c. C appartenant à $C_3(x,y)$.

Supposons maintenant que, pour tout couple (x,y) de $T \times T$, et pour toute s.e.c. $C \in C_{n-1}(x,y)$, $\Delta^-(C_\wedge(x,y)) \leq \Delta^-(C)$.

Soit $[x_i]_0^n$ une s.e.c. de longueur n reliant x à y.

L'hypothèse de récurrence entraîne :

$$\Delta^-(C_\wedge(x,x_{n-1})) \leq \Delta^-([x_i]_0^{n-1})$$

$$\Delta^-([x_i]_0^n) = \Delta^-([x_i]_0^{n-1}) + \Delta^-(C')$$

où C' est définie par la séquence (x_{n-1},x_n), d'où :

$$\Delta^-([x_i]_0^n) \geq \Delta^-(C_\wedge(x,x_{n-1})) + \Delta^-(C') = \Delta^-(C'')$$

où C'' est définie par la séquence $(x,x \wedge x_{n-1},x_{n-1},y)$.

Le résultat sur les s.e.c. de longueur 3 entraîne :

$$\Delta^-([x_i]_0^n) \geq \Delta^-(C'') \geq \Delta^-(C_\wedge(x,y)) \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Il vient alors :

Etant donné un treillis T quelconque, $T_0 = \{x \in T | v(x) < +\infty\}$, si v vérifie l'une des hypothèses H0, H1, H2, une condition nécessaire et suffisante pour que la restriction de δ à l'ensemble des couples (x,y) de $T_0 \times T_0$ définisse une distance est que l'application v soit strictement monotone.

III.- DISTANCES SUR T.

. Les hypothèses H nous permettent d'obtenir des expressions explicites des quantités δ^+, δ^- et δ utilisables directement au niveau des applications.

Suivant le sens des variations de v et l'hypothèse H retenue, lorsque $v(x).v(y) < +\infty$, nous résumons dans le tableau III-1 les expressions de δ^+ , δ^- et δ .

v	H	δ^+	δ^-	δ
$\nearrow$	HO	$v(x \vee y) - v(x)$ $=$ $v(y) - v(x \wedge y)$	$v(x \vee y) - v(y)$ $=$ $v(x) - v(x \wedge y)$	$v(x \vee y) - v(x \wedge y)$
$\nearrow$	H1	$v(x \vee y) - v(x)$	$v(x \vee y) - v(y)$	$2v(x \vee y)$ $- v(y) - v(x)$
$\nearrow$	H2	$v(y) - v(x \wedge y)$	$v(x) - v(x \wedge y)$	$v(x) + v(y)$ $- 2v(x \wedge y)$
$\searrow$	HO	$v(x \wedge y) - v(x)$ $=$ $v(y) - v(x \vee y)$	$v(x \wedge y) - v(y)$ $=$ $v(x) - v(x \vee y)$	$v(x \wedge y) - v(x \vee y)$
$\searrow$	H1	$v(x \wedge y) - v(x)$	$v(x \wedge y) - v(y)$	$2v(x \wedge y) - v(x)$ $- v(y)$
$\searrow$	H2	$v(y) - v(x \vee y)$	$v(x) - v(x \vee y)$	$v(x) - v(y)$ $- 2v(x \vee y)$

<u>légende</u>

TABLEAU III-1

$\nearrow$ v croissante

$\searrow$ v décroissante

. L'expression $\delta(x,y) = v(x \vee y) - v(x \wedge y)$ tirée du tableau III-1, lorsque v est croissante et vérifie HO, est la quasi-distance (resp. distance) définie sur les treillis , v étant alors une valuation croissante (resp. strictement croissante), c'est-à-dire une application définie sur T , à valeurs réelles, vérifiant les conditions :

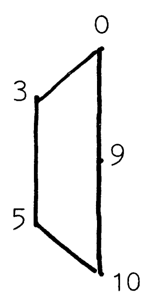
. $v(x \vee y) + v(x \wedge y) = v(x) + v(y)$

. $x < y \Longrightarrow v(x) \leq v(y)$ (resp. $v(x) < v(y)$).

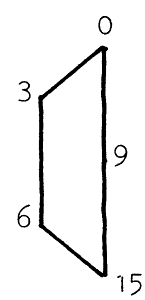
Nous savons [1] [2] qu'il y a équivalence entre les treillis modulaires et les treillis à valuation strictement croissante.

Par contre, les hypothèses H1 et H2 n'entraînent aucune structure particulière sur T , ni la modularité, ni la semi-modularité. Sur les exemples suivants, nous définissons :

- sur le treillis caractéristique des treillis non modulaires, des applications monotones vérifiant l'une des hypothèses H1 ou H2 (les chiffres des sommets représentent les valeurs de v).

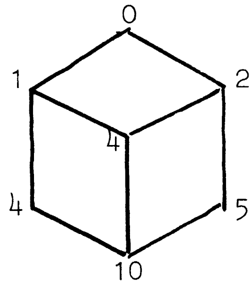


H1

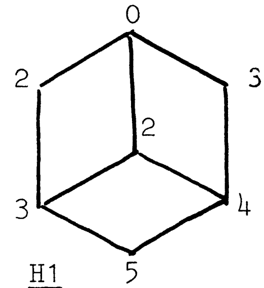


H2

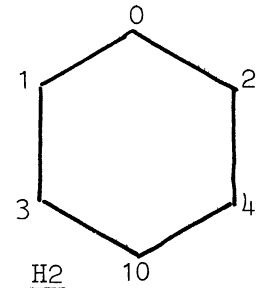
- sur des treillis, respectivement semi-modulaire inférieurement, semi-modulaire supérieurement, non semi-modulaire, des applications monotones v vérifiant également l'une quelconque des hypothèses H1 ou H2 .



H2



H1



H2

IV.- REMARQUES

1. Soit v une application quelconque de T dans $\mathbb{R}$.

A toute s.e.c. $[x_i]_0^n$, nous pouvons associer la quantité suivante :

$$\Delta([x_i]_0^n) = \sum_{i=1}^{n} |v(x_i) - v(x_{i-1})|$$

Notons :

$$\delta(x,y) = \operatorname*{Inf}_{C \in \mathcal{C}(x,y)} \Delta(C)$$

On montre que l'application δ de $T \times T$ dans $\mathbb{R}^+$ ainsi définie est une quasi-distance, c'est-à-dire une application vérifiant :

. $\delta(x,x) = 0 \quad \forall\, x \in T$

. $\delta(x,y) = \delta(y,x) \quad \forall\, (x,y) \in T \times T$

. $\delta(x,y) \leq \delta(x,z) + \delta(z,y)$ (inégalité triangulaire) $\quad \forall\, (x,y,z) \in T \times T \times T$

De plus, si le treillis T est fini, une condition suffisante pour que δ soit une distance est que v soit injective.

2. Dans [14] (théorème 2.1.), Boorman et Oliver établissent l'équivalence suivante : si v est strictement croissante sur un treillis T, v vérifie l'hypothèse H_2 si et seulement si $d(x,y) = v(x) + v(y) - 2v(x \wedge y)$ est une distance. On peut obtenir facilement ce résultat de manière directe. Mais ces auteurs démontrent indirectement la condition nécessaire en montrant que si v vérifie H_2, on a $d(x,y) = \delta(x,y)$. Ce dernier résultat correspond à la condition suffisante du théorème de ce papier. Boorman et Oliver en donnent une idée de démonstration élégante sans toutefois donner une démonstration explicite ; à noter qu'ils appellent supervaluation une application v vérifiant H_2 et que cette définition ainsi que certains résultats sont repris dans [15].

B I B L I O G R A P H I E

[1] BARBUT M. et MONJARDET B., Ordre et classification, Paris, Hachette, 1970.

[2] BIRKHOF G., Lattice Theory, Providence, American Math. Society, Colloquium Publication, 1967.

[3] COMYN G. et LOSFELD J., "Information et préordre", Publication du C.N.R.S., Gr. de Recherche 22, Structure de l'Information, (1976), 45-70

[4] COMYN G. et VAN DORPE J. Cl., "Valuation et semi-modularité dans les demi-treillis", Math. Sci. hum., 56 (1976)

[5] GREENBERG H., Integer programming, Monterey, Academic Press, 1971

[6] GRIMONPREZ G. et VAN DORPE J. Cl., "Information généralisée et Questionnaires", Séminaire sur les Questionnaires, Université Paris-VI, Janvier 1975

[7] GRIMONPREZ G., LOSFELD J. et VAN DORPE J. Cl., "Perte et gain d'information sur une séquence d'éléments comparables d'un treillis et métrique associée", C.R.Ac. Sci., 280, série A, (1975), 957-960.

[8] GRIMONPREZ G. et VAN DORPE J. Cl., "Perte et gain d'information sur une séquence d'éléments comparables d'un treillis et métrique associée (Applications)", C.R.Ac. Sci., 280, Série A, (1975), 1381-1384.

[9] GRIMONPREZ G. et VAN DORPE J. Cl., "Conséquences de l'axiome de monotonicité. Notion de résumé", Publications du C.N.R.S., Gr. de recherche 22, Structures de l'information, (1976), 71-106.

[10] GRIMONPREZ G., "Recherche de structure de données", Journées Information, Questionnaires, Reconnaissance des formes, Bonas, 1976

[11] KAMPE DE FERIET J., "La théorie généralisée de l'information et la mesure subjective de l'information", Lect. Notes in Math., 398, (1974), 1-35

[12] LOSFELD J., "Information généralisée et relation d'ordre", Lect. Notes in Math., 398, (1974), 49-61.

[13] MONJARDET B., "Caractérisations métriques des ensembles ordonnés semi-modulaires", Math. Sci. hum., 56 (1976)

[14] BOORMAN S.A., OLIVER D.C., "Metrics on spaces of finite trees", J. of Math. Psychol., 10, 1973 (26-59).

[15] CAILLIEZ F., PAGES J.P., Introduction à l'analyse des données, Paris, S.M.A.S.H., 1976.