

D. DEFAYS

## **Relations floues et analyse hiérarchique des questionnaires**

*Mathématiques et sciences humaines*, tome 55 (1976), p. 45-60

[http://www.numdam.org/item?id=MSH\\_1976\\_\\_55\\_\\_45\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSH_1976__55__45_0)

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## RELATIONS FLOUES ET ANALYSE HIERARCHIQUE DES QUESTIONNAIPES

D.DEFAYS\*

## RESUME

On généralise la notion d'échelle de Guttman au moyen de la théorie des sous-ensembles flous. On réexamine ensuite le problème de l'approximation d'un protocole par une échelle de Guttman.

## INTRODUCTION

La théorie des sous-ensembles flous met un formalisme fécond à la disposition des statisticiens. Nous avons déjà montré comment elle permettait de présenter et d'unifier la taxinomie. Nous allons dans cet article présenter un type d'application bien particulier des sous-ensembles flous à l'analyse ordinaire : l'analyse hiérarchique des questionnaires.

Au paragraphe 1 nous rappelons quelques notions élémentaires de la théorie des sous-ensembles flous. Le paragraphe 2 est consacré à l'étude des protocoles au moyen des relations floues, le 3 à la recherche d'échelles de Guttman floues à distance minimum d'un protocole donné ; un exemple illustratif est développé dans un 4<sup>e</sup> paragraphe.

---

\*Université de Liège, Belgique.

## 1. RAPPEL

Si  $E$  est un ensemble fini et  $A(\cdot)$  une application de  $E$  dans  $[0,1]$ , l'ensemble  $\underline{A} = \{(x, A(x)) \mid x \in E\}$  est le sous-ensemble flou correspondant à l'application  $A(\cdot)$ .

Si  $\underline{A}$  et  $\underline{B}$  sont deux sous-ensembles flous définis sur  $E$ ,

- $\underline{A} \subset \underline{B}$  si et seulement si pour tout  $x \in E$ ,  $A(x) \leq B(x)$ .
- $\underline{A} \cap \underline{B} = \{(x, \inf\{A(x), B(x)\}) \mid x \in E\}$ .
- $\underline{A} \cup \underline{B} = \{(x, \sup\{A(x), B(x)\}) \mid x \in E\}$ .

Les relations floues s'introduisent de manière analogue.

Soit  $R(\dots)$  une application de  $E_1 \times E_2$  dans  $[0,1]$ . L'ensemble  $\underline{R} = \{(x, y, R(x, y)) \mid x \in E_1, y \in E_2\}$  est dit relation floue de  $E_1$  vers  $E_2$  correspondant à l'application  $R(\dots)$ . Une relation floue est donc essentiellement une relation au sens habituel du mot, où les liaisons sont pondérées. Une relation floue de  $E$  vers  $E$  sera appelée brièvement "sur  $E$ ".

Si  $\underline{R}$  est une relation floue sur  $E$ ,

- $\underline{R}$  est antiréflexif si et seulement si pour tout  $x \in E$ ,  $R(x, x) = 0$ .
- $\underline{R}$  est parfaitement antisymétrique si et seulement si pour tous  $x, y \in E$ ,  $R(x, y) \cdot R(y, x) = 0$ .
- $\underline{R}$  est transitif si et seulement si pour tous  $x, y, z \in E$ ,  $R(x, y) \geq \inf\{R(x, z), R(z, y)\}$ .

Une relation floue, antiréflexive, transitive (et par conséquent parfaitement antisymétrique) est un ordre parfait, strict, flou.

Si  $R$  est une relation au sens habituel du mot (nous dirons dans la suite relation vulgaire) on notera, pour tout  $i \in [0,1]$ ,  $i\underline{R} = \{(x, y, R(x, y)) \mid (x, y) \in E \times E\}$ , la relation floue où  $R(x, y) = i$  si  $(x, y) \in R$  et  $R(x, y) = 0$  si  $(x, y) \notin R$ .

Rappelons enfin le théorème de décomposition : si  $\underline{R}$  est une relation floue sur  $E$ , alors  $\underline{R} = \bigcup_{i \in [0,1]} i\underline{R}_i$  ;  $R_i$  est la relation vulgaire définie comme suit :  $(x, y) \in R_i$  si et seulement si  $R(x, y) \geq i$ .

Remarquons que si  $\underline{R}$  est transitif (antiréflexif, parfaitement antisymétrique),  $R_i$  est aussi transitif (antiréflexif, antisymétrique si  $i > 0$ ).

## 2. REPRESENTATION PAR DES RELATIONS FLOUES

Soit  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  un ensemble  $E$  de questions auxquelles on peut répondre par oui ou par non. Tout élément  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  de l'ensemble  $\{0, 1\}^n$  est appelé patron de réponse. Toute distribution  $\pi$  des patrons  $p$ , c'est à dire toute application de  $\{0, 1\}^n$  dans  $[0, 1]$  telle que  $\sum \{\pi(p) \mid p \in \{0, 1\}^n\} = 1$  est appelée protocole. Ainsi si  $I$  est un ensemble de  $q$  individus auxquels on pose l'ensemble  $E$  de questions, à chaque individu  $e$  de  $I$  on peut associer son patron de réponse  $p(e) = (p_1(e), p_2(e), \dots, p_n(e))$  où  $p_i(e) = 1$  si l'individu  $e$  répond oui à la question  $x_i$ ,  $p_i(e) = 0$  sinon. En particulier, en posant  $\pi_I(p) = |\{e \in I \mid p(e) = p\}| / q$ , on obtient un protocole  $\pi_I$  appelé protocole de  $I$ .

Rappelons qu'une échelle de Guttman sur  $E$  est un ordre total (pour tous  $x, y$ ,  $(x, y)$  ou  $(y, x)$  appartient à l'ordre) défini sur  $E$ .

Soit  $\pi$  un protocole. On peut lui associer comme suit une relation  $R(\pi) : (x_i, x_j) \in R(\pi)$  si et seulement si pour tout patron  $p$  tel que  $p_i > p_j$ , on a  $\pi(p) = 0$ . Si  $\pi$  est tel que pour tout  $i \neq j$  on a un patron  $p$  avec  $p_i \neq p_j$  et  $\pi(p) \neq 0$  (ce que nous supposerons dans la suite),  $R(\pi)$  est visiblement un ordre. Si cette condition n'est pas remplie, il suffit pour s'y ramener de supprimer certaines questions de  $E$ . Souvent malheureusement, l'ordre  $R(\pi)$  ainsi obtenu, issu de l'unanimité, lorsqu'il n'est pas vide, ne comporte qu'un nombre restreint de couples et nous apprend par conséquent très peu sur les éventuelles relations entre les différentes questions. Un des problèmes fondamentaux de l'analyse hiérarchique est d'approximer un protocole donné par une échelle de Guttman. Il est malheureux que quelle que soit la procédure adoptée, le résultat obtenu, c'est à dire un ordre sur les questions, sous-exploite les données. En effet, on ne retient généralement du protocole qu'un ensemble de couples indifférents alors que manifestement ces couples ont des statuts très différents. Il est évident que la relation liant les éléments des couples retenus n'a pas la même "intensité" pour tous les couples. Ainsi cette relation traduit souvent des différences de difficulté, d'antériorité, de priorité qui

peuvent elles-mêmes être classées les unes par rapport aux autres. L'application de la théorie des sous-ensembles flous à ce contexte remédie dans une certaine mesure à cette carence.

Associations comme suit une relation floue  $\underline{P}$  au protocole  $\pi$  :

$$P(x_i, x_j) = \sum \{ \pi(p) \mid p : p \in \{0,1\}^n, p_i < p_j \}.$$

Si le protocole est le protocole  $\pi_I$  de l'ensemble  $I$  d'individus,  $P(x_i, x_j)$  est la proportion d'individus de  $I$  ayant répondu non à  $x_i$  et oui à  $x_j$ .

Etudions quelques propriétés de  $\underline{P}$ . Les preuves (quasi immédiates) des théorèmes 1 à 5 sont omises.

THEOREME 1

Vu l'hypothèse faite sur le protocole, on a pour tous  $x \neq y$ ,  $P(x,y) + P(y,x) > 0$ .

THEOREME 2

$\underline{P}$  est antiréflexif.

THEOREME 3

Pour tous  $x, y, z \in E$ , on a .

$$P(x,y) + P(y,z) + P(z,x) = P(y,x) + P(z,y) + P(x,z) \leq 1.$$

Toute relation  $\underline{P}$  satisfaisant au théorème 3 sera dite circulaire (le mot nous a été suggéré par un référé). Les théorèmes 2 et 3 impliquent entre autres que pour tous  $x, y$  :

$P(x,y) + P(y,x) \leq 1$ . Remarquons encore un intéressant corollaire du théorème 3 : pour tous  $x, y, z, \dots, u, v \in E$ , on a  $P(x,y) + P(y,z) + \dots + P(u,v) + P(v,x) = P(y,x) + P(z,y) + \dots + P(v,u) + P(x,v)$

THEOREME 4

Pour tous  $x, y, z \in E$ , on a :

$$P(x,y) \leq P(x,z) + P(z,y).$$

Nous appellerons cette inégalité "inégalité triangulaire".

THEOREME 5

Pour tous  $x, y, z, t \in E$ , si  $P(x,y) = P(x,z) + P(z,y)$  et  $P(x,t) = P(y,t) = 0$ , on a :  $P(z,t) = 0$ .

La condition du théorème 5 est bien indépendante des conditions des théorèmes 1, 2, 3, 4 comme le montre l'exemple suivant ; la relation floue dont la fonction d'appartenance est donnée par le tableau qui suit satisfait aux conditions des théorèmes

1, 2, 3, 4 et non à celle du théorème 5.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
$x_1$	0	0,2	0,4	0,2
$x_2$	0,2	0	0,4	0,1
$x_3$	0	0	0	0,1
$x_4$	0,1	0	0,4	0

Les théorèmes 2 à 5 ne suffisent malheureusement pas à caractériser les images  $\underline{P}$  de protocole. Les contrexemples ne manquent pas. Ainsi, la relation floue donnée par le tableau suivant

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$x_1$	0	0,33	0,33	0,33	0,33
$x_2$	0,33	0	0,33	0,33	0,33
$x_3$	0,33	0,33	0	0,33	0,33
$x_4$	0,33	0,33	0,33	0	0,33
$x_5$	0,33	0,33	0,33	0,33	0

satisfait aux conditions des théorèmes 1 à 5 et n'est visiblement pas l'image d'un protocole puisque pour tout patron  $p$  tel que  $p_i = p_j = p_k$  on a  $\pi(p) \leq 1 - P(x_i, x_j) - P(x_j, x_k) - P(x_k, x_i)$ . La caractérisation des images de protocole est donc un problème qui reste posé. Dans le langage de la théorie des graphes, ce problème est celui de la caractérisation de graphes valués associés à des ensembles de parties (pondérées) d'un ensemble  $I$ . Remarquons que si  $n = 3$ , une caractérisation est possible.

#### THEOREME 6

Si  $n = 3$ , toute relation floue antiréflexive, circulaire, satisfaisant à l'inégalité triangulaire est l'image d'un protocole  $\pi$ .

Preuve : L'énoncé sera démontré si on trouve des réels non négatifs  $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6$  dont la somme est inférieure ou égale à 1, tels que le protocole  $\pi$  avec  $\pi((0,1,0)) = \pi_1$ ,  $\pi((0,1,1)) = \pi_2$ ,  $\pi((0,0,1)) = \pi_3$ ,  $\pi((1,0,1)) = \pi_4$ ,  $\pi((1,0,0)) = \pi_5$ ,  $\pi((1,1,0)) = \pi_6$ , ait  $\underline{P}$  comme image. Il suffit

donc de résoudre le système suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \\ \pi_5 \\ \pi_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(x_1, x_2) \\ P(x_1, x_3) \\ P(x_2, x_3) \\ P(x_2, x_1) \\ P(x_3, x_1) \\ P(x_3, x_2) \end{bmatrix}$$

La solution doit en plus satisfaire aux contraintes suivantes : pour tout  $i$ ,  $\pi_i \geq 0$  et  $\sum_{i=1}^6 \pi_i \leq 1$ .

Le système admet des solutions qui satisfont aux contraintes si  $\underline{P}$  vérifie les conditions des théorèmes 3 et 4. En effet, on a les solutions :

$$\begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \\ \pi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(x_1, x_2) \\ P(x_1, x_3) \\ P(x_2, x_3) \\ P(x_2, x_1) \\ P(x_3, x_1) \end{bmatrix} - \pi_6 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En choisissant  $\pi_6$  de manière à ce que :

$$0 \leq \pi_6 \leq P(x_3, x_1),$$

$$P(x_3, x_1) - P(x_2, x_1) \leq \pi_6 \leq P(x_3, x_1) - P(x_2, x_1) + P(x_2, x_3),$$

$$P(x_3, x_2) - P(x_1, x_2) \leq \pi_6 \leq P(x_3, x_2),$$

les contraintes seront satisfaites. Les 3 intervalles de variation de  $\pi_6$  ont, comme on peut le vérifier en s'appuyant sur les propriétés que possède  $\underline{P}$ , deux à deux une intersection non vide. En vertu d'un théorème de Helly, ces 3 intervalles ont donc une intersection non vide. On peut par exemple prendre l'inf  $\{P(x_3, x_1), P(x_3, x_1) - P(x_2, x_1) + P(x_2, x_3), P(x_3, x_2)\}$ . Le théorème est donc démontré.

Donnons maintenant deux caractérisations dans le cas intéressant où  $R(\pi)$  est une échelle de Guttman ; on dira dans ce cas que  $\pi$  est un protocole guttmanien.

#### THEOREME 7

$R(\pi)$  est une échelle de Guttman si et seulement si l'image  $\underline{P}$  de  $\pi$  est parfaitement antisymétrique.

Preuve : Si  $R(\pi)$  est un ordre total,  $\underline{P}$  est trivialement

parfaitement antisymétrique. Réciproquement si  $\underline{P}$  est parfaitement antisymétrique,  $R(\underline{\pi})$  est nécessairement un ordre total puisqu'on a exclu le cas où  $P(x,y) + P(y,x) = 0$ .

Nous appellerons échelle de Guttman floue toute relation floue, antiréflexive, circulaire, parfaitement antisymétrique. Le théorème suivant justifie cette appellation.

THEOREME 8

Toute échelle de Guttman floue est l'image d'un protocole guttmanien

Preuve : Remarquons qu'une échelle de Guttman floue  $\underline{G}$  est un ordre parfait strict flou. En effet, pour tous  $x, y, z$ , on a bien  $G(x,y) \geq \inf\{G(x,z), G(z,y)\}$ . Cette inégalité se vérifie aisément ; si  $G(x,z)$  ou  $G(z,y) = 0$ , l'énoncé est trivial et si  $G(x,z)$  et  $G(z,y)$  différent de 0, par antisymétrie et circularité, on a  $G(x,z) + G(z,y) + G(y,x) = G(x,y)$  et l'énoncé est encore prouvé. Venons en maintenant à la démonstration du théorème 8.  $G = \{(x,y) \mid G(x,y) > 0\}$  est une relation antiréflexive, antisymétrique, transitive puisque  $\underline{G}$  est un ordre parfait strict flou. Il existe donc un ordre total  $O$  sur  $E$  tel que  $G \subset O$ . Sans réduire la généralité, on peut supposer que cet ordre est  $x_1 < x_2 < x_3 \dots < x_n$ . Dans ce cas on voit facilement que la fonction  $\underline{\pi}$  qui au patron  $(0,0, \dots, 0,1)$  associe le nombre  $G(x_{n-1}, x_n)$ , au patron  $(0,0, \dots, 0,1,1)$  associe le nombre  $G(x_{n-2}, x_{n-1})$ , ..., au patron  $(0,1, \dots, 1,1)$  associe le nombre  $G(x_1, x_2)$ , au patron  $(1,1, \dots, 1,1)$  associe le nombre  $1 - G(x_1, x_n)$  et qui associe 0 aux autres patrons est bien un protocole qui a  $\underline{G}$  comme image.

Remarquons que si  $\underline{G}$  satisfait à la condition du théorème 1,  $R(\underline{\pi})$  est une échelle de Guttman. Nous dirons que  $R(\underline{\pi})$  est compatible avec  $\underline{G}$  et que  $\underline{G}$  est compatible avec  $R(\underline{\pi})$ .

### 3. APPROXIMATION DE L'IMAGE D'UN PROTOCOLE PAR UNE ECHELLE DE GUTTMAN FLOUE

Dans notre nouveau contexte, le problème classique de recherche d'une échelle de Guttman peut se formuler ainsi : étant donné l'image floue  $\underline{P}$  d'un protocole, trouver l'échelle de Guttman floue  $\underline{G}$  à distance minimum, c'est à dire qui minimise

$$d^2(P, G) = \sum_{(x,y) \in E \times E} (P(x,y) - G(x,y))^2.$$

L'intérêt d'une échelle de Guttman floue est de traduire non seulement l'ordre sous-jacent aux données mais encore de hiérarchiser les différentes relations (de priorité, d'antériorité, de difficulté ...) existant entre les questions. Il permet une représentation linéaire parlante des résultats. Remarquons de prime abord que déterminer une échelle de Guttman floue revient en fait à déterminer un ordre

$x_{i_1} < x_{i_2} < \dots < x_{i_n}$  sur les questions et des réels positifs  $G(x_{i_1}, x_{i_2}), G(x_{i_1}, x_{i_3}), \dots, G(x_{i_1}, x_{i_n}), \dots, G(x_{i_{n-1}}, x_{i_n})$  dont la somme est inférieure ou égale à 1. Ainsi, si l'ordre est  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  et si les réels en question sont notés  $s_1, s_2, \dots, s_{n-1}$ , la fonction d'appartenance de  $\underline{G}$  que nous conviendrons ici de représenter par un vecteur s'obtient par la multiplication matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} G(x_1, x_2) \\ G(x_1, x_3) \\ G(x_1, x_4) \\ \vdots \\ G(x_1, x_n) \\ G(x_2, x_3) \\ G(x_2, x_4) \\ \vdots \\ G(x_2, x_n) \\ \vdots \\ G(x_{n-1}, x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ \vdots \\ s_{n-1} \end{bmatrix}$$

Par antiréflexivité et antisymétrie on a évidemment si  $j \leq i$ ,  $G(x_i, x_j) = 0$ . De manière plus concise l'égalité vectorielle que nous venons de détailler sera notée :  $\vec{G} = A \vec{s}$ .

Pour résoudre le problème général que nous nous sommes posé nous allons procéder en 2 étapes. Nous supposons dans un premier temps que l'ordre  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  est fixé et nous chercherons le vecteur  $\vec{s}$  qui minimise  $\|\vec{P} - A \vec{s}\|$  si  $\vec{P}$  est le vecteur colonne  $(P(x_1, x_2), P(x_1, x_3), \dots, P(x_{n-1}, x_n))$ . Dans un deuxième temps nous nous pencherons sur le problème

plus général de la détermination d'une échelle de Guttman floue à distance minimum.

### 3.1 Recherche du vecteur $\vec{s}$ qui minimise $\|\vec{P} - A \vec{s}\|$

Notons  $P_{i.} = \sum_{j \geq i} P(x_i, x_j)$  et  $P_{.j} = \sum_{i < j} P(x_i, x_j)$ . La minimisation de la norme  $\|\vec{P} - A \vec{s}\|$  est un problème classique qui admet une solution simple. En effet, en notant  $A^T$  la transposée de  $A$ , il est bien connu que  $\vec{s}$  doit être égal à  $(A^T A)^{-1} A^T \vec{P}$ . Or ici :

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } A^T \vec{P} = \begin{bmatrix} P_{1.} \\ P_{1.} + P_{2.} - P_{.1} \\ P_{1.} + P_{2.} + P_{3.} - P_{.1} - P_{.2} \\ \vdots \\ P_{.n} \end{bmatrix} .$$

On a donc la solution  $s_i = \frac{1}{n} (P_{i.} - P_{.i} - (P_{i+1.} - P_{.i+1}))$  pour  $i = 1, 2, \dots, n-1$ .

Remarquons que si  $\sum_{i=1}^{n-1} s_i = \frac{1}{n} (P_{1.} + P_{.n}) =$

$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n P(x_1, x_j) + P(x_j, x_n) \leq 1$ , on n'a pas toujours  $s_i \geq 0$ .

Cette condition n'est satisfaite que si  $i \rightarrow P_{i.} - P_{.i}$  est une fonction décroissante de  $i$ .  $A \vec{s}$  ne donne donc pas toujours la fonction d'appartenance d'une échelle de Guttman floue. Nous montrerons cependant dans la suite que si

$i \rightarrow P_{i.} - P_{.i}$  n'est pas une fonction décroissante en  $i$ , alors

il existe une échelle de Guttman floue compatible avec un

ordre différent, dont la distance à  $\vec{P}$  est minimum. En d'autres

mots, si les  $s_i$  obtenus ne sont pas tous positifs cela

signifie que l'ordre  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  que nous avons fixé

en début d'analyse n'est pas le meilleur possible, c'est à

dire n'est pas compatible avec l'échelle de Guttman floue à

distance minimum.

Il est facile de montrer qu'en prenant  $s_i$  comme nous venons de le calculer, on a :

$$\|\vec{P} - A \vec{s}\|^2 = \sum_{i < j} P^2(x_i, x_j) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (P_{i.} - P_{.i})^2.$$

### 3.2 Recherche de l'échelle de Guttman floue à distance minimum

Nous conviendrons de noter  $e$  une bijection de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$  sur l'ensemble  $E$  de questions. Par analogie avec ce qui s'est fait précédemment, nous noterons

$$P_{i.}^e = \sum_{j > i} P(e(i), e(j)) \text{ et } P_{.j}^e = \sum_{i < j} P(e(i), e(j)).$$

Nous avons montré en 3.1 que l'ordre  $e(1) < e(2) < \dots < e(n)$  étant fixé, en prenant

$$s_i = \frac{1}{n} (P_{i.}^e - P_{.i}^e - (P_{i+1.}^e - P_{.i+1}^e))$$

on minimisait la distance à  $\vec{P}$  et que cette distance valait :

$$\left( \sum_{(x,y) \in E \times E} P^2(x,y) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (P_{i.}^e - P_{.i}^e)^2 \right)^{1/2}.$$

La recherche d'une échelle de Guttman floue à distance minimum se ramène donc à la détermination de la fonction  $e$  qui

maximise le critère  $c(e) = \sum_{i=1}^n (P_{i.}^e - P_{.i}^e)^2$ . Il est en effet facile de montrer que si  $e$  maximise le critère  $c$ , la

fonction  $i \rightarrow P_{i.}^e - P_{.i}^e$  est décroissante en  $i$ . Supposons que ce ne soit pas le cas et qu'il existe  $i$  tel que

$$P_{i.}^e - P_{.i}^e < P_{i+1.}^e - P_{.i+1}^e. \text{ Définissons } e' \text{ en posant } e'(i) = e(i+1), e'(i+1) = e(i) \text{ et } e'(j) = e(j) \text{ pour les autres } j.$$

Comme

$$P_{i.}^{e'} - P_{.i}^{e'} = P_{i+1.}^e - P_{.i+1}^e + P(e(i), e(i+1)) + P(e(i+1), e(i)) \text{ et}$$

$$P_{i+1.}^{e'} - P_{.i+1}^{e'} = P_{i.}^e - P_{.i}^e - P(e(i), e(i+1)) - P(e(i+1), e(i)),$$

$$\text{on a : } c(e) - c(e') = 2(P(e(i), e(i+1)) + P(e(i+1), e(i))) \times$$

$$(P(e(i), e(i+1)) + P(e(i+1), e(i)) + P_{i+1.}^e - P_{.i+1}^e - (P_{i.}^e - P_{.i}^e))$$

et par conséquent  $c(e') > c(e)$  ce qui est absurde. En fait

on a un résultat plus fort que celui annoncé ; si  $e$  maximise le critère, pour tout  $k$ , on a :

$$(*) P_{k.}^e - P_{.k}^e - (P(e(k), e(k+1)) + P(e(k+1), e(k))) \geq P_{k+1.}^e - P_{.k+1}^e \geq$$

$$P_{k+2.}^e - P_{.k+2}^e + P(e(k+1), e(k+2)) + P(e(k+2), e(k+1)).$$

La recherche d'une échelle de Guttman floue se ramène donc préalablement à la recherche d'un ordre, d'une échelle de Guttman qui maximise un critère assez simple. Lorsque le

nombre  $n$  de questions est trop élevé l'énumération de tous les ordres possibles et le calcul de  $c(\mathbf{e})$  pour tous ces ordres est beaucoup trop fastidieux. L'algorithme que nous allons exposer permet d'éliminer à priori certains ordres non susceptibles de maximiser le critère.

Notons  $R(r_1, r_2, \dots, r_k | r_{n-1}, r_{n-1+1}, \dots, r_n)$ , avec  $r_i \neq r_j$  si  $i \neq j$ , l'ensemble des bijections  $\mathbf{e}$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$  dans  $E$  telles que pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, k-1, k, n-1, n-1+1, \dots, n\}$ ,  $\mathbf{e}(i) = x_{r_i}$ . Remarquons que si  $i \in \{1, 2, \dots, k, n-1, \dots, n\}$ ,  $P_{i.}^{\mathbf{e}} - P_{.i}^{\mathbf{e}}$  a une valeur constante quel que soit  $\mathbf{e} \in R(r_1, \dots, r_k | r_{n-1}, \dots, r_n)$ . En notant  $B'(r_1, \dots, r_k | r_{n-1}, \dots, r_n) = \sum_{i=1}^k (P_{i.}^{\mathbf{e}} - P_{.i}^{\mathbf{e}})^2 + \sum_{i=n-1}^n (P_{i.}^{\mathbf{e}} - P_{.i}^{\mathbf{e}})^2$  avec  $\mathbf{e} \in$

$R(r_1, \dots, r_k | r_{n-1}, \dots, r_n)$ , on a nécessairement si la solution  $\mathbf{e}$  qui maximise le critère appartient à  $R(r_1, \dots, r_k | r_{n-1}, \dots, r_n)$

$$c(\mathbf{e}) \leq B'(r_1, \dots, r_k | r_{n-1}, \dots, r_n) + (n-k-1) \sup \{ (P_{k.}^{\mathbf{e}} - P_{.k}^{\mathbf{e}})^2, (P_{n-1.}^{\mathbf{e}} - P_{.n-1}^{\mathbf{e}})^2 \}$$

borne que nous noterons  $B(r_1, \dots, r_k | r_{n-1}, \dots, r_n)$ . Cette inégalité est évidente si on se rappelle que pour la solution  $\mathbf{e}$ , la fonction  $i \rightarrow P_{i.}^{\mathbf{e}} - P_{.i}^{\mathbf{e}}$  est décroissante en  $i$ . La borne ainsi trouvée, visiblement, n'est pas la meilleure possible. Elle possède le gros avantage d'être très facile à calculer. Le principe de l'algorithme que nous allons développer est alors très simple ; si nous connaissons la valeur  $c(\mathbf{e}_0)$  prise par le critère en une bijection  $\mathbf{e}_0$ , aucun  $\mathbf{e} \in R(r_1, \dots, r_k | r_{n-1}, \dots, r_n)$  tel que  $B(r_1, \dots, r_k | r_{n-1}, \dots, r_n) < c(\mathbf{e}_0)$  ne peut être solution du problème. De plus, la solution  $\mathbf{e}$  doit satisfaire à la relation (\*).

Avant d'introduire l'algorithme général basé sur les remarques que nous venons de faire nous allons présenter une méthode simple permettant d'obtenir sinon toujours la solution  $\mathbf{e}$  qui maximise le critère, du moins une fonction  $\mathbf{e}$  qui lui donne une valeur élevée.

### 3.3 Détermination rapide d'une fonction $\mathbf{e}_0$ susceptible de donner une valeur élevée au critère.

La méthode commence par la recherche de  $\mathbf{e}_0(1)$  ou  $\mathbf{e}_0(n)$ , c'est à dire par la détermination d'un ensemble du type  $R(r_1 | \dots)$  ou

$R(.|r_n)$  auquel appartiendra  $e_0$ . On pose  $e_0(1) = x_{r_1}$  (c'est à dire  $e_0 \in R(r_1|.)$ ) si pour tout  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $B'(r_1|..) \geq B'(j|..)$  et  $B'(r_1|..) \geq B'(.|j)$ . Si aucun indice  $r_1$  ne remplit cette condition on posera  $e_0(n) = x_{r_n}$  (c'est à dire  $e_0 \in R(.|r_n)$ ) si pour tout  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $B'(.|r_n) \geq B'(.|j)$  et  $B'(.|r_n) \geq B'(j|.)$ . On définit alors  $e_0$  récursivement. Ainsi si  $e_0 \in R(r_1, \dots, r_k | r_{n-1}, \dots, r_n)$ , on pose  $e_0(k+1) = x_{r_{k+1}}$

(c'est à dire  $e_0 \in R(r_1, \dots, r_k, r_{k+1} | r_{n-1}, \dots, r_n)$ ) si  $B'(r_1, \dots, r_k, r_{k+1} | r_{n-1}, \dots, r_n) \geq B'(r_1, \dots, r_k, j | r_{n-1}, \dots, r_n)$  et  $B'(r_1, \dots, r_k, r_{k+1} | r_{n-1}, \dots, r_n) \geq B'(r_1, \dots, r_k | j, r_{n-1}, \dots, r_n)$  pour tout  $j$  différent de  $r_1, \dots, r_k, r_{n-1}, \dots, r_n$ . Si aucun indice  $r_{k+1}$  ne remplit cette condition on posera  $e_0(n-1-1) = x_{r_{n-1-1}}$  (c'est à dire  $e_0 \in R(r_1, \dots, r_k | r_{n-1-1}, r_{n-1}, \dots, r_n)$ ) si  $B'(r_1, \dots, r_k | r_{n-1-1}, \dots, r_n) \geq B'(r_1, \dots, r_k | j, r_{n-1}, \dots, r_n)$  et  $B'(r_1, \dots, r_k | r_{n-1-1}, \dots, r_n) \geq B'(r_1, \dots, r_k, j | r_{n-1}, \dots, r_n)$  pour tout  $j$  différent de  $r_1, \dots, r_k, r_{n-1}, \dots, r_n$ . On continue ainsi jusqu'à détermination complète de  $e_0$ . Si le résultat obtenu en fin d'itération est telle que la condition (\*) n'est pas satisfaite, on le modifiera progressivement par des permutations d'éléments deux à deux (en posant  $e'_0(i) = e_0(i+1)$ ,  $e'_0(i+1) = e_0(i)$  et  $e'_0(j) = e_0(j)$  pour les autres  $j$ ) jusqu'à ce qu'elle soit satisfaite.

Remarquons que l'on pourrait aussi prendre comme première approximation  $e_0$  la bijection correspondant à l'ordre des popularités si la popularité de la question  $x_i$  est définie par  $\sum_{p \in \{0, 1\}^n} p_i \pi(p)$ . Si la bijection ainsi obtenue ne satisfait pas à la relation (\*), on peut la modifier progressivement comme nous l'avons suggéré plus haut.

### 3.4 Détermination de la fonction $e$ qui maximise le critère

Les remarques que nous avons faites et la méthode que nous venons d'exposer nous permettent d'introduire l'algorithme en arbre suivant. Nous conviendrons de faire correspondre aux sommets de l'arbre situés au niveau  $2k+1$  ( $k \geq 0$ ) les ensembles de bijections du type  $R(r_1, \dots, r_k, r_{k+1} | r_{n-k+1}, \dots, r_n)$  et au niveau  $2k$  ( $k > 0$ ) les ensembles de bijections du type  $R(r_1, \dots, r_k | r_{n-k+1}, \dots, r_n)$ . L'arbre ainsi constitué est

évidemment trop touffu pour être vraiment utile. Les remarques suivantes vont nous permettre de n'en construire qu'une partie. Le passage de  $R(r_1, \dots, r_k | r_{n-k+1}, \dots, r_n)$  à  $R(r_1, \dots, r_k, r_{k+1} | r_{n-k+1}, \dots, r_n)$  est possible si pour tout  $e \in R(r_1, \dots, r_{k+1} | r_{n-k+1}, \dots, r_n)$  on a

$$P_{k.}^e - P_{.k}^e - (P(x_{r_k}, x_{r_{k+1}}) + P(x_{r_{k+1}}, x_{r_k})) \geq P_{k+1.}^e - P_{.k+1}^e \geq P_{n-k+1.}^e - P_{.n-k+1}^e$$

et si  $B(r_1, \dots, r_{k+1} | r_{n-k+1}, \dots, r_n) \geq c(e_0)$ . Si une des deux conditions n'est pas remplie le sommet  $R(r_1, \dots, r_{k+1} | r_{n-k+1}, \dots, r_n)$  est abandonné. De même, le passage d'un sommet du type

$R(r_1, \dots, r_{k+1} | r_{n-k+1}, \dots, r_n)$  du niveau  $2k+1$  à un sommet du type  $R(r_1, \dots, r_{k+1} | r_{n-k}, r_{n-k+1}, \dots, r_n)$  du niveau  $2k+2$  n'est possible que si pour tout  $e \in R(r_1, \dots, r_{k+1} | r_{n-k}, \dots, r_n)$  on a

$$P_{k+1.}^e - P_{.k+1}^e \geq P_{n-k.}^e - P_{.n-k}^e \geq P_{n-k+1.}^e - P_{.n-k+1}^e + P(x_{r_{n-k}}, x_{r_{n-k+1}}) + P(x_{r_{n-k+1}}, x_{r_{n-k}})$$

et si  $B(r_1, \dots, r_{k+1} | r_{n-k}, \dots, r_n) \geq c(e_0)$ . Si une des deux conditions n'est pas remplie le sommet est abandonné.

L'arbre se construit ainsi de manière itérative. Nous conviendrons de noter  $P_{..} = \sup \left\{ \sum_{j=1}^n P(x_j, x_i) \mid i=1, \dots, n \right\}$  et  $B(r_1 | \cdot) = (P_{1.}^e - P_{.1}^e)^2 + (n-1) \sup \left\{ (P_{1.}^e - P_{.1}^e)^2, P_{..}^2 \right\}$ ,  $e$  appartenant à  $R(r_1 | \cdot)$ . Au niveau 1 on considère tous les sommets du type  $R(r_1 | \cdot)$  tels que  $B(r_1 | \cdot) \geq c(e_0)$ . Au niveau 2 pour tous les sommets du type  $R(r_1 | \cdot)$  retenus, on considère les sommets du type  $R(r_1 | r_n)$  qui satisfont aux conditions. Et ainsi de suite jusqu'à ce que les sommets soient des singletons et permettent par conséquent de définir des bijections  $e$ . La solution de notre problème est nécessairement une des bijections ainsi obtenues. Remarquons toutefois que si le nombre de questions ( $n$ ) est trop élevé ( $n > 15$ ) l'algorithme risque de devenir impossible à réaliser. La solution approchée que nous avons exposée en 3.3 peut par contre être facilement obtenue pour des  $n$  plus élevés. Ainsi, sur une IBM 370-158, pour  $n=100$  la solution approchée est obtenue en moyenne en 6 ou 7 secondes.

## 4. EXEMPLE

Supposons qu'il y ait 4 questions et qu'on ait observé les patrons suivants avec les proportions suivantes :

Patrons				Proportions
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
0	0	0	1	0,10
0	0	1	0	0,05
0	0	1	1	0,20
0	1	1	1	0,25
1	1	1	0	0,10
1	0	1	1	0,15
1	1	1	1	0,15

L'image  $\mathcal{P}$  du protocole est donnée par la matrice suivante :

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
$x_1$	0	0,25	0,50	0,55
$x_2$	0,15	0	0,40	0,45
$x_3$	0	0	0	0,10
$x_4$	0,10	0,10	0,15	0

L'application de la méthode exposée en 3.3 permet d'obtenir comme première approximation de la bijection  $e$  cherchée, la bijection  $e_0(1) = x_1, e_0(2) = x_2, e_0(3) = x_3, e_0(4) = x_4$ , avec  $c(e_0) = 3,9$ . Appliquons maintenant l'algorithme en arbre exposé en 3.4. Les sommets barrés sont ceux qui doivent être éliminés.

Niveau 1	R(1 ..)	R(2 ..)	<del>R(3 ..)</del>	<del>R(4 ..)</del>
	$P_{1.}^e - P_{.1}^e = 1,3$	$P_{2.}^e - P_{.2}^e = 1$	$P_{3.}^e - P_{.3}^e = 0,1$	$P_{4.}^e - P_{.4}^e = 0,35$
	B(1 ..)=6,76	B(2 ..)=4,63	<del>B(3 ..)=3,64</del>	<del>B(4 ..)=3,75</del>

Niveau 2	R(1 2)	R(1 3)	R(1 4)	<del>R(2 1)</del>
	$P_{2.}^e - P_{.2}^e = -0,35$	$P_{3.}^e - P_{.3}^e = -1,05$	$P_{4.}^e - P_{.4}^e = -1,1$	$P_{1.}^e - P_{.1}^e = -0,25$
	B(1 2)=5,19	B(1 3)=6,17	B(1 4)=6,28	<del>B(2 1)=3,06</del>
	R(2 3)	R(2 4)		
	$P_{3.}^e - P_{.3}^e = -1,05$	$P_{4.}^e - P_{.4}^e = -1,1$		
	B(2 3)=4,30	B(2 4)=4,63		

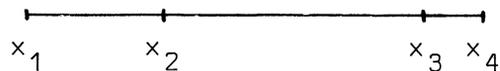
Niveau 3	$R(1,3 2)$ $P_3^e - P_3^e = -0,4$	$R(1,4 2)$ $P_4^e - P_4^e = -0,3$ $P_3^e - P_3^e = -0,65$	$R(1,2 3)$ $P_2^e - P_2^e = 0,6$ $P_4^e - P_4^e = -0,85$	$R(1,4 3)$ $P_4^e - P_4^e = -0,3$ $P_2^e - P_2^e = 0,05$
	$R(1,2 4)$ $P_2^e - P_2^e = 0,6$ $P_3^e - P_3^e = -0,8$	$R(1,3 4)$ $P_3^e - P_3^e = -0,4$ $P_2^e - P_2^e = 0,2$	$R(2,1 3)$ $P_1^e - P_1^e = 0,9$	$R(2,4 3)$ $P_4^e - P_4^e = -0,2$ $P_2^e - P_2^e = 0,25$
	$R(2,1 4)$ $P_1^e - P_1^e = 0,9$	$R(2,3 4)$ $P_3^e - P_3^e = -0,3$ $P_1^e - P_1^e = 0,4$		

Au niveau 3, les ensembles obtenus sont des singletons. Nous avons éliminé les  $e$  qui ne satisfaisaient pas à la relation (\*). Ce critère a permis ici d'éliminer tous les  $e$  (sauf  $e_0$ ) sans calculer  $c(e)$ .

L'ordre qui maximise le critère est donc  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ . L'échelle de Guttman floue à distance minimum est donnée par la matrice suivante :

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
$x_1$	0	0,175	0,525	0,600
$x_2$	0	0	0,350	0,425
$x_3$	0	0	0	0,075
$x_4$	0	0	0	0

Elle est située à une distance 0,11 de la relation  $P$  initiale. Graphiquement, le résultat peut se représenter linéairement de manière très parlante comme suit :



Remarquons pour terminer que l'ordre compatible avec l'échelle de Guttman floue à distance minimum est différent du classique ordre de "popularités" des questions.

## BIBLIOGRAPHIE

- (1) DEFAYS D., "Ultramétriques et relations floues", Bull. Soc.Sc. Liège, 1-2 (1975), 104-118.
- (2) DEGENNE A., Techniques ordinales en analyse des données, statistique, Paris, Hachette, 1972.
- (3) FLUECK J.A. et KORSH J.F., "A branch search algorithm for maximum likelihood paired comparison ranking", Biometrika, 61 (1974), 621-626.
- (4) KAUFMANN A., Introduction à la théorie des sous-ensembles flous. Elements théoriques de base, Paris, Masson et Cie, 1973.