

TADEUSZ SOZANSKI

**Processus d'équilibration et sous-graphes équilibrés
d'un graphe signé complet**

Mathématiques et sciences humaines, tome 55 (1976), p. 25-36

http://www.numdam.org/item?id=MSH_1976__55__25_0

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROCESSUS D'EQUILIBRATION ET SOUS-GRAPHE EQUILIBRES
D'UN GRAPHE SIGNE COMPLET

Tadeusz SOZANSKI^{*}

Un graphe signé sert à une description mathématique d'un ensemble d'individus ou d'objets impersonnels, dans lequel on a deux relations dont l'une considérée comme "positive" est opposée à l'autre considérée comme "négative". Le concept d'équilibre défini pour un graphe signé quelconque par F. Harary tire son origine de théories psycho-sociologiques, selon lesquelles des systèmes cognitifs et des groupes sociaux déséquilibrés évoluent vers l'état d'équilibre. Cependant, les applications présentes des graphes signés ne se bornent plus à la psychologie sociale. Supposons, par exemple, qu'on a un ensemble X dont deux éléments quelconques sont "semblables" (relation positive) ou "dissemblables" (relation négative). L'équilibre se définit de telle façon que cette structure est équilibrée, si X se compose de deux parties disjointes (l'une d'elles pouvant être vide) telles que les éléments de la même partie soient semblables tandis que ceux des parties différentes soient dissemblables. Une structure qui n'admet pas une telle bipartition peut être modifiée, le résultat étant une structure équilibrée aussi proche que possible de la structure donnée. Cela nous amène à l'étude du processus d'équilibration d'un graphe signé.

Dans cet article nous considérons les graphes signés complets (non orientés) qui ont été étudiés notamment par C. Flament. En s'appuyant sur les résultats de son travail [3] nous examinerons le comportement des sous-graphes équilibrés dans le processus d'équilibration. Si l'on admet l'hypothèse que ce processus montre une tendance à conserver les sous-structures équilibrées, la question suivante se pose : quelle est la relation

* Université Jagellonne, Institut de Sociologie, 52 Grodska, 31-044 Cracovie, Pologne

entre cette hypothèse et celle qui affirme que la structure en entier s'équilibre par un nombre minimum de changements. Le but principal de notre contribution est de donner quelques résultats mathématiques concernant ce problème.

GRAPHES SIGNÉS COMPLETS. NIVEAU D'EQUILIBRE ET DEGRE DE DESEQUILIBRE

Nous rappellerons d'abord quelques définitions et propriétés de base se rapportant aux graphes signés, et nous en ajouterons d'autres. La terminologie de graphe utilisée sera celle de C. Berge [1].

Un *graphe signé d'ordre n* est par définition un système $S = (X, P, N)$ composé d'un ensemble X à n éléments, appelé ensemble de *sommets* (ou points) de S , et de deux parties disjointes P et N de l'ensemble $\mathcal{P}_2(X)$ des paires de sommets distincts. P est appelé ensemble des *arêtes positives*, et N ensemble des *arêtes négatives*. On peut regarder également un graphe signé comme un couple (X, s) , où s est une application d'une partie V de $\mathcal{P}_2(X)$ dans $\{+, -\}^*$. On pose alors $P = \{v \in V / s(v) = +\}$ et $N = \{v \in V / s(v) = -\}$. D'autre part, étant donné $S = (X, P, N)$ on définit la *fonction de signe* s en posant $V = P \cup N$, et pour $v \in V$: $s(v) = +$, si $v \in P$; $s(v) = -$, si $v \in N$. Un graphe signé $S = (X, P, N)$, pour lequel $P \cup N = \mathcal{P}_2(X)$, est appelé *complet*.

La fonction de signe s s'étend à des chaînes de longueur quelconque, le signe d'une chaîne étant le produit des signes des arêtes composantes. Un graphe signé $S = (X, P, N)$ est dit *équilibré* si et seulement si le signe de tout cycle est positif, ce qui a lieu selon un théorème de Harary ([5]) lorsque X admet une bipartition en X_1 et X_2 telle que chaque arête positive ait ses deux extrémités dans X_1 ou X_2 , et chaque arête négative ait l'une de ses extrémités dans X_1 et l'autre dans X_2 .

Soit A une partie non-vide de l'ensemble des sommets d'un graphe signé $S = (X, P, N)$. Le *sous-graphe de S engendré par A* est un graphe signé $S_A = (A, P_A, N_A)$ avec $P_A = P \cap \mathcal{P}_2(A)$ et $N_A = N \cap \mathcal{P}_2(A)$. Appelons *indice du niveau d'équilibre* le nombre

$$\rho(S) = \max \{ |A| / S_A \text{ est équilibré} \}.$$

On dira qu'un sous-graphe équilibré S_A est *maximum*, si $|A| = \rho(S)$.

*

Cet ensemble sera considéré comme un groupe à deux éléments, la multiplication étant définie habituellement, c'est-à-dire : $+. + = -$. $- = +$ et $+. - = -$. $- = +$.

Tout ensemble d'arêtes de S dont le changement de signe donne un graphe signé équilibré est appelé *ensemble d'équilibration de S* . On dit qu'un ensemble d'équilibration U_0 est *minimum*, si pour tout ensemble d'équilibration U de S on a : $|U| \geq |U_0|$. La cardinalité d'un ensemble minimum d'équilibration de S , notée $\delta(S)$, s'appelle *degré de déséquilibre de S^** .

Nous nous occuperons à partir d'ici exclusivement des graphes signés complets. Nous les appellerons brièvement cs-graphes. Soit $S = (X, P, N)$ un cs-graphe avec $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Considérons les *triangles* contenant un sommet fixé de S , par exemple x_1 . C'est-à-dire, considérons les cycles constitués de trois arêtes de la forme x_1x_i, x_ix_j, x_jx_1 . Une fonction qui fait correspondre à chacun de ces triangles son signe est appelée *base d'équilibre de pivot x_1 de S* (nous dirons brièvement base de S dans x_1). Cette notion introduite par Flament se montre très utile pour étudier les cs-graphes. On peut définir un cs-graphe d'ordre n en associant des signes aux triangles contenant x_1 et aux arêtes allant de x_1 à chacun de $n-1$ points restants, le signe d'une arête x_ix_j ($i, j \neq 1$) étant le produit des signes associés aux arêtes x_1x_i, x_1x_j et du signe associé au triangle de sommets x_1, x_i, x_j . On a donc 2^{n-1} cs-graphes distincts ayant la même base, construits sur un ensemble à n éléments. En outre, lorsqu'une base est connue, on peut en déduire les signes de tous les triangles d'un cs-graphe ^{**}.

Un cs-graphe est équilibré si et seulement si tous ses triangles sont positifs, ce qui équivaut à l'hypothèse que les triangles d'une base sont positifs.

On peut identifier les cs-graphes aux graphes simples en faisant correspondre à $S = (X, P, N)$ un graphe simple $G = (X, P)$ (ou son complémentaire $\bar{G} = (X, N)$). $S = (X, P, N)$ et $S' = (X', P', N')$ sont *isomorphes* si et seulement s'il existe une application bi-univoque de X sur X' conservant les signes d'arêtes. On voit que cela se réduit à l'isomorphisme habituel des graphes simples associés à S et S' . Cependant, lorsqu'il s'agit d'étudier l'équilibre, un autre (et plus faible) concept de similitude structurale semble convenable. Nous dirons que S et S' sont ϵ -*isomorphes*, s'il existe une bijection de X sur X' qui induit une correspondance bi-univoque entre les

* Nous nous en tenons ici à la terminologie de [3]. Dans [4] Flament définit le N -équilibre d'un graphe simple $G = (X, V)$, où $N \subset V$, ce qui équivaut à l'équilibre du graphe signé $S = (X, V-N, N)$. On introduit plus loin le degré de N -déséquilibre de G , noté $\delta_N(G)$, qui est égal à $\delta(S)$.

** Cela découle du fait suivant observé par Flament : le produit des signes des quatre triangles construits sur quatre points est toujours plus.

triangles de S et ceux de S' telle que les triangles qui correspondent l'un à l'autre aient le même signe. Il est évident que le ε -isomorphisme de S et S' entraîne que $\rho(S) = \rho(S')$ et $\delta(S) = \delta(S')$.

La classe des ensembles d'équilibration d'un cs-graphe S est déterminée complètement par une base quelconque de S . Fixons la base dans x_1 . Chaque sous-ensemble Z de $X - \{x_1\} = \{x_2, \dots, x_n\}$ définit d'une façon unique un ensemble d'équilibration dont la partie composée d'arêtes allant de x_1 à d'autres points de S ne contient que les arêtes x_1x_i avec $x_i \in Z$. Une arête $x_i x_j$ ($i, j \neq 1$) appartient à cet ensemble d'équilibration si et seulement si l'un des cas suivants a lieu : 1. Le signe du triangle de sommets x_1, x_i, x_j est $+$, et a. $x_i \in Z$ et $x_j \notin Z$, ou b. $x_i \notin Z$ et $x_j \in Z$; 2. Le signe de ce triangle est $-$, et a. $x_i \in Z$ et $x_j \in Z$, ou b. $x_i \notin Z$ et $x_j \notin Z$. On peut trouver l'ensemble d'équilibration défini par Z en procédant de la façon suivante. Associons à une arête x_1x_i le signe $-$, si $x_i \in Z$, et $+$, si $x_i \notin Z$. Construisons un cs-graphe en utilisant la base de S dans x_1 . Les arêtes négatives du cs-graphe obtenu constituent l'ensemble d'équilibration correspondant à Z .

Chaque ensemble d'équilibration U de $S = (X, P, N)$ donne un graphe simple (X, U) . Un problème intéressant est de caractériser ces graphes simples dont les ensembles d'arêtes sont des ensembles minimums d'équilibration de cs-graphes. Pour le moment nous savons seulement que le degré de tout sommet d'un tel graphe simple d'ordre n doit être inférieur ou égal à $\frac{n-1}{2}$. En effet, prenons la base dans x_1 , et remarquons que deux ensembles d'équilibration, l'un défini par $Z \subset X - \{x_1\}$ et l'autre défini par le complémentaire de Z dans $X - \{x_1\}$, diffèrent seulement par leurs arêtes incidentes à x_1 .

S et S' sont ε -isomorphes si et seulement s'ils admettent des ensembles d'équilibration respectivement U et U' tels que les graphes simples (X, U) et (X', U') soient isomorphes.

La classe de tous les cs-graphes définis sur un ensemble X est munie d'une distance. Pour $S_1 = (X, P_1, N_1)$ et $S_2 = (X, P_2, N_2)$ on pose $d(S_1, S_2) = |P_1 \Delta P_2|$, c'est-à-dire, la distance de S_1 et S_2 est égale à l'effectif de la différence symétrique de P_1 et P_2 . En d'autres termes

$$d(S_1, S_2) = \frac{1}{2} \sum_{i < j} |s_1(x_i x_j) - s_2(x_i x_j)|$$

On peut donner la définition équivalente du degré de déséquilibre par la formule

$$\delta(S) = \min_{\hat{S}} d(S, \hat{S})$$

où \hat{S} parcourt la classe des cs-graphes équilibrés définis sur l'ensemble des sommets de S . Il en résulte immédiatement que pour deux cs-graphes S_1 et S_2 définis sur X on a

$$|\delta(S_1) - \delta(S_2)| \leq d(S_1, S_2).$$

L'indice du niveau d'équilibre vérifie l'inégalité analogue. On a

$$|\rho(S_1) - \rho(S_2)| \leq d(S_1, S_2).$$

Un cs-graphe dont tous les triangles sont négatifs s'appelle *anti-équilibré*. $S = (X, P, N)$ est anti-équilibré si et seulement si $\bar{S} = (X, N, P)$ est équilibré. Le degré de déséquilibre d'un cs-graphe anti-équilibré d'ordre n est égal à $E(n)$, où $E(n) = \frac{n(n-2)}{4}$ pour n pair, et $E(n) = \frac{(n-1)^2}{4}$ pour n impair. En effet, on peut supposer toujours que S n'a que des arêtes négatives. Remarquons qu'il faut $\binom{n}{2} - k(n-k)$ changements de signe pour obtenir un cs-graphe équilibré tel que la bipartition qui lui correspond soit composée d'ensembles de k et $n-k$ éléments. Par conséquent, $\delta(S) = \min_k \left(\binom{n}{2} - k(n-k) \right) = \binom{n}{2} - \max_k k(n-k) = E(n)$.

Un cs-graphe $S = (X, P, N)$ s'appelle *cs-graphe de p-coalition* (p -clusterable, cf. [2]) si X est la réunion de p ensembles non-vides deux à deux disjoints A_1, \dots, A_p tels que $P = \bigcup_{i=1}^p \mathcal{P}_2(A_i)$. Nous calculerons le degré de déséquilibre d'un tel cs-graphe en généralisant la formule pour un cs-graphe de n -coalition d'ordre n .

THEOREME 1. Soient m_1, \dots, m_p les effectifs des ensembles A_1, \dots, A_p de la partition correspondant à un cs-graphe S de p -coalition d'ordre n . Posons $I = \{1, \dots, p\}$ et pour $I' \subset I$:

$$f(I') = \sum_{i \in I'} m_i. \quad \text{On a alors}$$

$$\delta(S) = \frac{1}{2} \left[n^2 - \sum_{i=1}^p m_i^2 \right] - \max_{I' \subset I} f(I')(n-f(I'))$$

Preuve

Nous emploierons la récurrence sur $n-p$. On a déjà démontré que la formule est vérifiée pour $p=n$. Ayant supposé que le théorème est vrai pour les cs-graphes d'ordre n de $p+1$ -coalition, considérons un ensemble minimum d'équilibration U d'un cs-graphe S d'ordre n de p -coalition. Nous allons montrer que U ne contient aucune arête ayant ses deux extrémités dans un même ensemble de la partition

A_1, \dots, A_p . On aura alors

$$\begin{aligned} \delta(S) &= |U| = \sum_{\mathcal{P}_2(I_0)} m_i m_j + \sum_{\mathcal{P}_2(I-I_0)} m_i m_j = \frac{1}{2} \left[f(I_0)^2 + (n-f(I_0))^2 - \sum_{i=1}^p m_i^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[n^2 - \sum_{i=1}^p m_i^2 \right] - f(I_0)(n-f(I_0)), I_0 \text{ étant une partie de } I. \end{aligned}$$

Supposons que U comporte des arêtes reliant des points dans A_1 , par exemple. Clairement, U transforme la clique engendrée par A_1 en un sous-graphe équilibré auquel correspond une bipartition de A_1 . On a donc $k \cdot \bar{k}$ changements de signe à l'intérieur de A_1 , k et $\bar{k} = m_1 - k$ étant les nombres d'éléments des ensembles de la bipartition de A_1 . A la suite de ces changements on obtient de S un cs-graphe de $P+1$ -coalition dont le degré de déséquilibre, d'après l'hypothèse de récurrence, est donné par l'expression

$$k \cdot f(J_0) + \bar{k} f(J-J_0) + \sum_{\mathcal{P}_2(J_0)} m_i m_j + \sum_{\mathcal{P}_2(J-J_0)} m_i m_j, \text{ où } J_0 \text{ est une partie de}$$

$J = \{2, \dots, p\}$. Soit $f(J_0) \geq f(J-J_0)$, par exemple. L'ensemble d'équilibration

$$U' \text{ de } S \text{ ayant } m_1 \cdot f(J-J_0) + \sum_{\mathcal{P}_2(J_0)} m_i m_j + \sum_{\mathcal{P}_2(J-J_0)} m_i m_j \text{ pour effectif a}$$

moins d'éléments que U . En effet,

$$|U| - |U'| = k \cdot \bar{k} + k(f(J_0) - f(J-J_0)) > 0.$$

On a donc obtenu la contradiction et le théorème est démontré.

I. Tomescu a démontré ([6]) que pour tout cs-graphe S d'ordre n on a $\delta(S) < E(n)$. Nous ferons usage de l'indice du niveau d'équilibre pour établir une évaluation plus précise de $\delta(S)$.

THEOREME 2. Le degré de déséquilibre d'un cs-graphe S d'ordre n vérifie les inégalités suivantes, où $m = \rho(S)$.

$$n - m \leq \delta(S) \leq E(n) - E(m).$$

Preuve

On a : $n-m = \rho(R) - \rho(S) \leq d(R,S) = \delta(S)$, où R est un cs-graphe équilibré d'ordre n . La deuxième évaluation sera démontrée par récurrence sur $n-m$.

Supposons d'abord que $n-m = 1$, c'est-à-dire, que S contient un sous-graphe équilibré d'ordre $n-1$. Soit $A = \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ son ensemble de sommets et a_0 le sommet restant de S . Désignons par A_1 et A_2 les ensembles de la bipartition

de A qui correspond au sous-graphe équilibré S_A . Posons

$$A_1^+ = \{a_i \in A_1 / s(a_o a_i) = +\} \quad \text{et} \quad A_1^- = \{a_i \in A_1 / s(a_o a_i) = -\}.$$

A_2^+ et A_2^- sont définis de même. Evidemment, l'un des ensembles d'équilibration

$$U_1 = \{a_o a_i / a_i \in A_1^- \cup A_2^+\} \quad \text{et} \quad U_2 = \{a_o a_i / a_i \in A_1^+ \cup A_2^-\}$$

a au plus $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ éléments, où $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ représente le plus grand entier n'excédant pas $\frac{n-1}{2}$. Remarquons enfin que $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor = E(n) - E(n-1)$.

On peut faire la récurrence de la façon suivante. Etant donné un cs-graphe S d'ordre n avec $\rho(S) = m$, on en obtient S' tel que $\rho(S') = m+1$ et $d(S, S') \leq E(m+1) - E(m)$. Pour construire S', il suffit d'équilibrer un sous-graphe de S d'ordre m+1 contenant un sous-graphe équilibré d'ordre m, en utilisant l'ensemble d'équilibration trouvé comme précédemment. On a $\delta(S') \leq E(n) - E(m+1)$ en vertu de l'hypothèse de récurrence. Par conséquent, $\delta(S) \leq \delta(S') + d(S, S') \leq E(n) - E(m)$.

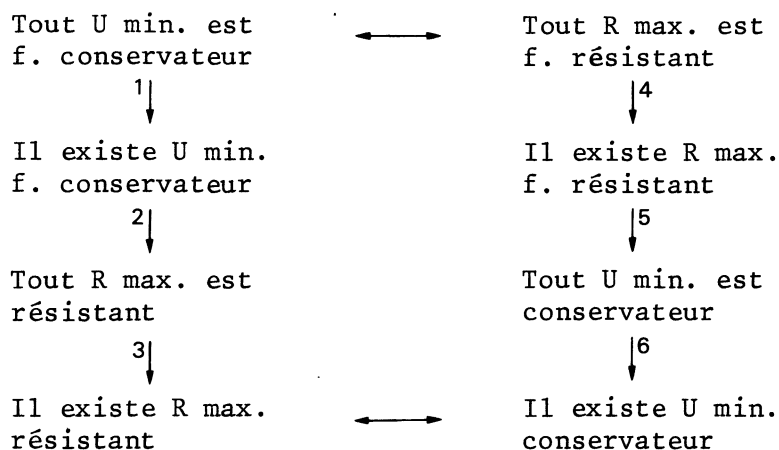
Les seuls cs-graphes d'ordre n dont le degré de déséquilibre est E(n) sont les cs-graphes anti-équilibrés. Ce résultat de [6] se déduit immédiatement du théorème 2. En effet, pour tout cs-graphe S d'ordre n qui n'est pas anti-équilibré on a : $\rho(S) \geq 3$, d'où $\delta(S) \leq E(n)-1$.

ENSEMBLES D'EQUILIBRATION ET SOUS-GRAPHES EQUILIBRES

Passons maintenant à l'étude de la relation entre les ensembles d'équilibration et les sous-graphes équilibrés d'un cs-graphe. Soit U un ensemble d'équilibration d'un cs-graphe S. On dira que U *conserve* le sous-graphe équilibré de S engendré par A, si aucune des arêtes de U n'a ses deux extrémités dans A. U conserve S_A si et seulement si A est un ensemble stable* du graphe simple (X,U). Appelons un sous-graphe équilibré de S *résistant*, s'il est conservé par un ensemble minimum d'équilibration de S, et *fortement résistant*, si tout ensemble minimum d'équilibration de S le conserve. Un ensemble d'équilibration U de S sera appelé *conservateur*, s'il existe un sous-graphe équilibré maximum de S conservé par U, et *fortement conservateur*, si U conserve tous les sous-graphes équilibrés maximums de S. Ces définitions permettent de formuler quelques énoncés qui nous semblent propres à décrire l'aspect considéré du processus d'équilibration. Ces énoncés sont présentés

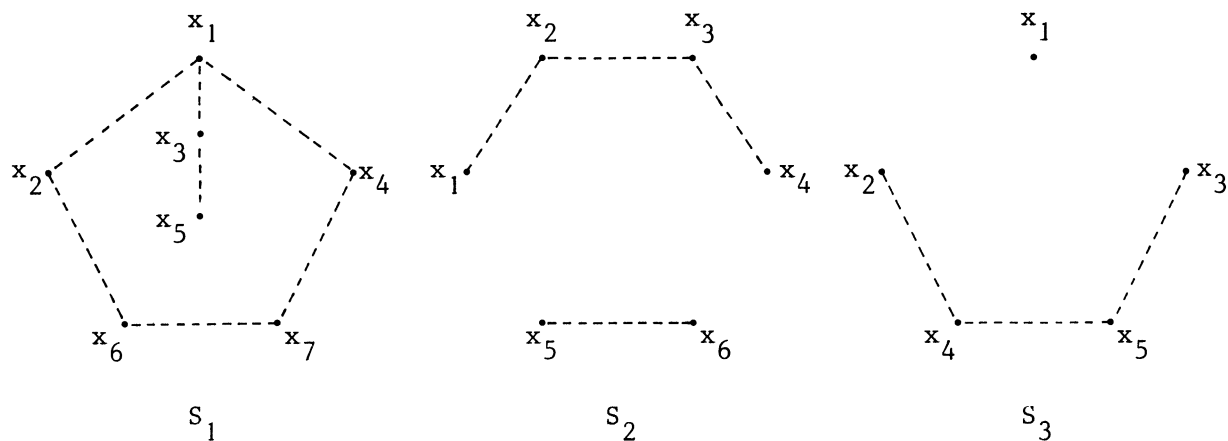
* A propos du concept de stabilité voir [1], chap.13.

ci-dessous, leurs dépendances logiques étant désignées par des flèches.



Aucune de ces propositions n'est vraie pour un cs-graphe quelconque. Un cs-graphe S_0 d'ordre 12 de 5-coalition, pour lequel $m_1 = m_2 = m_3 = 2$ et $m_4 = m_5 = 3$, est un contre-exemple. Il résulte du théorème 1 que S_0 admet un seul ensemble minimum d'équilibration. Cet ensemble d'équilibration transforme le seul sous-graphe équilibré maximum de S_0 , composé de deux coalitions de 3 éléments, en une coalition de 6 éléments.

Aucune des implications numérotées de 1 à 6 ne peut être renversée. Nous allons examiner les trois cs-graphes S_1, S_2, S_3 présentés ci-dessous (pour ne pas compliquer le dessin on a indiqué seulement les arêtes négatives).



L'ensemble $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ engendre un seul sous-graphe équilibré maximum de S_1 . Il y a 9 ensembles minimums d'équilibration : U_1 est l'ensemble des arêtes négatives de S_1 , $U_2 = \{x_2x_5, x_2x_7, x_3x_6, x_3x_7, x_4x_5, x_4x_6, x_6x_7\}$, $U_3 = \{x_1x_5, x_1x_6, x_1x_7, x_2x_6, x_3x_5, x_4x_7, x_6x_7\}$, et les six restants sont leurs images obtenues par les permutations suivantes de l'ensemble des sommets de

$S_1 : (x_4, x_1, x_3, x_2, x_6, x_7, x_5)$ et $(x_2, x_1, x_3, x_4, x_7, x_6, x_5)$. Trois ensembles minimums d'équilibration (U_1 et ses images) ne sont pas conservateurs tandis que les autres sont fortement conservateurs. S_1 montre donc que les implications 1 et 6 ne peuvent être renversées.

S_2 est un exemple d'un cs-graphe pour lequel les implications inverses de 3 et 4 sont fausses. On a $\rho(S_2) = 3$ et $\delta(S_2) = 4$. L'ensemble des arêtes négatives de S_2 est le seul ensemble minimum d'équilibration de S_2 . Il y a 8 sous-graphes équilibrés maximums, parmi lesquels deux, l'un de sommets x_1, x_2, x_3 et l'autre de sommets x_2, x_3, x_4 , ne sont pas résistants. Les autres, par exemple le sous-graphe de sommets x_1, x_3, x_5 , sont fortement résistants.

Les sous-graphes équilibrés maximums de S_3 sont les sous-graphes de sommets respectivement : $R_1 - x_1, x_2, x_3$; $R_2 - x_1, x_2, x_5$; $R_3 - x_1, x_3, x_4$; $R_4 - x_2, x_4, x_5$; $R_5 - x_3, x_4, x_5$. Il y a 5 ensembles minimums d'équilibration : $U_1 = \{x_2x_4, x_3x_5, x_4x_5\}$ conservant R_1, R_2, R_3 ; $U_2 = \{x_1x_4, x_3x_4, x_3x_5\}$ conservant R_1, R_2, R_4 ; $U_3 = \{x_1x_5, x_2x_4, x_2x_5\}$ conservant R_1, R_3, R_5 ; $U_4 = \{x_1x_2, x_1x_5, x_2x_3\}$ conservant R_3, R_4, R_5 ; $U_5 = \{x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3\}$ conservant R_2, R_4, R_5 . On voit que les implications inverses de 2 et 5 sont fausses dans ce cas.

Le théorème qui suit montre que la condition : $\rho(S) > \frac{2}{3}n$ entraîne que tout ensemble minimum d'équilibration de S est fortement conservateur, autrement dit, que tout sous-graphe équilibré maximum est fortement résistant.

THEOREME 3. Tout ensemble minimum d'équilibration d'un cs-graphe S d'ordre n conserve tous les sous-graphes équilibrés de S d'ordre supérieur à $\frac{2}{3}n$.

Preuve

Considérons un sous-graphe équilibré d'ordre m de S avec $m > \frac{2}{3}n$. Soit $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ son ensemble de sommets. Désignons par $B = \{b_1, \dots, b_{n-m}\}$ le complémentaire de A dans l'ensemble des points de S . Soit U_0 un ensemble minimum d'équilibration de S . U_0 est déterminé complètement par sa partie composée des arêtes allant de a_1 (choisi pour pivot de la base) aux points d'un ensemble $Z_0 = A_0 \cup B_0$, où $A_0 \subset A - \{a_1\}$ et $B_0 \subset B$. Pour démontrer le théorème, il suffit d'établir que $A_0 = \emptyset$. Supposons que $|A_0| = k > 0$. On verra que ceci contredit la minimalité de U_0 . Nous montrerons que l'ensemble d'équilibration U_1 défini par $Z_1 = B_0$ a moins d'éléments que U_0 .

Un ensemble d'équilibration peut comporter, en particulier, certaines arêtes de la forme $a_i b_j$ avec $a_i \in A - \{a_1\}$ et $b_j \in B$. Soient T_0 et T_1 les parties respectivement de U_0 et U_1 composées d'arêtes de cette forme. On voit

que $|U_0| - |U_1| = k(m-k) + |T_0| - |T_1|$. Nous allons utiliser l'inégalité suivante :

$$||T_0| - |T_1|| \leq |T_0 \Delta T_1|.$$

La différence symétrique de T_0 et T_1 est égale à $\{a_i b_j / a_i \in A_0, b_j \in B\}$. Pour vérifier cela remarquons que toutes les arêtes $a_i b_j$ avec $a_i \notin A_0$ n'appartiennent pas à $T_0 \Delta T_1$, et pour chaque arête $a_i b_j$ avec $a_i \in A_0$ l'une des situations suivantes a lieu : 1. Le signe du triangle de sommets a_i, a_i, b_j est +. On a alors : $a_i b_j \in T_1 - T_0$, si $b_j \in B_0$, et $a_i b_j \in T_0 - T_1$, si $b_j \notin B_0$; 2. Le signe de ce triangle est -. On a alors : $a_i b_j \in T_0 - T_1$, si $b_j \in B_0$, et $a_i b_j \in T_1 - T_0$, si $b_j \notin B_0$.

On a donc $|T_0 \Delta T_1| = k(n-m)$ et en conséquence nous obtenons

$$|U_0| - |U_1| \geq k(m-k) - |T_0 \Delta T_1| = k(2m-n-k).$$

Si $2m-n > k$, alors $|U_0| - |U_1| > 0$ et U_0 n'est pas minimum. Dans le cas contraire on raisonne de même ayant pris la base dans un point $a_i \in A_0$. L'effectif du nouveau A_0 est $m-k$. La relation $2m-n > m-k$ doit être vérifiée, puisque on aurait autrement $2m-n \leq k$ et $2m-n \leq m-k$, d'où $m \leq \frac{2}{3}n$. Le théorème a donc été démontré.

Nous n'avons pas réussi à trouver des conditions suffisantes pour les autres énoncés présentés sur le diagramme. Nous sommes en mesure de démontrer seulement que la condition $\rho(S) \geq n-2$ entraîne que tout ensemble minimum d'équilibration de S est conservateur et tout sous-graphe équilibré maximum de S est résistant. Nous en omettons la preuve.

Soit U un ensemble d'équilibration d'un cs-graphe $S_0 = (X, P_0, N_0)$. Une suite d'arêtes (u_1, \dots, u_r) obtenue en ordonnant U est accompagnée d'une suite de cs-graphes (S_0, S_1, \dots, S_r) telle que S_{i+1} résulte de S_i par le changement de signe de l'arête u_i . Cette suite de cs-graphes définit un chemin dans le graphe simple ayant les cs-graphes construits sur X pour sommets, S et S' étant adjacents si et seulement si $d(S, S') = 1$, autrement dit, s'ils diffèrent par le signe d'une seule arête. L'hypothèse qu'un cs-graphe s'équilibre par un nombre minimum de changements de signe ne précise pas, sur lequel de $r!$ chemins possibles pour un ensemble minimum d'équilibration de r éléments le processus d'équilibration s'effectue. Nous proposons une hypothèse supplémentaire qui affirme que le niveau d'équilibre mesuré par l'indice ρ ne baisse pas à chaque étape du processus d'équilibration. Peut-on mettre d'accord ces deux hypothèses ? Le théorème suivant donne la réponse affirmative.

THEOREME 4. Soit U un ensemble minimum d'équilibration d'un cs-graphe S_0 d'ordre n avec $\rho(S_0) = m$ et $\delta(S_0) = r$. On peut ordonner U de telle façon que la suite de cs-graphes (S_0, S_1, \dots, S_r) définie par la succession des arêtes de U vérifie

$$m = \rho(S_0) \leq \rho(S_1) \leq \dots \leq \rho(S_{r-1}) \leq \rho(S_r) = n .$$

Preuve

Nous montrerons que l'on peut trouver une disposition successive des éléments de U qui donne une suite de cs-graphes (S_0, S'_1, \dots, S'_r) telle que $\rho(S'_i) \geq m$ pour $i = 1, \dots, r$. Etant donné un sous-graphe équilibré de S_0 d'ordre m, engendré par A, divisons U en deux parties. Une arête de U appartiendra à la première partie, si elle a au moins une de ses extrémités hors A, et à la deuxième partie dans le cas contraire. Ordonnons U de façon que les arêtes de la première partie précèdent les restantes. D'après le théorème 3, ces dernières manquent, si $m > \frac{2}{3}n$. Si la deuxième partie de U est non-vide, elle est composée des arêtes reliant deux sous-ensembles A_1 et A_2 de A qui forment une bipartition de A. Soit S'_t le cs-graphe résultant de S_0 à la suite de changements de signe des arêtes de la première partie de U. S'_t et les cs-graphes qui le suivent contiennent deux sous-graphes équilibrés, l'un engendré par $(X-A) \cup A_1$ et l'autre engendré par $(X-A) \cup A_2$. L'un ou l'autre a au moins m sommets. En effet, l'inégalité $m \leq \frac{2}{3}n$ entraîne que $n-m+k \geq m$ ou $n-m+m-k = n-k \geq m$, où $k = |A_1|$.

Soit S'_j le premier cs-graphe dans la succession tel que son indice du niveau d'équilibre est $m+1$. La disposition des arêtes de U qu'on a définie nous fournit j termes initiaux u_1, \dots, u_j de la suite d'arêtes cherchée. Le raisonnement se répète maintenant pour S'_j , $U - \{u_1, \dots, u_j\}$ étant son ensemble minimum d'équilibration, et ainsi de suite.

Si $\rho(S_0) > \frac{2}{3}n$, l'indice du niveau d'équilibre ne diminue pas sur chacun des plus courts chemins à l'équilibre, ce qui n'est pas toujours vrai.

Considérons l'ensemble minimum d'équilibration U_1 du cs-graphe S_1 de la figure. On a $\rho(S_1) = 4$. En changeant le signe de l'arête x_1x_3 on obtient de S_1 un cs-graphe dont l'indice du niveau d'équilibre est 3.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BERGE C., *Graphes et hypergraphes*, Paris, Dunod, 1970.
- [2] DAVIS J.A., "Clustering and structural balance in graphs", *Human relations*, 20(1967), 181-187.
- [3] FLAMENT C., *Théorie des graphes et structures sociales*, Paris, Mouton et Gauthier-Villars, 1965. Le livre est apparu plus tôt en anglais sous le titre: *Applications of graph theory to group structure*, Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1963.
- [4] FLAMENT C., "Equilibre d'un graphe : quelques résultats algébriques", *Math. Sci. hum.*, 8^e année, n°30(1970), 5-10.
- [5] HARARY F., "On the notion of balance of a signed graph", *The Michigan Mathematical Journal*, 2(1953), 143-146.
- [6] TOMESCU I., "Note sur une caractérisation des graphes dont le degré de déséquilibre est maximal", *Math. Sci. hum.*, 11^e année, n°42, (1973), 37-40.