MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

PIERRE BATTEAU
JEAN-MARIE BLIN

Sur le problème des procédures de scrutin garantissant une expression sincère des opinions

Mathématiques et sciences humaines, tome 54 (1976), p. 45-60
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1976__54__45_0>

Math. Sci. hum. (14e année, n°54, 1976, p.45-60)

SUR LE PROBLEME DES PROCEDURES DE SCRUTIN GARANTISSANT UNE EXPRESSION SINCERE DES OPINIONS. [1]

Pierre BATTEAU [2] Jean-Marie BLIN [3]

INTRODUCTION.

"Pour toute procédure de scrutin, autre que celle qui consiste à rendre le résultat final conforme à l'opinion d'un électeur prédésigné (un dictateur), il existe au moins un état de l'électorat où certains électeurs trouvent un avantage à ne pas voter conformément à leur opinion sincère". Autrement dit, aucune procédure de scrutin ne peut écarter l'apparition de votes "stratégiques". Ce résultat apparemment curieux a été apporté indépendamment par Gibbard [5] et Satterthwaite [10] depuis peu. Les démonstrations respectives qu'ils en font ne permettent que très difficilement de se faire une idée précise des raisons de ce phénomène. De plus leurs travaux portent sur les manipulations individuelles d'une procédure de scrutin.

On se propose ici de rétablir ce résultat par un cheminement assez différent . D'une part on s'intéresse non seulement aux manipulations individuelles mais aussi à celles qui peuvent résulter de l'action de coalitions

1 Les auteurs ont une dette particulière à l'égard de Marc Satterthwaite de l'Université de Northwestern pour les fructueux échanges suscités par son papier originel et qui ont donné naissance à l'idée de cette recherche. Ils adressent aussi leurs vifs remerciements à Bernard Monjardet dont les nombreuses et pertinentes remarques ont permis d'améliorer grandement la qualité de cet article.

2 Institut d'Administration des Entreprises, Université de Droit d'Fconomie et des Sciences d'Aix-Marseille.

3 Northwestern University, Evanston, Illinois.

d'électeurs et d'autre part on utilise une méthode directe de preuve dont l'idée initiale est inspirée de la reformulation que Guilbaut [6] a donné du théorème d'Arrow sur l'agrégation des préférences [1] . Il existe en effet une relation étroite entre ces deux catégories de problèmes et ce en dépit de l'affirmation d'Arrow qui est reproduite en note. [1]

Les hypothèsesde base que l'on trouve habituellement dans ce champ de recherche seront brièvement énoncées sans commentaires. On fournira un cadre formel à la question du vote stratégique en utilisant la théorie des jeux. Le théorème principal sera démontré en plusieurs étapes,il fera ensuite l'objet de quelques commentaires. Une annexe présente un bref historique du vote stratégique et le résumé des principales contributions.

I. LE PROBLEME DU VOTE STRATEGIQUE

On considère un ensemble N de n électeurs et un ensemble A de m propositions exclusives faisant l'objet du vote. On supposera tout au long de ce qui suit que $m \geqslant 3$. Les préférences "sincères" de chaque électeur i sont représentées par un ordre complet sur A (une permutation des éléments de A) noté P_i^* . L'indifférence entre deux ou plusieurs actions est donc exclue mais ceci dans le seul but de ne pas alourdir l'exposé.

Le vote d'un électeur i peut traduire des preférences différentes de ses préférences sincères : on les appellera "préférences exprimées". On convient également de poser que les préférences exprimées sont représentées par une permutation des éléments de A notée P_i° .

Un n-uple $P = (P_1, P_2, \dots P_n)$ de permutations sur A est appelé un profil d'opinion (ou simplement : profil). S'il s'agit des préférences sincères (resp. exprimées) on précise "profil sincère" (resp. exprimé). On note ce profil P^* (resp. P°). Il est clair qu'un profil appartient à l'ensemble des m! permutations de A à la puissance cartésienne n. On notera cet ensemble $\mathbf{P}^n$

---

1 "Ignorant l'aspect ludal du problème des choix collectifs, nous supposerons de plus que les préférences individuelles sont tenues pour "données" et ne peuvent être altérées par la nature même du processus de décision. Ceci est le point de vue habituel dans la théorie économique et le credo libéral classique. S'il n'en va pas ainsi, il devient très difficile de dire ce que signifie le fait qu'une méthode soit préférable à une autre" p. 7-8 [1] .

D'une manière pratique, une procédure de scrutin est constituée par un ensemble de règles qui spécifient la manière d'exprimer les opinions et fournissent le moyen de désigner une proposition particulière, élément de A, que l'on appelle le "vainqueur" de l'élection. De notre point de vue il suffira de s'en tenir à la définition suivante :

DEFINITION 1 : On appelle "procédure de scrutin" toute fonction définie sur $\mathbf{P}^n$ à valeurs dans A.

On note, d'une manière générique, une telle fonction par la lettre F. Une procédure de scrutin associe donc à tout profil P°, exprimé, un et un seul élément de A, appelé "vainqueur".

Cette définition appelle cinq commentaires : (1) Elle suppose d'abord que tout élément de $\mathbf{P}^n$ peut constituer un profil exprimé. On ne tient donc pas compte ici de l'argument dit "blackien" (de D. Black) qui, par la considération d'un ordre "naturel" sur A permet d'exclure certains profils (Cet argument est d'ailleurs très discutable). (2) Elle exclut les procédures concrètes de scrutin faisant jouer le hasard [1] pour départager d'éventuels ex-aequos. (3) Elle suppose que l'abstention ne soit pas possible (n'est-elle pas d'ailleurs un "vote stratégique" parfois?)et que le vainqueur soit toujours désigné. (4) Il est à noter qu'elle recouvre les modes usuels de scrutin où l'opinion s'exprime par la désignation par chaque électeur d'un seul élément de A et non par toute la permutation. Il suffit simplement de fixer F(P°) comme une constante pour tout profil dont les ordres constituants ont les mêmes éléments maximaux. (5) Enfin on remarque qu'elle fait dépendre la procédure du nombre d'électeurs et du nombre de propositions dans A. Dans la pratique, une constitution prévoit des règles qui sont exemptes de cette dépendance. En réalité elles impliquent autant de fonctions F qu'il y a de situations (N, A).

Puisque $\mathbf{P}^n$ et A sont finis, le nombre de procédures différentes que l'on peut imaginer est fini (Il y en a $(m)^{(m!)^n}$). Notre champ d'investigation est l'ensemble de toutes ces fonctions.

---

[1] Gibbard les appelle "procédures de vote mixtes" (Mixed voting schemes) car à chaque profil est associée une distribution de probabilité sur A. A ce propos, on peut voir pourquoi, lorsqu'on exclut un départage au hasard des ex-aequos, la dictatorialité est requise même pour N = 2.

Un vote stratégique, c'est-à-dire ne reflètant pas l'opinion sincère des électeurs, se produira lorsque ceux-ci y trouveront un intérêt. Cet intérêt peut se concrétiser par une action individuelle ou par celle d'une coalition d'électeurs. Il convient donc de donner un sens formel à cette notion d'intérêt.

DEFINITION 2 : On dira qu'un profil $P°$ est préférable à $P°'$ pour $I \subset N$ si $F(P°)$ est classé avant $F(P°')$ dans P_i^* pour tout $i \in I$.

On note $P° >_{(I)} P°'$. Ceci implique en particulier que si I peut par une modification du choix de ses membres, faire changer $P°$ en $P°'$, $P°$ ne peut être un profil stable. On peut bien sûr avoir $I = (i)$.

Il est à noter qu'un tel intérêt ne peut être perçu que si les électeurs possèdent quelque information sur l'opinion globale de l'électorat. Si, à priori, chaque électeur i n'a d'autre information sur P^* que P_i^*, il n'a aucun intérêt à ne pas exprimer P_i^*. En pratique (et notamment par les sondages) il existe une information sur P^* plus ou moins bien partagée par les électeurs. On se placera ici dans le cas limite où cette information est parfaite : P^* est toujours à priori publiquement connu.

Puisque les intérêts des diverses coalitions jouent d'une manière interdépendante, il est naturel d'envisager la question sous l'angle d'un certain type de jeux dont on parle maintenant.

I.1. Jeux de vote

Les jeux de vote ont été introduits par Farquharson [3]. Ils sont un cas particulier d'une forme plus générale de jeux dont les utilités sont définies en termes purement ordinaux. Ils sont constitués par :

- Un ensemble S_i de stratégies possibles pour chaque joueur.
- Une fonction F de $\prod_{i=1}^{n} S_i$ dans un ensemble A.
- Un préordre $\succsim_i$ pour chaque joueur, défini sur A. [1]

[1] De tels jeux excluent la possibilité de transferts d'utilité ou de paiements latéraux. On ne peut pas non plus définir de stratégie mixte puisque l'utilité du résultat n'est définie (si elle l'est) qu'à une transformation croissante près.

Dans un jeu de vote S_i est l'ensemble des m! permutations de A pour chaque électeur. Le préordre $\succsim_i$ est fourni par la permutation P_i^* (opinion sincère) attachée à chaque i. Puisque F et P^* suffisent à fixer le jeu, on le note (F, P^*).

Les concepts suivants sont utiles pour la suite :

DEFINITION 3 : <u>Soit un jeu (F, P^*) et un profil (stratégie) P°. Soit B^I(P°) l'ensemble des profils qui peuvent être obtenus seulement par un changement des votes individuels des membres de I.[1] On dit que P° peut être renversé par I s'il existe P°' dans B^I(P°) telle que P°' est préférable à P° pour I.</u>

DEFINITION 4 : <u>Un profil qui ne peut être renversé par aucune coalition formée d'un seul électeur est appelé un "équilibre de Nash".</u>

- <u>Un profil qui ne peut être renversé par aucune coalition formée d'un nombre quelconque d'électeurs est appelé un "équilibre fort".</u>

Il est clair qu'un équilibre fort est aussi un équilibre de Nash. Il peut exister des jeux (F,P^*) qui n'aient aucun des deux équilibres. Certains peuvent avoir un équilibre de Nash sans avoir d'équilibre fort. Il faut alors interdire les coalitions pour obtenir un équilibre.

Ces dispositions conduisent à deux définitions centrales :

DEFINITION 5 : <u>On dit qu'une procédure de scrutin F est non-détournable de type I si pour tout P^* dans $\mathbf{P}^n$, P^* est un équilibre de Nash du jeu (F,P^*).</u>

DEFINITION 6 : <u>On dit qu'une procédure de scrutin F est non-détournable de type II si pour tout P^* dans $\mathbf{P}^n$, P^* est un équilibre fort du jeu (F,P^*).</u>

Il est utile, à contrario, de noter qu'une procédure de scrutin F est détournable si, pour un quelconque P^* dans $\mathbf{P}^n$, celui-ci n'est pas un équilibre du jeu (F,P^*). Ceci se produit en particulier lorsque le jeu n'a pas de point d'équilibre. On note aussi que la procédure est réputée non-détournable s'il existe d'autres point d'équilibre que P^*. La question générale de l'existence de points d'équilibre forts ou de Nash pour de tels jeux et des conditions qui en sont nécessaires est encore incomplètement étudiée mais ceci ne constitue pas un obstacle pour la suite.

---

[1] cette notion est précisée formellement par la définition 9.

Gibbard et Satterthwaite ont recherché des procédures non-détournables de type I. Puisque celles qu'ils ont trouvées sont dictatoriales, elles sont aussi non-détournables de type II et les deux classes de procédures se confondent. On va procéder différemment : On pose d'abord la question: "Existe-t-il des procédures non-détournables de type II" ? Cette première interrogation est naturelle car on ne voit pas, à priori, comment on peut pratiquement interdire les coalitions (dont le besoin est attesté entre autres par l'existence de partis politiques). Si la réponse n'est pas satisfaisante, on se demande alors si par l'interdiction des coalitions, on ne peut pas rétablir la non-détournabilité. Cependant, puisqu'à posteriori on apprend que les deux classes sont identiques, la réponse à cette deuxième question est plus générale. En introduisant la possibilité de coalitions on n'apporte donc pas de résultat nouveau mais on suit un cheminement plus logique.

On rappelle ce qu'est une procédure dictatoriale :

DEFINITION 7 : <u>Une procédure de scrutin F est dite dictatoriale si et seulement s'il existe dans N un électeur d tel que pour tout $P°$ dans $\mathbf{P}^n$: $F(P°) = \operatorname{Max} P_d^°$.</u>

Il est clair qu'une procédure dictatoriale est non-détournable. Cependant, il peut exister d'autres procédures non-détournables en dehors des procédures dictatoriales ; elles présentent toutefois un caractère trivial et il convient de les isoler ; par exemple :

DEFINITION 8 : <u>Une procédure F est dite "imposée" si $F(P°)$ = constant pour tout P dans $\mathbf{P}^n$</u>.

Il est clair qu'une procédure "imposée" est non-détournable (de type I et II) ; mais ce n'est pas le seul cas : supposons que $|A| = 2$ et utilisons le vote majoritaire pour déterminer lequel des deux éléments l'emporte : une telle procédure est non-dictatoriale et non-détournable puisque dans ce cas écarter x revient à choisir y pour chaque électeur. Si, dans cette situation, on ajoute arbitrairement des éléments à A, on peut construire une procédure F, au sens défini, qui soit non-détournable et non dictatoriale, mais il s'agit d'un cas trivial puisqu'en fait seuls deux éléments peuvent être vainqueurs. Pour écarter cette situation, on a besoin de la condition :

CONDITION I : <u>L'image de $\mathbf{P}^n$ par F dans A est au moins de cardinal 3 (c.à.d. $|F(\mathbf{P}^n)| > 2$)</u>.

II. EXISTENCE ET NATURE DES PROCEDURES NON-DETOURNABLES DE TYPE II.

On s'intéresse donc d'abord aux manipulations collectives. Tout au long de ce paragraphe, on ne précisera plus : "de type II". Le théorème central est le suivant :

THEOREME 1 : Toute procédure de scrutin non-détournable est dictatoriale ou bien ne vérifie pas la condition I.

La démonstration va s'opérer en plusieurs étapes qui se résument ainsi : On introduit une condition nécessaire de non-détournabilité qui énonce que si un élément x de A est vainqueur pour un quelconque profil P°, il doit le rester pour tous les profils qui ne diffèrent de P° que par les choix des parties de la coalition des électeurs qui ont classé x en dernier dans P°. La coalition opposée de ceux qui n'ont pas classé x en dernier est appelée "déterminante pour x". On considère alors les familles de coalition déterminantes pour chaque élément de A ; on montre qu'elles possèdent plusieurs propriétés impliquant en particulier qu'elles sont identiques et possèdent un "singleton" c'est-à-dire un électeur déterminant pour tout x de A. Afin de formaliser ce raisonnement, on introduit d'abord trois notations :

- P°_I est la restriction de P° à $I \subset N$, c'est-à-dire :

$$P^\circ_I = \left\{ P^\circ_i \mid P^\circ_i \in P^\circ \text{ et } i \in I \right\}$$

- $I_{ab}(P^\circ)$ est la coalition des électeurs exprimant a avant b dans P° :

$$I_{ab}(P^\circ) = \left\{ i \in N \mid a \underset{P^\circ_i}{>} b \right\}, \ \forall (a,b) \in A.A$$

- $I_x(P^\circ)$ est la coalition des électeurs ne classant pas x en dernier dans P° :

$$I_x(P^\circ) = I_{xy}(P^\circ) \cup I_{xz}(P^\circ) \cup I_{x.}(P^\circ) \qquad \text{etc...}$$

Puis on pose la définition :

DEFINITION 9 : On dit qu'un profil P°' est accessible de P° à la coalition I d'électeurs si et seulement si $P^\circ_{\bar{I}} = P^{\circ\prime}_{\bar{I}}$.[1]

[1] On note $\bar{I}$ le complémentaire de tout ensemble I par rapport à N.

On note : " $P° \overset{I}{\longleftrightarrow} P°'$ "

$\overset{I}{\longleftrightarrow}$ est une relation d'équivalence dans $\mathbf{P}^n$. Intuitivement l'accessibilité signifie que I est maître du choix entre P° et P°'.

Dans ce qui suit, afin d'alléger la notation et d'écourter certains arguments itératifs, on posera $A = \{x, y, z\}$ sans perte de généralité.

La condition nécessaire de non-détournabilité est :

LEMME 1 : Si F est non-détournable on a :

$$\langle x = F(P°),\ I_x(P°) = I,\ J \subset \bar{I},\ P°' \overset{J}{\longleftrightarrow} P° \rangle \Longrightarrow \langle x = F(P°') \rangle$$

Démonstration:

Pour tout $i \in J$ on a $y \underset{P_i^°}{\gtrsim} x$ et $z \underset{P_i^°}{\gtrsim} x$ (x est classé dernier) par construction de $I_x(P°)$. Posons $P^* = P°$; il est clair que si $x \neq F(P°')$, tout P°' accessible de P° à J est préférable à P° pour J ; P^* ne peut être un équilibre fort ; donc $x = F(P°')$.

CQFD

Dans la situation décrite dans ce lemme, il apparaît que les électeurs de I, en votant conformément à la restriction $P_I^°$ de P° peuvent imposer x comme vainqueur quelque soit le choix des autres électeurs. Ceci suggère la définition :

DEFINITION 10 : Une coalition $I \subset N$ est dite "déterminante pour x" ($x \in A$) si et seulement s'il existe P° tel que $F(P°) = x$ et $I_x(P°) = I$. [1]

Considérons alors les familles L_x, L_y, L_z de coalitions déterminantes pour x, y et z. La condition I garantit qu'aucune des trois n'est vide. Ces familles possèdent les propriétés suivantes :

PROPRIETE P1 : $\langle I \in L_x,\ I' \supset I \rangle \Longrightarrow \langle I' \in L_x \rangle$ (resp. L_y, L_z.)

---

[1] Bien qu'analogue, la notion de "coalition déterminante" est différente de celle de "coalition décisive" d'Arrow ou de "majorité" de Guilbaud.

Cette propriété découle directement du lemme 1 . Puisque $I \in L_x$, il existe $P°$ tel que $F(P°) = x$ et $I_x(P°) = I$. La coalition $I'-I$ [1] est incluse dans $\bar{I}$: en modifiant les choix de $I'-I$ pour obtenir $P°'$ de telle sorte que $I_x(P°') = I \cup (I'-I)$, c'est-à-dire I', x doit rester vainqueur d'après le lemme 1 et I' est déterminante pour x.

COFD

PROPRIETE P2 : $\emptyset \notin L_x$

Si $\emptyset \in L_x$, par définition de L_x il existe un profil $P°$ tel que $F(P°) = x$ et $I_x = \emptyset$, c'est-à-dire où tous les électeurs classent x en dernier. Faisons $P^* = P°$; mais d'après la condition I, il existe $P°'$ tel que y soit vainqueur et qui est donc préféré à $P°$ par N. P^* ne peut donc être un équilibre.

COFD

PROPRIETE P3 : Si F est non-détournable :

$$\langle I_1 \in L_x,\ I_2 \in L_y,\ I_3 \in L_z \rangle \Rightarrow \langle I_1 \cap I_2 \cap I_3 \neq \emptyset \rangle$$

Considérons d'abord $I_1 \in L_x$ et $I_2 \in L_y$. On montre que $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$: par contradiction si I_1 et I_2 sont disjointes, on peut former une partition de N en deux coalitions I_1' et I_2' contenant respectivement I_1 et I_2 et déterminantes respectivement pour x et y d'après P1 . Considérons alors le profil $P°$ soit tel que $P_i° = xyz$ pour tout i de I_1' et $P_i° = yxz$ pour tout i de I_2'. Supposons que $P^* = P°$; trois cas peuvent se produire selon que x, y ou z est vainqueur : (i) si c'est x, I_2' peut imposer y par un vote non-sincère; (ii) si c'est y, I_1' peut imposer x ;(iii) enfin si c'est z, soit I_1' impose x soit I_2' impose y. Dans les trois cas, P n'est donc pas un équilibre. Il s'ensuit que $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$.

Introduisons à présent $I_3 \in L_z$ et supposons, par contradiction, que I_3 n'ait pas d'intersection commune avec $I_1 \cap I_2$. I_3 est donc dans $\overline{I_1 \cap I_2}$. Il s'ensuit, d'après P1, que $\overline{I_1 \cap I_2}$ appartient à L_z. Constituons alors le profil $P°$ suivant et posons $P° = P^*$:

- Pour I_1, x est classé avant y
- Pour I_2, y est classé avant z
  (Donc pour $I_1 \cap I_2$, x est classé avant z par transitivité.)
- Pour $\overline{I_1 \cap I_2}$, z est classé avant x.

---

[1] On note $(I'-I)$ l'ensemble $\bar{I} \cap I'$.

La figure suivante illustre ce profil.

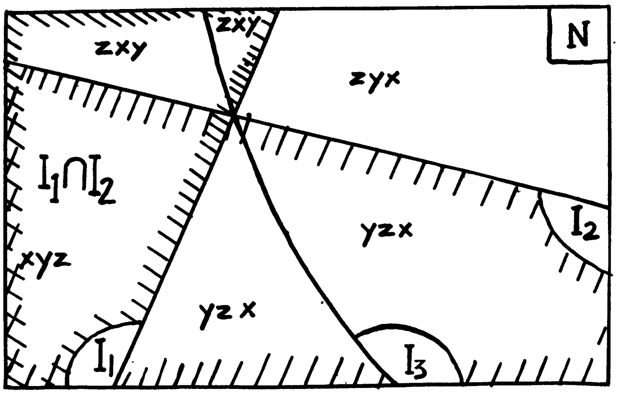

Figure 1

(i) Si x est vainqueur, $\overline{I_1 \cap I_2}$ qui prèfère z est déterminante pour z.
(ii) Si y est vainqueur, I_1 qui préfère x est déterminante pour x.
(iii) Si z est vainqueur, I_2 qui préfère y est déterminante pour y.

P^* ne peut donc être un équilibre et F est détournable. Donc l'intersection de $I_1 \cap I_2$ avec I_3 n'est pas vide. Il s'ensuit que chaque fois que l'on prend trois coalitions, une dans chaque famille L_x, L_y et L_z, elles ont une intersection commune. Il existe donc une coalition D qui est contenue dans toute coalition de n'importe laquelle des trois familles. D'après P1, on voit que forcément $L_x = L_y = L_z = L$. Il est évident que D appartient elle-même à L. Il reste à montrer qu'elle ne comprend qu'un électeur mais d'abord, on déduit immédiatement de P3 :

PROPRIETE P4 : $\underline{I \in L \Leftrightarrow \overline{I} \notin L}$

En effet, on a montré (pour P3) que deux coalitions déterminantes ont une intersection commune. D'autre part, l'une des deux, I ou $\overline{I}$, est nécessairement déterminante.

C.Q.F.D.

Les propriétés P1, P2, P3 et P4 caractérisent un ultra-filtre ; on sait qu'un ultra-filtre contient un sous-ensemble formé d'un élément unique $\{d\}$. (Un moyen rapide de l'établir est l'argument suivant de Guilbaut[6] : si la coalition commune D contient plus d'un électeur, on la partitionne en D1 et D2 non vides ; si D1 $\notin$ L, $\overline{D1}$ y appartient mais $D \cap \overline{D1}$, c'est à dire D2 y appartient aussi par P3. En partitionnant à nouveau D2, on arrive à un électeur unique d). Il est clair que si $F(P°) \neq \text{Max } P°_d$, d peut renverser P° par définition de L. Donc F est dictatoriale et le théorème 1 est ainsi démontré.

III. EXISTENCE ET NATURE DES PROCEDURES NON-DETOURNABLES DE TYPE I.

THEOREME 2 : Toute procédure non-détournable de type I est dictatoriale ou ne vérifie pas la condition I.

Le même cheminement est adopté ; au lieu de $I_x(P°)$, la coalition qui ne classe pas x en dernier dans P°, on introduit :

$$I^x(P°) = I_{yx}(P°) \cup I_{zx}(P°)$$

la coalition qui ne classe pas x en premier dans P°. La coalition complémentaire classe donc x en premier. La condition de non-détournabilité devient :

LEMME 1' : Si F est non-détournable :

$$\langle F(P°) \neq x,\ I^x(P°) = I,\ i \in \bar{I},\ P°' \overset{i}{\longleftrightarrow} P° \rangle \Longrightarrow \langle F(P°') \neq x \rangle$$

La démonstration est analogue à celle du lemme 1. En répétant ce lemme avec à chaque fois $I^x(P°) = I \cup \{i\}$, $i \in \bar{I}$, on aboutit à la conclusion que $F(P°') \neq x$ pour tout $J \subset \bar{I}$. Autrement dit, pour tout profil P°' tel que $P^{°'}_I = P^°_I$, x ne peut être vainqueur. On dira que la coalition I est "éliminante pour x". Soit E_x, E_y, E_z les coalitions éliminantes pour x, y et z. Les propriétés P1 et P2 sont démontrées au moyen des mêmes arguments qu'auparavant. Pour P3, on considère le profil de la figure 1 : si $I_1 \cap I_2 \cap I_3 \neq \emptyset$, ni x, ni y, ni z ne pourraient être vainqueurs sous peine de détournabilité. P4 se déduit facilement. L'élément dictatorial d peut donc éliminer n'importe quelle alternative et la procédure est détournable si $F(P°) \neq \text{Max } P^°_d$. Donc F doit être dictatoriale.

COFD

IV. COMMENTAIRES ET CONCLUSION.

On n'oubliera pas que le résultat énoncé, sous la condition I, vaut aussi pour n = 1 ou n = 2 et qu'il ne s'applique qu'aux procédures concrètes ne faisant pas intervenir le hasard pour départager les ex-aequos. L'analyse de ces dernières est plus délicate car il convient de distinguer une série de cas différents. En général, les règles de vote faisant intervenir le hasard, même si ce n'est que pour le départage des ex-aequos dans quelques cas, peuvent être non-détournables (Il suffit de considérer par exemple un vote à la majorité sur chaque paire d'alternative et, en cas d'effet Condorcet, de choisir un vainqueur au hasard).

On a exclu les cas d'indifférence dans les préférences des électeurs: leur introduction ne soulève que quelques problèmes techniques. Satterthwaite [10] a étendu le résultat à ces situations.

On notera la nature particulière des coalitions que nous avons considérées : alors que les coalitions décisives d'Arrow ou les familles de majorité chez Guilbaut concernent des paires d'éléments de A, celles-ci se réfèrent à un élément de A.

De plus, dans le cas de non-détournabilité de type II, ces coalitions ont la propriété d'imposer l'élément qui leur est associé comme vainqueur. Dans le cas du type I, elles conduisent au contraire à l'écarter. Cette différence s'explique intuitivement par l'interdiction qui est faite aux coalitions de se former dans le second cas : à défaut de pouvoir ainsi "imposer" un vainqueur, on peut chercher à "écarter" un autre élément.

On remarque que le fait que x soit vainqueur ou écarté ne dépend que de sa relation, dans les opinions exprimées, aux autres éléments de A. Cela ne dépend pas par exemple de la coalition qui exprime y avant z. C'est là la traduction au cas des procédures de scrutin, de la condition d'indépendance d'Arrow bien que, ne portant pas sur le même objet mathématique, ces deux conditions ne puissent être reliées aisément.

De même la propriété qui veut que toute coalition contenant une coalition appartenant à L appartient aussi à L, peut être considérée comme la traduction de la condition de monotonie d'Arrow.

Ainsi, on peut interpréter les conditions d'indépendance et de monotonie d'abord comme des conditions suffisantes de non-détournabilité mais aussi et surtout, hormis le cas d'imposition, comme une expression particulière des conditions nécessaires de non-détournabilité. Il apparaît donc que, malgré l'affirmation reproduite au début de cet article, la principale justification que l'on puisse donner des conditions d'Arrow fait référence au problème des stratégies de vote.

Quelle est la portée de ce nouveau résultat pour la théorie de l'agrégation ? On peut y voir un intérêt du point de vue de la Science Politique : Si aucune procédure de scrutin ne peut garantir le vote sincère, l'image un peu mythique de la démocratie où chacun vient en son âme et conscience et sans se laisser influencer, dire ses préférences dans l'isoloir est à coup sûr à écarter à moins que l'on ait affaire à des électeurs stupides ou ignorants. Il se dégage donc un besoin d'information avant tout scrutin, d'autant plus fort que la procédure est détournable [1]. Les sondages en apportent un témoignage et il ne serait pas logiquement recommandable de les interdire car on pourrait assister à un marché noir de l'information et à des manipulations clandestines du scrutin. A ce propos il faut bien dire que l'affirmation souvent avancée par les experts eux-mêmes que les sondages n'influencent pas vraiment l'opinion est pour le moins curieuse puisque tout ce qui vient d'être dit tend au contraire à montrer quel parti peut en tirer l'électeur rationnel.

Du point de vue de la science économique, l'intérêt est peut être de nature méthodologique : Dans le "Credo libéral classique", au début sont les préférences, inaltérables et personnelles et les processus de production et d'échange réalisent une sorte d'agrégation harmonieuse de celles-ci. Si l'on peut montrer, au moins dans une classe de problèmes, que l'on ne peut empêcher ces préférences d'être affectées lors de la mise en oeuvre du mécanisme de décision collective, une bonne partie de l'édifice est peut être à repenser.

---

[1] Du point de vue politique, on peut se demander si les procédures les plus détournables n'assurent pas souvent une meilleure stabilité "politique", de l'issue du scrutin : On sait que l'inconvénient de la "proportionnelle" est de ne pas permettre la formation directe de majorité.

ANNEXE

Farquharson [3] fait remonter à Pline le Jeune, l'intérêt porté à la question du vote stratégique et reproduit dans son ouvrage la lettre de ce dernier à Titus Aristote à propos d'un vote à trois issues devant le sénat de Rome. On connaît mieux les travaux de Borda et de Condorcet qui ont inspiré Arrow sans que celui-ci y ait fait directement référence ainsi que le souligne Guilbaut [6]. Or il semble que le débat entre eux portait sur la question du vote stratégique essentiellement. Condorcet, par sa méthode de scrutin binaire à la majorité veut représenter les opinions de manière correcte alors que la méthode de Borda n'exclut pas la "ruse" (c'est pourquoi Borda réplique : "Ma méthode est faite pour les honnêtes gens" ! [1]).

Dans la période récente, c'est Farquharson [3] qui fait le premier travail de fond sur le vote stratégique. Dans un autre article, en compagnie de Dummet [4], il établit pour la première fois le résultat que pour toute une classe de scrutin dit "à la majorité", les manipulations ne peuvent être évitées.

Murakami [7], Sen [11] et Pattanaik [8] et [9] ont abondamment discuté les relations qui existent entre la stabilité du vote sincère et les propriétés de la procédure telles que binarité, monotonie, anonymat (le poids de chaque électeur est le même), sans jamais réussir cependant à apporter un résultat décisif.

Il revient à Gibbard [5] et à Satterthwaite [10], indépendamment, d'avoir fourni un théorème général qui établit le caractère dictatorial de toute procédure non-détournable [2]. Gibbard s'est inspiré au départ de Farquharson et Dummet [4]. Sa preuve consiste à associer à chaque procédure de scrutin une "Social Welfare Function" (dont l'ensemble image est un préordre sur A) et à montrer que celle-ci remplit les conditions arrowiennes de monotonie, indépendance et non-imposition et est donc dictatoriale. Il en déduit ensuite le caractère dictatorial de la procédure de scrutin associé. Il s'agit donc d'une preuve indirecte en quelque sorte.

---

[1] rapporté par D. Black [2].
[2] "non-manipulable" pour Gibbard et "Strategy-proof" pour Satterthwaite.

Satterthwaite fournit une preuve constructive par récurrence sur N dont les étapes sont assez compliquées. Il généralise le résultat au cas où l'indifférence est admise dans les opinions. Il propose aussi une preuve indirecte similaire à celle de Gibbard. Enfin il établit une forme d'équivalence entre non-détournabilité et les conditions "indépendance" et "Pareto" d'Arrow mais qui s'interprète assez difficilement. En fait nous pensons que la relation avec le Théorème d'Arrow se fait mieux en considérant les deux conditions d'indépendance et de monotonie : Elles se rattachent directement aux deux implications de la non-détournabilité : (i) l'existence d'une famille fixe de coalitions déterminantes pour chaque élément de A et (ii) le fait qu'une coalition déterminante ne soit jamais contenue dans une qui ne l'est pas.

Finalement, il reste une question à explorer dans ce champ de recherches et à laquelle Pattanaïk [9] fait allusion : celle de la fréquence, pour une procédure donnée, des situations pour lesquelles le vote sincère n'est pas une situation d'équilibre. Ceci devrait conduire à une typologie des procédures de scrutin fondée sur leur degré de manipulabilité.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARROW K.J., Social choices and individual values, Cowles Foundation monograph, New Haven and London, Yale University Press, 1963. (second edition).

[2] BLACK D., The theory of elections and committees, Cambridge, Cambridge University Press, 1956.

[3] FARQUHARSON R., Theory of voting, New Haven, Yale University Press, 1969.

[4] FARQUHARSON R. et DUMMET M., "Stability in voting", Econometrica, 29, (1961), 33-43.

[5] GIBBARD A.. "Manipulation of voting schemes : a general result", Econometrica, 41, (1973), 587-601.

[6] GUILBAUD G.Th., "Les théories de l'intérêt général et le problème de l'agrégation", Rev.econ.appliquée, 5, (1951), 501-84. Ré-imprimé dans : Eléments de la théorie mathématique des jeux, Paris, Dunod, 1968.

[7] MURAKAMI Y., Logic and social choices, New-York, Dover Publications Inc. 1968.

[8] PATTANAIK P.K., "On the stability of sincere voting", Jour.of Econ. Theory, 6, (1973), 558-574.

[9] PATTANAIK P.K., "Strategic voting without collusion under binary and democratic decision rules", Rev.of econ.studies, 52, (1975), 93-103.

[10] SATTERTHWAITE M. A., "Strategy-proofness and Arrow's conditions ; existence and correspondance theorems for voting social welfare functions." J. of econ. theory, 10, (1975), pp 187-216.

[11] SEN A.K., Collective choice and Social welfare, London, Oliver & Boyd, 1970.

* * *