MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

M. CHEIN

Une remarque sur l'algorithme de Ducamp pour la recherche de tous les ordres totaux contenant un ordre partiel

Mathématiques et sciences humaines, tome 51 (1975), p. 47-50
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1975__51__47_0>

Math. Sci. hum. (*13*^{e} année, n°51, *1975*, p.47-50)

UNE REMARQUE SUR L'ALGORITHME DE DUCAMP POUR LA RECHERCHE DE TOUS LES ORDRES TOTAUX CONTENANT UN ORDRE PARTIEL

M. CHEIN*

A. Ducamp a proposé dans [D] un algorithme permettant d'obtenir tous les ordres totaux, sur un ensemble fini X, contenant un ordre partiel U sur X. Nous montrons ici que cet algorithme ne s'applique pas pour certains ordres. Ce sont les ordres dont le graphe de Hasse est un multiparti complet ayant au plus deux sommets de même rang (et au moins un rang avec deux sommets). Cependant on peut déterminer facilement pour ces ordres l'ensemble des ordres totaux qui le contiennent.

1. ALGORITHME DE DUCAMP

Nous rappelons dans ce paragraphe des résultats de [D].
Soit $G = (X,U)$ le graphe d'un ordre strict et $G_0 = (X,U_0)$ le graphe de Hasse associé **. Le graphe d'incomparabilité associé à G est le graphe $G_I = (X,I)$ défini par :

$$(x,y) \in I \iff (x,y) \notin U \quad \text{et} \quad (y,x) \notin U$$

ainsi G_I est un graphe symétrique.

Si $\mathfrak{D}$ est l'ensemble des graphes partiels antisymétriques maximaux de G_I, l'ensemble Ω des ordres totaux plus grands que G est égal à l'ensemble des graphes sans circuit $G + D$ où $D \in \mathfrak{D}$.

Pour déterminer ces graphes, Ducamp procède de la manière suivante :
Il choisit $(X,D_0) \in \mathfrak{D}$ et associe à chaque arc u_i, $i = 1,2,\ldots,m$, de D_0, une variable booléenne a_i. On a ainsi une bijection entre l'ensemble $\mathfrak{D}$

* Institut de Programmation - Université Paris-VI

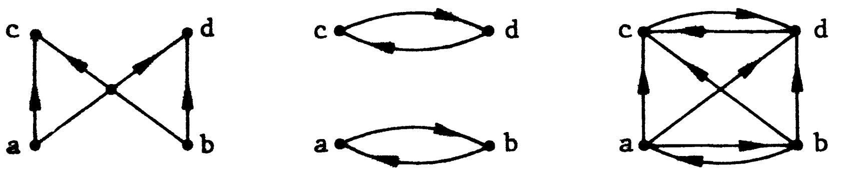
** c'est-à-dire le graphe de la relation de couverture associée à l'ordre.

et l'ensemble de m-uplets booléens ($u_i \in D \Longleftrightarrow a_i = 1$).
Il cherche ensuite tous les circuits de longueur 3 de $(X,U + I)$, soient $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_k$ ces circuits. Comme il est immédiat de vérifier que tout circuit de $(X,U + I)$ contient au moins deux arcs de I, on peut associer à σ_i le monôme booléen m_i produit des variables associés aux arcs de $I \cap \sigma_i$. La variable est sous forme directe si l'arc est dans D_0, sous forme complémentée autrement.
A chacune des solutions de l'équation booléenne :

$$(1) \qquad \bigvee_{i=1}^{k} m_i = 0 ,$$

correspond un graphe de Ω mais, contrairement à ce qu'affirme Ducamp, la réciproque est fausse. En effet, il est impossible d'obtenir une équation telle que (1) pour certains graphes.

<u>Exemple</u> :



$G=(X,U)$ $\qquad$ $G_I=(X,I)$ $\qquad$ $G + G_I$

$G + G_I$ n'a aucun circuit de longueur 3, on ne peut donc pas lui associer une équation telle que (1) et Ω n'est jamais vide.

2. ETUDE DES CAS DEFECTUEUX

L'algorithme de Ducamp ne donnera donc aucun résultat exclusivement dans le cas où G est tel que : $G + G_I$ soit sans circuit de longueur $\geqslant 3$.
Il est très facile de caractériser ces graphes. Rappelons comment on obtient la partition fondamentale associée à un graphe sans circuit $G = (X,U)$. ([R], T.1, p.328). $S(G)$ représente l'ensemble des sources de G c'est-à-dire : $S(G) = \{x \in X \mid \forall\, y \in X, (y,x) \notin U\}$. Si $Y \subset X$ on note $G(X - Y)$ le sous-graphe de G engendré par $X - Y$, on pose alors :

$$X(0) = S(G) \;;\; X(1) = S(G(X - X(0))) \;;\; \ldots$$
$$X(i) = S(G(X - \bigcup_{j<i} X(j))) \;;\; \ldots$$

On notera $X(\rho)$ la dernière partie non vide. Deux sommets sont dits de même rang i s'ils appartiennent à $X(i)$. Il est immédiat de vérifier que

$\{X(0), X(1), \ldots, X(\rho)\}$ est une partition de X et que X(i) est un stable de G.

Si G = (X,U) est un graphe sans circuit tel que :

$$U = \bigcup_{i=0}^{\rho-1} X(i) \times X(i+1) ,$$

G est dit multiparti complet.

PROPRIETE 1

Si G est le graphe d'un ordre, G_0 son graphe de Hasse et G_I son graphe d'incomparabilité alors $G + G_I$ n'a aucun circuit de longueur ≥ 3 si et seulement si G_0 est un multiparti complet ayant au plus deux sommets de même rang.

Notons $\{X(0), X(1), \ldots, X(\rho)\}$ la partition fondamentale des sommets de G_0. Si G_0 est un multiparti complet avec $|X(i)| \leqslant 2$, $i = 0, \ldots, \rho$, alors dans $G + G_I$ on n'a pas d'arc (x,y) avec $x \in X(i)$, $y \in X(j)$ et $i > j$. Donc les sommets d'un circuit quelconque de $G + G_I$ sont dans une même classe X(i), il y en a donc au plus 2.
Réciproquement, supposons que $G + G_I$ n'ait pas de circuit de longueur ≥ 3 alors $|X(i)| \leqslant 2$, car G_I contient le graphe complet symétrique ayant X(i) pour ensemble de sommets, ceci quel que soit $i = 0, 1, \ldots, \rho$.
De plus, supposons que $x \in X(i)$, $y \in X(i+1)$, $(x,y) \notin U(G_0)$. (y,x) ne pouvant être dans $U(G_0)$ c'est que (x,y) et (y,x) sont des arcs de G_I.
Or, on a un sommet $z \in X(i)$, avec $(z,y) \in U(G_0)$ on a donc un circuit de longueur 3 dans $G + G_I$: (x z y x).
Cette remarque n'affaiblit pas l'intérêt de l'algorithme de Ducamp car si G_0 est un multiparti complet dans tout ordre total τ contenant G on devra avoir $x \,\tau\, y$, $\forall x \in X(i)$ $\forall y \in X(i+1)$. Comme les X(i) sont des stables, on peut mettre les sommets de même rang dans n'importe quel ordre, ainsi :

PROPRIETE 2

Si G est le graphe d'un ordre ayant pour graphe de Hasse G_0 un multiparti complet de partition fondamentale X(0), X(1), ..., X(ρ), G a

$$\sum_{i=0}^{\rho} |X(i)| \, !$$ ordres totaux qui le contiennent et qui sont obtenus en

prenant dans un ordre total quelconque les sommets de X(0), puis ceux de X(1), ..., jusqu'à ceux de X(ρ).

De plus, si l'on s'intéresse exclusivement à la détermination de la dimension d'un ordre dont le graphe de Hasse est un multiparti complet il est inutile d'utiliser la propriété 2, car un tel graphe est de dimension ≤ 2. En effet, considérons un ordre total τ plus grand que G la propriété 2 entraîne que cet ordre peut s'écrire $\tau = \tau_0\ \tau_1,\ldots,\tau_\rho$, où τ_i est un ordre total sur X(i). Si nous considérons $\tau' = \tilde{\tau}_0\ \tilde{\tau}_1,\ldots,\tilde{\tau}_\rho$, où $\tilde{\tau}_i$ est l'ordre dual de τ_i, τ' est un ordre total plus grand que G et $G = \tau \cap \tau'$.

BIBLIOGRAPHIE

[D] DUCAMP A., "Sur la dimension d'un ordre partiel", Congrès Int. sur les graphes, Rome 1966, Paris, Dunod, pp.103-112.

[R] ROY B., Algèbre moderne et théorie des graphes, Paris, Dunod, 1969.