MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

J. HARDOUIN DUPARC

Quelques résultats sur « l'indice de transitivité » de certains tournois

Mathématiques et sciences humaines, tome 51 (1975), p. 35-40
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1975__51__35_0>

Math. Sci. hum. (*13*[e] année, n°51, *1975*, p.35-41)

QUELQUES RESULTATS SUR "L'INDICE DE TRANSITIVITE" DE CERTAINS TOURNOIS

J. HARDOUIN DUPARC*

Nous rappellerons, d'abord, brièvement les principales définitions et propriétés des tournois ; pour plus de détails et la justification de certaines propriétés, non démontrées ici, le lecteur pourra se reporter à l'article de J.C. Bermond [1] paru dans le numéro 37 de cette revue ; voir également [2,3].

0. QUELQUES DEFINITIONS

0.1. Tournoi

Un tournoi est un 1-graphe orienté complet antisymétrique, nous désignerons par T_n un tournoi à n sommets.

0.2. Score, Antiscore

Le score d'un sommet x (ou demi degré extérieur) est égal au nombre de sommets y tel qu'il existe un arc allant de x à y ; son antiscore (ou demi degré intérieur) est égal au nombre de sommets y tel qu'il existe un arc allant de y à x.

0.3. Indice de transitivité d'un tournoi

L'indice de transitivité d'un tournoi, introduit, entre autres, par Slater [5] est le nombre minimal d'arcs qu'il faut inverser pour rendre ce tournoi transitif, nous le désignerons par $i(T_n)$; c'est aussi le nombre minimum d'arcs qu'il faut supprimer pour obtenir un graphe sans circuits.

* U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique de l'Université de Bordeaux I.

0.4. f(n)

Nous appellerons f(n) le maximum de l'indice de transitivité sur l'ensemble des tournois T_n à n sommets.

0.5. Ordre associé

Nous appellerons ordre associé, un ordre sur les sommets du tournoi T_n tel que, dans la représentation du graphe par sa matrice d'incidence, la somme des 1 subdiagonaux soit égale à l'indice, c'est aussi l'ordre total d'un tournoi transitif à distance minimum du tournoi T_n ; la distance entre 2 tournois T_n et T'_n étant définie par le nombre de couples (x,y) tel que (x,y) soit arc de T_n et (y,x) arc de T'_n.

0.6. Tournoi maximal

T_n est dit maximal si $i(T_n) = f(n)$.

0.7. Tournois réguliers et quasi-réguliers

Pour n impair, T_n sera dit régulier si tous les sommets ont un score égal à $\frac{n-1}{2}$; pour n pair, T_n sera dit quasi-régulier si $\frac{n}{2}$ sommets ont un score égal à $\frac{n}{2}$ et les autres un score égal à $\frac{n}{2} - 1$.

1. QUELQUES PROPRIETES

1.1. Propriété 1

Pour tout sommet d'un tournoi T_n la somme du score et de l'antiscore est égale à n-1.

1.2.1. Propriété 2

Les tournois réguliers tournoient ; c'est-à-dire que la somme des éléments subdiagonaux de la matrice d'incidence reste inchangée par permutation circulaire sur les sommets (même si l'ordre choisi n'est pas un ordre associé).

1.2.2. Démonstration

En effet, si nous considérons le sommet classé premier, sa contribution à la somme subdiagonale est égale à son antiscore soit $\frac{n-1}{2}$, s'il passe en dernière position, sa nouvelle contribution sera égale à son score soit $\frac{n-1}{2}$ encore, et la somme n'est pas modifiée.

1.3.1. Propriété 3

Si $n = 2p+1$ et si $f(n) = f(n-1)+p$, alors tout T_n maximal est régulier et il existe des T_{n-1} maximaux quasi-réguliers.

1.3.2.1. Réciproque

Si $n = 2p+1$, l'existence d'un tournoi T_{n-1} maximal quasi-régulier implique l'existence d'un tournoi T_n maximal d'indice $f(n-1) + p$.

1.3.2.2. Démonstration

En effet nous pouvons compléter le T_{n-1} quasi-régulier en un T_n régulier, si ce dernier possède un indice strictement inférieur à $f(n-1) + p$ il est possible de trouver un ordre associé, puis d'appliquer la propriété 2 pour amener, dans cet ordre, le sommet ajouté en dernière position ; son score étant égal à p, en le retirant, serait mis en évidence, pour T_{n-1}, un ordre associé d'indice strictement inférieur à $f(n-1)$.

1.4. Propriété 4

Le changement d'orientation de tous les arcs conserve l'indice.

1.5. Propriété 5

Soit une partition des sommets de T_n en 2 ensembles P et Q tel que $|P| = p$ et $|Q| = q = n-p$, soit m la somme des scores des sommets de P dans T_n et soit T_p et T_q les sous-tournois engendrés par P et Q alors :

$$i(T_n) \leqslant i(T_p) + i(T_q) + \min\left(m - \frac{p(p-1)}{2}\ ,\ pq - m + \frac{p(p-1)}{2}\right)$$

2. RESULTATS

2.1. Ensembles des tournois maximaux pour n = 8,9,10,11

Nous avons déterminé par le calcul tous les tournois maximaux, non isomorphes, à 8 et 9 sommets ; il en existe respectivement 66 et 8. L'annexe A donne les 8 T_9 maximaux, on peut en extraire 44 T_8 quasi-réguliers maximaux, nous n'en donnons pas la liste. L'annexe B donne 11 T_8 maximaux non quasi-réguliers, il en existe 11 autres, non isomorphes, déduits par application de la propriété 4.

Pour $n = 10$, sachant que $f(10) = 15$, nous allons montrer d'abord qu'il n'existe pas de tournoi maximal non quasi-régulier (propriété connue pour $n = 2$ et 6).

Grâce à la propriété 4 nous pouvons supposer qu'il existe un sommet de score 3 au moins.

. 1er cas : Il existe un sommet de score 3 et un sommet de score 6 (donc d'antiscore 3) ; en enlevant ces deux sommets il reste un tournoi T_8 d'indice au plus égal à 8 et nous avons : $i(T_{10}) \leqslant 8 + 3 + 3 = 14$.

. 2ème cas : Il existe deux sommets de score 3 ; en prenant pour P l'ensemble de ces deux sommets et en appliquant la propriété 5 nous obtenons $i(T_{10}) \leqslant 8 + 0 + 5 = 13$.

. 3ème cas : La liste des scores est : (5,5,5,5,5,5,4,4,4,3) ; la propriété 5 appliquée avec P : ensemble des 6 sommets de score 5 donne : $i(T_{10}) \leqslant 4 + 1 + 9 = 14$.

Pour les tournois quasi-réguliers en appliquant la propriété 5 avec P : ensemble des 5 sommets de score 5 nous obtenons : $i(T_{10}) \leqslant i(T_p) + i(T_q) + 10$ ce qui implique $i(T_p) + i(T_q) \geqslant 5$, comme $f(5) = 3$ et par application de la propriété 4 nous devons envisager les cas suivants : $i(T_p) = 3$, $i(T_q) = 2$ et $i(T_p) = i(T_q) = 3$; dans le premier cas l'étude exhaustive des T_5 d'indice 2 montre qu'il existe toujours un ordre associé tel que le premier sommet ait un score égal à 3, en prenant alors la partition définie par $P' = P \cup \{x = \text{premier sommet classé de } Q\}$ le score de x dans P' est égal à 1 donc P' n'est pas quasi-régulier et nous obtenons : $i(T_{10}) \leqslant 3 + 1 + 10 = 14$; si T_p et T_q sont maximaux, l'application de la propriété 2 ramène l'étude exhaustive à deux T_{10} seulement, le premier est l'unique T_{10} maximal qui est donné en annexe C et possède 220 ordres associés correspondant à 44 matrices d'incidence distinctes, l'autre est d'indice 13 et possède la propriété de n'avoir qu'un seul ordre associé.

Ce résultat entraîne qu'il n'existe qu'un seul tournoi T_{11} maximal d'indice 20.

2.2. THEOREME $f(12) = 22$; $f(13) = 28$.

Nous avons réussi à construire un T_{12} quasi-régulier d'indice 22 d'où l'on déduit le T_{13} régulier d'indice 28 donné en annexe D, il possède 5148 ordres associés correspondants à 1716 matrices d'incidence distinctes. Le tournoi obtenu en appliquant la propriété 4 ne lui est pas isomorphe ; ainsi nous connaissons 2 tournois maximaux pour n = 13.

2.3.1.1. LEMME

Tout T_7 non maximal contient au moins un T_6 non maximal.

2.3.1.2. Démonstration

Montrons le dans le cas $i(T_7) = 6$; étant donné un ordre associé :

. si le score du dernier sommet classé est égal à 3, en le supprimant il reste un T_6 d'indice 3,

. sinon en supprimant un sommet dominé par le dernier, il reste un T_6 non quasi-régulier donc non maximal.

2.3.2.1. THEOREME $f(14) \leqslant 32$

. <u>1er cas</u> : T_{14} non quasi-régulier. Grâce à la propriété 4 et en choisissant pour P l'ensemble des 8 sommets de plus grand score on obtient alors par application de la propriété 5 : $i(T_{14}) \leqslant 8 + 4 + 20 = 32$.

. <u>2ème cas</u> : T_{14} quasi-régulier. Prenons pour P l'ensemble des 7 sommets de score 6. Supposons d'abord que P (ou Q par application de la propriété 4) soit non maximal, alors nous pouvons extraire, d'après le Lemme, un $P' \subset P$ de cardinal 6 et d'indice au plus 3 d'où $i(T_{14}) \leqslant 3 + 8 + 21 = 32$; sinon $i(T_p) = i(T_q) = f(7) = 7$, on peut alors choisir pour Q un ordre associé tel que les trois premiers sommets classés (soit x_1, x_2, x_3) forment un sous-tournoi transitif ; une étude exhaustive du sous-tournoi T_{10} engendré par $P' = P \cup x_1 \cup x_2 \cup x_3$ pour chacun des deux tournois T_7 maximaux non isomorphes (étude facilitée par le fait que ces tournois possèdent respectivement 21 et 42 ordres associés) montre que ce T_{10} a un indice majoré pour 13 d'où : $i(T_{14}) \leqslant 13 + 1 + 18 = 32$.

2.3.2.3. <u>Corollaire</u> $f(15) \leqslant 39$

2.3.3. THEOREME

$f(14) \geqslant 31$; $f(15) \geqslant 38$. <u>Le tournoi donné en annexe</u> E <u>établit le résultat</u>.

2.4.1. THEOREME

$f(18) \leqslant 58$; $f(19) \leqslant 67$.

2.4.2. <u>Démonstration</u>

En s'appuyant sur le lemme 2.3.1.1. on peut montrer facilement que tout T_9 contient au moins un T_6 non maximal ; en prenant pour P l'ensemble des 6 sommets formant le T_6 on obtient : $i(T_{18}) \leqslant 22 + 3 + 33 = 58$.

2.5.1. LEMME

<u>Tout</u> T_{10} <u>contient au moins un</u> T_8 <u>non maximal</u>.

2.5.2. <u>Démonstration</u>

. <u>1er cas</u> : T_{10} est non quasi-régulier ; alors on peut considérer qu'il existe au moins un sommet x de score 3 et en supprimant 2 sommets dominés par x il reste un T_8 dont un sommet à un score de 1.

. <u>2ème cas</u> : T_{10} est quasi-régulier non maximal ; les scores des deux derniers sommets dans un ordre associé sont égaux à 4 et l'indice du tournoi engendré par les huit autres est égal à $14 - 7 = 7$.

. 3ème cas : T_{10} maximal ; on vérifie directement qu'il existe un T_8 d'indice 7.

2.5.3. THEOREME

$f(20) \leqslant 73$; $f(21) \leqslant 83$; $f(22) \leqslant 91$; $f(23) \leqslant 102$. <u>Ces résultats se déduisent immédiatement du lemme 2.5. par application de la propriété</u> 5.

3. PROBLEME OUVERT

Nous pensons qu'il serait intéressant de définir une nouvelle fonction plus utile dans la pratique que la fonction f(n).

Nous proposons donc h(n) : maximum des indices des tournois appartenant au sous-ensemble H(n) des tournois pour lesquels il n'existe qu'un seul ordre associé sur les sommets.

Nous donnons en annexe F deux tournois, l'un appartenant à H(11) et d'indice 17, l'autre appartenant à H(12) et d'indice 20.

Une idée analogue, pour une autre grandeur que l'indice de Slater est envisagée par Moon [4].

4. CONCLUSION

Donnons un tableau groupant les résultats connus actuellement pour n $\leqslant$ 23 en soulignant ceux que nous avons établis.

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
nf (f)	1	1	3	4	7	8	12	15	20	$\underline{22}$	$\underline{28}$	$\underline{31}$	$\underline{38}$	40	47	55	64	64	70	73	84
sup (f)	1	1	3	4	7	8	12	15	20	22	28	$\underline{32}$	$\underline{39}$	44	52	$\underline{58}$	$\underline{67}$	$\underline{73}$	$\underline{83}$	$\underline{91}$	$\underline{102}$
Nombre de tournois maximaux non isomorphes	1	3	1	4	2	$\underline{66}$	$\underline{8}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$												
inf (h)	$\underline{0}$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{3}$	$\underline{5}$	$\underline{7}$	$\underline{10}$	$\underline{13}$	$\underline{17}$	$\underline{20}$											
sup (h)	$\underline{0}$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{3}$	$\underline{5}$	$\underline{7}$	$\underline{10}$	$\underline{14}$	$\underline{18}$	$\underline{21}$	$\underline{26}$	$\underline{31}$	$\underline{37}$	$\underline{42}$	$\underline{49}$	$\underline{56}$	$\underline{64}$	$\underline{72}$	$\underline{81}$	$\underline{90}$	$\underline{100}$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERMOND J.C., "Ordres à distance minimum d'un tournoi et graphes partiels sans circuits maximaux", *Math. Sci. hum.*, n°37 (1972), 5-25.

[2] BERMOND J.C., "The circuit-hypergraph of a tournament",*Proc. Coll. Math. Soc. János Bolyai : Infinite and finite sets*, Keszthely (Hongrie 1973), 165-180.

[3] BERMOND J.C. et KODRATOFF Y., "Une heuristique pour le calcul de l'indice de transitivité d'un tournoi" (à paraître dans *R.A.I.R.O.)*.

[4] MOON J.N., *Topics on Tournaments*, New York, Holt, 1968.

[5] SLATER P., "Inconsistencies in a schedule of paired comparisons", *Biometrika*, 48 (1961), 303-312.