MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

G. KREWERAS

Dénombrements relatifs à une définition combinatoire de la continuité sur un graphe

Mathématiques et sciences humaines, tome 51 (1975), p. 13-24

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1975__51__13_0>

Math. Sci. hum. (13^e année, n°51, *1975*, p.13-24)

DENOMBREMENTS RELATIFS A UNE DEFINITION COMBINATOIRE DE LA CONTINUITE SUR UN GRAPHE

par

G. KREWERAS *

1. INTRODUCTION

Etant donné deux ensembles finis M et N, de cardinaux respectifs m et n, nous considérons M comme l'ensemble des sommets d'un graphe non-orienté G(cf.[1]). La lettre G désignera l'ensemble des *arêtes* du graphe G, dont chacune est une paire (partie de cardinal 2) de M ; la notation $\overline{G}$ désigne le graphe complémentaire (ou "dual") de G construit sur M.

Nous considérons les fonctions f définies sur M et prenant leurs valeurs dans l'ensemble $\mathcal{P}(N)$ des 2^n parties de N, et plus particulièrement les quatre ensembles de fonctions $U(G)$, $V(G)$, $W(G)$, $W'(G)$ définis respectivement par

$U(G)$: $\{a, b\} \in G \Rightarrow f(a) \cap f(b) = \phi$ (fonctions "discontinues" sur G)

$V(G)$: $\{a, b\} \in G \Rightarrow f(a) \cap f(b) \neq \phi$ (fonctions "continues" sur G)

$$W(G) = U(G) \cap V(\overline{G})$$

$$W'(G) = U(\overline{G}) \cap V(G)$$

Notre objet est de calculer le nombre de fonctions f distinctes appartenant à chacun de ces quatre ensembles ; ces nombres seront appelés $u(G)$, $v(G)$, $w(G)$, $w'(G)$.

* *Le présent travail a pu être réalisé grâce à l'appui de la Sous-commission franco-québécoise de coopération scientifique et technologique.*

2. CALCUL DE $u(G)$

Soit $f \in U(G)$, et soit $\{a,b\}$ une arête de G. Si λ désigne l'un quelconque des n éléments de N, il n'est pas permis que l'on ait à la fois $\lambda \in f(a)$ et $\lambda \in f(b)$. L'ensemble des sommets x de G tels que $\lambda \in f(x)$ est donc un ensemble "intérieurement stable" de G, c'est-à-dire un ensemble de sommets dont deux quelconques ne sont pas joints par une arête de G. Nous appellerons s_G le nombre d'ensembles intérieurement stables de G ; ce nombre est compris, pour tous les graphes G construits sur M, entre $m+1$ et 2^m (il est égal à $m+1$ pour le "graphe plein (ou complet)" puisque seule la partie vide et les m singletons y sont intérieurement stables, et à 2^m pour le "graphe vide (ou discret)" puisque toutes les parties de M y sont intérieurement stables).

Inversement si l'on fait correspondre à chacun des éléments λ de N une partie intérieurement stable P_λ de M, il suffira, pour tout x de M, de définir f par

$$f(x) = \{\lambda \mid x \in P_\lambda\},$$

pour être assuré que $f \in U(G)$

On a donc

$$u(G) = (s_G)^n.$$

En particulier si G est le graphe discret D, aucune condition n'est en fait imposée à $U(G)$, et l'on a $u(D) = 2^{mn}$. Si G est le graphe complet K, $u(K) = (m+1)^n$; c'est, si l'on veut, le nombre de suites de m parties deux à deux disjointes de N (la disjonction entre deux parties pouvant être due à ce que l'une d'elles est vide, ou même les deux).

3. CALCUL DE $w(G)$ et de $w'(G)$

La famille $W(G)$ est celle des fonctions qui sont à la fois continues sur $\overline{G}$ et discontinues sur G. On peut donc dire que la réunion des familles $W(H)$ pour $H \supset G$ (au sens de l'inclusion des ensembles d'arêtes) constitue la famille $U(G)$, d'où

$$u(G) = \sum_{H \supset G} w(H)$$

Il en résulte, par inversion de Möbius (cf.[4])

$$w(G) = \sum_{H \supset G} (-1)^{|H-G|} u(H)$$

où $|H-G|$ est l'excès du nombre d'arêtes de H sur celui de G.
Compte tenu de l'expression de $u(G)$, on a ainsi

$$w(G) = \sum_{H \supset G} (-1)^{|H-G|} (s_H)^n$$

Quant à la famille $W'(G)$, elle coïncide par définition avec la famille $W(\overline{G})$, on a donc

$$w'(G) = \sum_{\overline{H} \supset \overline{G}} (-1)^{|\overline{H}-\overline{G}|} (s_{\overline{H}})^n = \sum_{H \supset \overline{G}} (-1)^{|H-\overline{G}|} (s_H)^n .$$

La dernière de ces expressions ne diffère de la précédente que par un changement d'indice muet ($\overline{H}$ remplacé par H). Or $s_{\overline{H}}$, étant le nombre d'ensembles intérieurement stables de $\overline{H}$, n'est autre que le nombre de *cliques* de H (une clique est un sous-graphe complet de H ; la partie vide et les singletons sont ipso facto des cliques). Si l'on appelle c_H le nombre de cliques de H, on peut donc aussi écrire

$$w'(G) = \sum_{H \subset G} (-1)^{|G-H|} (c_H)^n$$

4. CALCUL DE $v(G)$

La famille $V(G)$ des fonctions continues sur G est la réunion des familles $W'(I)$ pour $I \supset G$. On a donc

$$v(G) = \sum_{I \supset G} w'(I) = \sum_{I \supset G} \left(\sum_{H \supset \overline{I}} (-1)^{|H-\overline{I}|} (s_H)^n \right)$$

$v(G)$ apparaît comme une combinaison linéaire de termes en $(s_H)^n$.
Pour H fixé, le coefficient de $(s_H)^n$ est

$$\sum_{I \supset G} \quad \sum_{\overline{I} \subset H} (-1)^{|H-\overline{I}|} = \sum_{\substack{I \supset G \\ I \supset \overline{H}}} (-1)^{|H-\overline{I}|}$$

La sommation est à effectuer pour tous les graphes $I \supset G \cup \overline{H}$, ce qui revient à $\overline{I} \subset \overline{G} \cap H = H - G$; le coefficient de $(s_H)^n$ peut donc s'écrire (en remplaçant $\overline{I}$ par J) :

$$\sum_{J \subset H-G} (-1)^{|H-J|}$$

Si H n'est pas inclus dans G, la différence $H - G$ n'est pas vide, et cette expression est égale (éventuellement au signe près) à la somme des valeurs de la fonction de Möbius de l'ensemble des parties de $H - G$; elle est donc nulle.

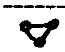
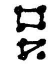
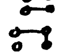
Si $H \subset G$, $H - G = \phi$ et la somme se réduit au terme unique correspondant à $J = \phi$, donc se réduit à $(-1)^{|H|}$.

On a ainsi finalement

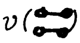
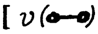
$$v(G) = \sum_{H \subset G} (-1)^{|H|} (s_H)^n$$

5. TABLEAU RECAPITULATIF POUR $m \leqslant 4$

Le tableau ci-dessous donne les valeurs des quatre fonctions u, w, w', v pour tous les types de graphes correspondant aux valeurs $m=2$, $m=3$ et $m=4$.

G	$u(G)$	$w(G)$	$w'(G)$	$v(G)$
	3^n	3^n	4^n-3^n	4^n-3^n
	4^n	4^n-3^n	3^n	4^n
	4^n	4^n	$8^n-3.6^n+3.5^n-4^n$	$8^n-3.6^n+3.5^n-4^n$
	5^n	5^n-4^n	$6^n-2.5^n+4^n$	$8^n-2.6^n+5^n$
	6^n	$6^n-2.5^n+4^n$	5^n-4^n	8^n-6^n
	8^n	$8^n-3.6^n+3.5^n-4^n$	4^n	8^n
	5^n	5^n	$16^n-6.12^n+12.10^n-9^n-16.8^n$ $+15.7^n-6.6^n+5^n$	$16^n-6.12^n+12.10^n-9^n-16.8^n$ $+15.7^n-6.6^n+5^n$
	6^n	6^n-5^n	$12^n-4.10^n+9^n+8.8^n-10.7^n+5.6^n-5^n$	$16^n-5.12^n+8.10^n-8.8^n+5.7^n-6^n$
	7^n	$7^n-2.6^n+5^n$	$10^n-9^n-3.8^n+6.7^n-4.6^n+5^n$	$16^n-4.12^n+5.10^n-3.8^n+7^n$
	7^n	$7^n-2.6^n+5^n$	$9^n-4.8^n+6.7^n-4.6^n+5^n$	$16^n-4.12^n+4.10^n+2.9^n-4.8^n+7^n$
	8^n	$8^n-3.7^n+3.6^n-5^n$	$9^n-3.7^n+3.6^n-5^n$	$16^n-3.12^n+3.10^n-8^n$
	8^n	$8^n-3.7^n+3.6^n-5^n$	$8^n-3.7^n+3.6^n-5^n$	$16^n-3.12^n+2.10^n+9^n-8^n$
	9^n	$9^n-3.7^n+3.6^n-5^n$	$8^n-3.7^n+3.6^n-5^n$	$16^n-3.12^n+3.10^n-9^n$
	9^n	$9^n-4.8^n+6.7^n-4.6^n+5^n$	$7^n-2.6^n+5^n$	$16^n-2.12^n+9^n$
	10^n	$10^n-9^n-3.8^n+6.7^n-4.6^n+5^n$	$7^n-2.6^n+5^n$	$16^n-2.12^n+10^n$
	12^n	$12^n-4.10^n+9^n+8.8^n-10.7^n$ $+5.6^n-5^n$	6^n-5^n	16^n-12^n
	16^n	$16^n-6.12^n+12.10^n-9^n-16.8^n$ $+15.7^n-6.6^n+5^n$	5^n	16^n

Ce tableau aurait pu commencer par une ligne consacrée au graphe ayant un sommet unique et pas d'arête, graphe pour lequel les 4 nombres $u\ w\ w'\ v$ sont égaux à 2^n. Il met notamment en évidence la propriété de $v(G)$ pour les graphes G non connexes : c'est le produit des fonctions v correspondant aux composantes connexes de G, puisque le fait d'imposer la continuité sur un graphe revient à l'imposer séparément sur chacune de ses composantes connexes. Ainsi par exemple

$v($$) = 16^n-2.12^n+9^n = (4^n-3^n)^2 = [\,v($$)\,]^2$

(La même propriété appartient évidemment aux fonctions $u(G)$ puisqu'elle appartient aux nombres s_G).

6. UNE PROPRIETE DES NOMBRES s_G

Supposons que le graphe G soit connexe, ou que, sans être connexe, il n'ait aucune composante connexe réduite à un sommet isolé. Dans ce cas, si l'on fait $n=1$, on a certainement $v(G)=1$, car la seule fonction f continue sur G consiste à prendre $f(x)=N$ (de cardinal 1) sur tout sommet x de G. On a donc dans ce cas

$$v(G) = \sum_{H \subset G} (-1)^{|H|} s_H = 1$$

Dans le cas général, G possède un certain nombres k_G de composantes connexes réduites à un sommet isolé. Si l'on fait de nouveau $n=1$, toute fonction continue sur G devra prendre la seule valeur N sur tout sommet appartenant à n'importe quelle autre composante connexe, mais pourra prendre la valeur N ou la valeur ϕ sur chacun des k_G sommets isolés. On aura dans ce cas

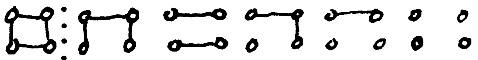
$$v(G) = \sum_{H \subset G} (-1)^{|H|} s_H = 2^{k_G} .$$

Cette dernière égalité se prête à une inversion de Möbius, qui donne

$$s_G = \sum_{H \subset G} (-1)^{|H|} 2^{k_H} .$$

Chacun des deux entiers s_G et 2^{k_G} associés à un graphe quelconque possède ainsi la propriété d'être la somme alternée des valeurs prises par l'autre sur tous les graphes partiels de G, le signe de chaque terme étant fixé par la parité du nombre d'arêtes.

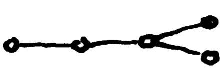
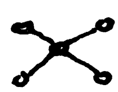
Exemple :

		4x	2x	4x	4x	1x	
$G =$							
$s_G = 7$		8	9	10	12	16	$7-4.8+2.9+4.10-4.12+1.16 = 1$
$2^{k_G} = 1$		1	1	2	4	16	$1-4.1+2.1+4.2-4.4+1.16 = 7$

7. CAS DES ARBRES ; CAS PARTICULIER DES ETOILES

Si G est un *arbre* (graphe connexe sans cycles), le nombre $v(G)$ des fonctions continues sur G est particulièrement facile à déterminer, du fait que tout graphe partiel de G se décompose en composantes connexes dont chacune est encore un arbre.

Le tableau ci-après redonne les fonctions $v(G)$ déjà calculées pour les arbres n'ayant pas plus de 4 sommets et le complète pour les trois types d'arbres à 5 sommets :

	G	$v(G)$
$m = 1$		2^n
$m = 2$		4^n-3^n
$m = 3$		$8^n-2.6^n+4^n$
$m = 4$		$16^n-3.12^n+2.10^n+9^n-8^n$
		$16^n-3.12^n+3.10^n-9^n$
$m = 5$		$32^n-4.24^n+3.20^n+3.18^n-2.16^n-2.15^n+13^n$
		$32^n-4.24^n+4.20^n+18^n-2.16^n-15^n+14^n$
		$32^n-4.24^n+6.20^n-4.18^n+17^n$

On remarque la simplicité particulière des expressions relatives aux *étoiles* (arbres à m sommets, dont un sommet central c et $m-1$ sommets "pendants"). Pour l'étoile E_m, on a $s_{E_m} = 2^{m-1}+1$, puisque les ensembles intérieurement stables sont toutes les parties de l'ensemble des sommets pendants, plus la partie de cardinal 1 réduite au sommet central.

Tout graphe partiel H à h arêtes de E_m se décompose en une étoile E_{h+1} et $m-h-1$ sommets isolés, d'où

$$s_H = (2^h+1)2^{m-h-1} \quad ;$$

on a donc

$$v(E_m) = \sum_{h=0}^{m-1} (-1)^h \binom{m-1}{h} [(2^h+1)2^{m-h-1}]^n$$

Un autre regroupement des termes de cette expression, après développement de $(2^h+1)^n$, conduit à l'expression équivalente

$$v(E_m) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} (2^n-2^i)^{m-1}$$

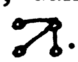
Le terme général de cette dernière expression correspond au cas où la valeur $f(c)$ prise par la fonction f au sommet central c a pour cardinal $n-i$; en effet les parties de N qui coupent une partie $f(c)$ donnée de cardinal $n-i$ sont au nombre de 2^n-2^i, et la détermination complète de f exige de définir une telle partie sur chacun des $m-1$ sommets pendants.

Plus remarquable encore est l'expression de $w'(G)$ lorsque G est un arbre quelconque à m sommets. On a vu en effet que $w'(G)$ peut s'exprimer à l'aide des nombres de cliques c_H des graphes partiels de G.

Or tout arbre à m sommets possède $m-1$ arêtes, donc $1+m+(m-1) = 2m$ cliques. La suppression de k arêtes donne un graphe partiel formé de $k+1$ composantes connexes dont chacune est un arbre ; ce graphe partiel possède $2m-k$ cliques (car la "clique vide", commune à toutes les composantes connexes, doit-être comptée une seule fois et non $k+1$ fois).

On a donc dans ce cas

$$w'(G) = \sum_{H \subset G} (-1)^{|G-H|} (c_H)^n = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m-1}{k} (2m-k)^n .$$

$w'(G)$ est ainsi, lorsque G est n'importe quel arbre à m sommets, la valeur prise par la différence $(m-1)$-ième de x^n pour $x = m+1$; on le vérifie notamment, dans le tableau du §5, pour les deux types d'arbres à 4 sommets,  et .

8. CAS DES CHAINES

Une classe particulière d'arbres, plus intéressante que les étoiles, est constituée par les *chaînes* C_m de m sommets. Le calcul de $v(C_m)$ revient, si l'on veut, au dénombrement des suites de m parties $(P_1\ P_2\ \ldots . P_m)$ de N, assujetties à la condition que $P_i \cap P_{i+1} \neq \phi$ pour tout $i \in \{1,2,\ldots,m-1\}$.

Le nombre $s_{C_m} = s_m$ est le nombre de parties de l'ensemble $\{1,2,\ldots,m\}$ qui ne contiennent pas deux entiers consécutifs. Celles de ces parties qui ne contiennent pas m sont au nombre de s_{m-2} ; on a donc

$$s_m = s_{m-1} + s_{m-2} .$$

La suite des s_m est ainsi la suite de Fibonacci commençant par

$$\begin{array}{llllllllll} (m = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \ \ldots) \\ s_m = & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & 21 & 34 & 55 & 89 \ \ldots, \end{array}$$

avec l'expression générale (théoriquement "condensée", mais peu maniable en fait) :

$$s_m = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{m+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{m+2} \right]$$

La suppression de $k-1$ arêtes décompose C_m en k composantes connexes successives $C_{a_1}\ C_{a_2}\ \ldots . C_{a_k}$, où $(a_1\ a_2\ a_3 \ldots\ a_k)$ est une k-composition de l'entier m (suite de k entiers positifs de somme m, cf. [2]). Cette k-composition sera dite de type $Y = ((x_1\ x_2\ x_3\ \ldots .))$ si elle comporte x_i

termes égaux à i ; le type Y est une solution, en entiers non-négatifs système d'équations

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots = k$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots = m .$$

L'ensemble des types Y correspondant à m et k donnés sera désigné par $[\![m, k]\!]$.

Le nombre de k-compositions de m qui sont de type Y est le multinomial $\binom{k}{x_1\ x_2\ x_3 \dots} = K(Y)$, et le produit $s_{a_1} s_{a_2} \dots s_{a_k}$ est égal à $s_1^{x_1} s_2^{x_2} s_3^{x_3} \dots$, que nous désignerons en abrégé par s_Y. La somme des nombres $(s_H)^n$ correspondant à tous les graphes partiels H de C obtenus par suppression de $k-1$ arêtes est donc

$$\sum_{Y \in [\![m,k]\!]} K(Y)(s_Y)^n$$

(remarquons en passant la propriété bien connue que la somme des $K(Y)$ sur $[\![m,k]\!]$ est le binomial $\binom{m-1}{k-1}$).

En appliquant ce résultat à l'expression générale de $v(G)$ donnée au §4, on trouve

$$v(C_m) = \sum_{k=1}^{m} \left[(-1)^{m-k} \sum_{Y \in [\![m,k]\!]} K(Y)(s_Y)^n \right] .$$

Par exemple pour $m = 5$, l'écriture développée (par valeurs décroissantes de k) donne

$$v(C_5) = (s_1^5)^n - 4(s_1^3 s_2)^n + 3(s_1^2 s_3)^n + 3(s_1 s_2^2)^n - 2(s_1 s_4)^n - 2(s_2 s_3)^n + (s_5)^n$$

$$= (2^5)^n - 4(2^3.3)^n + 3(2^2.5)^n + 3(2.3^2)^n - 2(2.8)^n - 2(3.5)^n + (13)^n ,$$

ce qui confirme et explique l'expression obtenue dans le tableau du §7

Un mode de calcul encore plus rapide de $v(C_5)$ résulte de la considération des fonctions génératrices des deux suites dont les m-ième termes respectifs sont $u(C_m) = u_m = (s_m)^n$ et $v(C_m) = v_m$. Si l'on pose en effet

$$U(t) = u_1 t + u_2 t^2 + u_3 t^3 + \ldots.$$

$$V(t) = v_1 t + v_2 t^2 + v_3 t^3 + \ldots.$$

et $u_Y = u_1^{x_1}\, u_2^{x_2}\, u_3^{x_3} \ldots$, l'expression de v_m est

$$v_m = \sum_{k=1}^{m} \left[(-1)^{m-k} \sum_{Y \in [\![m,k]\!]} K(Y)\, u_Y \right],$$

et l'on a

$$(-1)^{m-1} v_m = \sum_{k=1}^{m} \left[(-1)^{k-1} \sum_{Y \in [\![m,k]\!]} K(Y) u_Y \right]$$

A partir de là il est aisé de vérifier (cf. [3])

$$v_1 t - v_2 t^2 + v_3 t^3 - \ldots = -V(-t) = \frac{U(t)}{1 + U(t)},$$

ce qui permet d'écrire

$$[1 + U(t)]\ [1 + V(-t)] = 1 .$$

Il s'ensuit que, si l'on pose par convention $u_o = v_o = 1$, on a, pour tout entier positif m :

$$u_o v_m - u_1 v_{m-1} + u_2 v_{m-2} - \ldots + (-1)^m u_m v_o = 0.$$

Ceci conduit au calcul de proche en proche de $v_m = v(C_m)$, dont voici les valeurs pour m $\leqslant 7$:

$v(C_1) = 2^n$

$v(C_2) = 4^n - 3^n$

$v(C_3) = 8^n - 2.6^n + 5^n$

$v(C_4) = 16^n - 3.13^n + 2.10^n + 9^n - 8^n$

$v(C_5) = 32^n - 4.24^n + 3.20^n + 3.18^n - 2.16^n - 2.15^n + 13^n$

$v(C_6) = 64^n - 5.48^n + 4.40^n + 6.36^n - 3.32^n - 6.30^n - 27^n + 2.26^n + 25^n + 2.24^n - 21^n$

$v(C_7) = 128^n - 6.96^n + 5.80^n + 10.72^n - 4.64^n - 12.60^n - 4.54^n + 3.52^n + 3.50^n + 6.48^n$
$+ 3.45^n - 2.42^n - 2.40^n - 2.39^n + 34^n$

9. CAS DES CYCLES

Ce sont encore les nombres de Fibonacci de s_1 à s_m qui interviennent lorsque le graphe G donné est un cycle O_m, puisque tous les graphes partiels H sauf O_m lui-même se décomposent alors en composantes connexes qui sont des chaînes.

Pour $H = O_m$ (avec des sommets numérotés de 1 à m dans l'ordre circulaire), s_H est le nombre de parties P de l'ensemble des m sommets telles que deux sommets de P ne soient pas consécutifs dans le cycle. Pour obtenir ce nombre, il faut retrancher de s_m le nombre de parties contenant à la fois les sommets 1 et m, donc ne contenant ni 2 ni $m-1$; c'est donc $s_m - s_{m-4}$ (on vérifie directement que c'est 4 pour $m = 3$, et 7 pour $m = 4$).

Pour tout autre graphe partiel H de O_m, s_H est comme précédemment un produit $s_Y = s_1^{x_1} s_2^{x_2} s_3^{x_3} \ldots$, où x_i est le nombre de composantes connexes qui sont des chaînes de i sommets. On a donc, en vertu de la formule générale du §4 :

$$v(O_m) = (-1)^m (s_m - s_{m-4})^n + \sum_{k=1}^{m} \left[(-1)^{m-k} \sum_{Y \in [\![m,k]\!]} \lambda(Y)(s_Y)^n \right];$$

dans cette formule $\lambda(Y)$ désigne le nombre de manières dont on peut, par suppression de k arêtes, décomposer O_m suivant le type Y, c'est-à-dire en k chaînes dont x_i de i sommets.

Or il est facile de montrer que

$$\lambda(Y) = \frac{m(k-1)!}{x_1!\, x_2!\, x_3! \ldots} = \frac{m}{k} K(Y),$$

expression dont la somme sur $[\![m,k]\!]$ est $\frac{m}{k}\binom{m-1}{k-1} = \binom{m}{k}$. En effet, si l'arête qui joint les sommets m et 1 du cycle est supprimée, la suppression des $k-1$ autres définit sur la chaîne C_m une k-composition du type Y, ce qui, on l'a vu, est possible de $\frac{k!}{x_1! x_2! x_3! \ldots}$ manières. Si au contraire les k arêtes supprimées appartiennent à la chaîne C_m, cela définit sur C_m $k+1$ tranches successives $y_0\, y_1 \ldots y_k$ telles que $y_0 + y_k = j$ (par exemple) et que $(y_1\, y_2 \ldots y_{k-1})$ soit une $(k-1)$-composition de $m-j$ de type $Y' = ((x_1\, x_2 \ldots, x_j - 1, \ldots))$; le nombre de manières de réaliser cela est

$$(j-1) \frac{(k-1)!}{x_1!\, x_2! \ldots (x_j-1)! \ldots} = (j-1) x_j \frac{(k-1)!}{x_1!\, x_2! \ldots x_j! \ldots}$$

Comme $\sum_j (j-1)x_j = m-k$, on trouve bien au total, en ajoutant le multinomial du premier cas, la valeur annoncée de $\lambda(Y)$.

On trouve finalement ainsi, pour $m \leqslant 7$ (les valeurs de $v(O_3)$ et de $v(O_4)$ figurant déjà au tableau du §5) :

$$v(O_3) = 8^n-3.6^n+3.5^n-4^n$$

$$v(O_4) = 16^n-4.12^n+4.10^n+2.9^n-4.8^n+7^n$$

$$v(O_5) = 32^n-5.24^n+5.20^n+5.18^n-5.16^n-5.15^n+5.13^n-11^n$$

$$v(O_6) = 64^n-6.48^n+6.40^n+9.36^n-6.32^n-12.30^n-2.27^n+6.26^n+3.25^n+6.24^n-6.21^n+18^n$$

$$v(O_7) = 128^n-7.96^n+7.80^n+14.72^n-7.64^n-21.60^n-7.54^n+7.52^n+7.50^n+14.48^n+7.45^n -7.42^n-7.40^n-7.39^n+7.34^n-29^n$$

L'expression de $w'(O_m)$ est de nouveau particulièrement simple. En effet le nombre de cliques de O_m est égal à $2m+1$ (sauf pour O_3, pour lequel il est égal non à 7 mais à 8 puisqu'il faut ajouter la clique formée par les trois sommets) ; d'autre part, dans tout graphe partiel obtenu à partir de O_m par la suppression de k arêtes, avec $1 \leqslant k \leqslant m$, on a k composantes qui sont des chaînes, donc des arbres, et par conséquent $2m - k + 1$ cliques, pour la même raison qu'au §7. Il en résulte que

$$w'(O_m) = (2m+1)^n + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (2m+1-k)^n$$

$$= \sum_{k=o}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (2m+1-k)^n \quad ;$$

$w'(O_m)$ est donc la valeur prise par la différence m-ième de x^n pour $x = m+1$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERGE C., Théorie des graphes et ses applications, Paris, Dunod, 1958.

[2] MACMAHON P., Combinatory analysis, New York, Chelsea, réédition 1960.

[3] RIORDAN J., An introduction to combinatorial analysis, New York, Wiley, 1958.

[4] ROTA G.C., On the foundations of combinatorial theory, I ; Theory of Möbius functions, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie u. verw. Gebiete, 2 (1963), 340-368.