

J.-L. PEAUCELLE

Modèles dyadiques en sociométrie

Mathématiques et sciences humaines, tome 48 (1974), p. 5-19

http://www.numdam.org/item?id=MSH_1974__48__5_0

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MODÈLES DYADIQUES EN SOCIOMÉTRIE

par

J.-L. PEAUCELLE

RÉSUMÉ

L'auteur propose une nouvelle méthode d'exploitation des tests sociométriques de Moreno par ajustement des résultats observés à des modèles de choix aléatoires (tests dichotomiques à expansivité libre). Alors que le modèle aléatoire de Bronfenbrenner s'inscrivait dans un raisonnement destiné à montrer que l'homme ne choisit pas au hasard, l'auteur montre que si on tient compte du caractère dyadique des attractions et de l'hétérogénéité des groupes, on peut représenter les choix par des modèles stochastiques dont les paramètres sont estimés par les résultats observés. Ces paramètres caractéristiques du groupe apparaissent ainsi comme la véritable mesure effectuée par le test sociométrique. Des exemples sont donnés de modèle dyadique homogène et de modèle dyadique homogène par morceaux. L'auteur construit également un modèle d'évolution markovienne des dyades et montre sur un exemple comment la forte mobilité des choix individuels peut s'accompagner d'une stabilité des paramètres de sélectivité globale du groupe.

SUMMARY

The author proposes a new method for exploiting Moreno's sociometric tests by fitting the observed results to models of random choice (dichotomic models with free expansiveness). While the random model of Bronfenbrenner is a logical structure intended to demonstrate that human beings do not choose at random, the author shows that choices can be represented by stochastic models whose parameters are estimated from the observed results and by taking account of the dyadic character of attractions and of the heterogeneity of groups. In this manner these characteristic parameters of the group appear as the true measure carried out by the sociometric test. Homogeneous dyadic models and piecewise homogeneous dyadic models are presented as examples. The author also constructs a markovian evolution model of dyads and shows, in an example, that high mobility of individual choice can be accompanied by stability of the global selectivity parameters of the group.

Cette étude a été menée dans le cadre de l'ISHA, 17, rue Richer 75009 Paris.

1. LE MODÈLE DE BRONFENBRENNER

Le questionnaire de recherche de partenaires, appelé en général test sociométrique, inventé et mis en œuvre par Moreno, constitue une méthode d'investigation des groupes, à travers les relations préférentielles, qui a suscité beaucoup d'espoirs et de contreverses, pour finalement être peu à peu délaissé même s'il garde une place dans les programmes de formation en psychosociologie. Cette méthode d'investigation fondée sur une réflexion théorique originale opposée aux efforts habituels dans les sciences sociales, où on associe le caractère scientifique des études à une préoccupation d'objectivation du recueil des données, a donné lieu à une grande diversité dans les démarches d'utilisation des résultats, diversité qui n'est pas loin d'apparaître comme une source de contradiction. On peut les regrouper en trois grandes familles :

- a. Les études centrées sur l'individu et sur sa place dans le réseau des préférences;
- b. Les études centrées sur le problème de réorganisation du groupe en fonction des préférences;
- c. Les études centrées sur le groupe et la structure globale des préférences.

Mais cette distinction n'est en général pas l'objet d'un choix de la part des sociométriciens qui, à l'instar de Moreno, utilisent simultanément ces perspectives, ce qui ne manque pas de créer quelque confusion dans la méthodologie du test sociométrique. La démarche qui est adoptée ici pour la modélisation du test sociométrique est la troisième, c'est-à-dire celle où on étudie de manière globale la structure des attrait; le modèle que l'on cherche à construire doit rendre compte de cette structure dans ses caractéristiques.

Cette précision permet de bien distinguer un souci de modélisation avec la démarche statistique utilisée depuis trente ans par les sociométriciens et qui a été introduite par Bronfenbrenner. En forçant un peu ses intentions, mais cela correspond à la manière dont les psychosociologues utilisent pratiquement ses résultats, on peut dire que la question qu'il se pose est la suivante : comment montrer la spécificité de la structure des attrait observés? Cette spécificité est analysée par rapport à un modèle aléatoire de choix équiprobables. Ce modèle-repoussoir, modèle bête « où l'homme choisirait comme un robot » est construit avec le désir, si ce n'est l'intention, de mettre en évidence son inadéquation avec les données recueillies. Au fond ce souhait ne serait pas grave, il faut toujours partir d'une hypothèse, s'il ne venait à fausser la démarches et à conduire le statisticien en dehors de la rigueur de son raisonnement.

L'écart entre les données recueillies et le modèle est analysé selon deux points de vue : la fréquence de figures de relations particulières et le nombre de choix reçus. En ce qui concerne le premier point, on considère des figures particulières d'attrait entre plusieurs individus : les paires d'attraction mutuelle, les triangles où tous les choix sont réalisés, voire les carrés complets. On compte dans l'ensemble du groupe le nombre de figures de chaque type observé et on le compare à ce qu'on aurait observé si les réponses avaient suivi le modèle de référence, c'est-à-dire pratiquement à la fourchette des valeurs observables dans 95 % des cas si le modèle est juste. En général on est en dehors de cette fourchette et on montre ainsi qu'avec seulement 5 % de chances de se tromper on peut rejeter le modèle, donc les choix humains ne peuvent pas être considérés comme aléatoires équiprobables. Ce type de raisonnement est classique en statistique. Habituellement le sociométricien ne considère que le second point de vue plus proche des préoccupations du psychosociologue qui rapproche le nombre de choix reçus du concept de statut social.

LE MODÈLE ALÉATOIRE ÉQUIPROBABLE (BRONFENBRENNER) :

- nombre de choix émis par chaque individu constant = d
- probabilité de choix constante entre deux individus quelconques :

$$p = \frac{d}{N-1} \quad (N = \text{nombre d'individus})$$

- le nombre de choix reçus par chaque individu suit une loi binomiale de probabilité p avec $N - 1$ tirages,
- le nombre total de choix mutuels suit une loi binomiale de probabilité p^2 avec $\frac{N(N-1)}{2}$ tirages,
- le nombre total des triangles complets suit une loi binomiale de probabilité p^6 avec $\frac{N(N-1)(N-2)}{2}$ tirages.

Si le processus d'émission des choix est aléatoire, se portant de manière équiprobable sur tous les membres du groupe, le nombre de choix reçus par chaque individu est aléatoire et suit une loi binomiale. On peut ainsi définir un intervalle dans lequel doit se situer, pour un individu quelconque, le nombre de choix reçus dans 95 % des cas. Le raisonnement, correct jusqu'à ce point, va alors s'égarer. On compare pour chaque individu le nombre obtenu avec les bornes de cet intervalle. En général l'individu le plus choisi obtient un score supérieur à la borne supérieure et on dit (en sous-entendant les précautions du discours du statisticien) que pour lui le modèle équiprobable doit être rejeté, donc si son bon score n'est pas dû à un hasard il est le signe d'un attrait spécifique lié à sa personnalité, cet individu est un leader. Les limites de la loi binomiale deviennent les seuils de détermination des leaders et des isolés, c'est-à-dire les individus pour lesquels une caractéristique individuelle entraînerait au-delà du hasard une fuite ou une concentration des choix. On voit bien l'erreur : utiliser la loi de distribution du nombre de choix reçus pour un individu quelconque alors que l'individu le plus choisi n'est pas un individu quelconque puisqu'il est déterminé *a posteriori* d'après le résultat du processus supposé aléatoire et la loi de distribution le concernant est totalement différente. Il aurait fallu comparer la distribution des choix reçus par tous les individus et non pas chaque score avec la loi de distribution théorique.

Cette erreur de raisonnement grave s'est diffusée lors de l'utilisation de la sociométrie car elle permettait de répondre au souci général du psychosociologue : différencier les individus; on assiste à une sorte de perversion

mutuelle du raisonnement mathématique et de la méthode des sciences humaines par l'acceptation irréfléchie des contraintes que semble porter l'autre discipline qui sont d'autant moins remises en question qu'on les comprend mal. Le meilleur exemple de ce processus est celui du nombre de choix laissé lors de l'émission à la disposition de chacun. Ce nombre de choix devrait être libre, notamment pour respecter la spontanéité des individus, mais le modèle de Bronfenbrenner suppose ce choix fixé et, pour l'utiliser, les sociométriciens ont accepté cette contrainte, sans prendre suffisamment conscience de son caractère détestable dans son principe de biaiser le recueil des données pour les mouler dans les limites d'une exploitation restrictive.

2. LES MODÈLES DYADIQUES

La perspective adoptée pour la construction de modèles sociométriques est caractérisée d'une part par le niveau global de l'approche du test, d'autre part par le souci de représenter des données concrètes recueillies par ailleurs. Ceci a conduit à une démarche caractéristique de la méthode expérimentale, démarche itérative d'élaboration d'hypothèses et de confrontation du modèle à des données expérimentales.

On a ainsi été amené à mettre en œuvre quatre hypothèses fondamentales :

- *le caractère aléatoire des choix.* — La réalisation du choix entre deux individus quelconques est considérée comme un événement aléatoire. Cet aléa n'est défini ni par rapport à celui qui exprime le choix (qui sait avec certitude s'il choisit ou non) ni par rapport à celui qui est choisi (qui a sans doute une opinion sur les attirances qu'il suscite même si celle-ci est erronée) mais par rapport au sociométricien, observateur extérieur, qui ne possède que peu d'informations sur les différences entre individus.

- *le caractère dyadique du processus de sélection.* — Le fait que les choix soient aléatoires ne signifie pas que ceux-ci se forment « n'importe comment ». Il existe des lois stochastiques observables par des régularités statistiques. La première de celles-ci, mise en évidence depuis longtemps en sociométrie, est la sur-présentation observée généralement des choix réciproques.

Cela signifie que les choix ne se forment pas sans relation avec la formation du choix réciproque. C'est ce qu'on a appelé l'effet dyadique qui se traduit par le fait que les probabilités conditionnelles de choix selon la réalisation du lien réciproque ont des valeurs différentes, qui dans les modèles dyadiques sont considérées comme caractéristiques du processus de sélection. On a :

$$p(i \rightarrow j) = p(i \rightarrow j | j \rightarrow i) p(j \rightarrow i) + p(i \rightarrow j | j \rightarrow i) p(j \rightarrow i)$$

où $p(i \rightarrow j)$ probabilité que l'individu i choisisse l'individu j
 $p(i \rightarrow j)$ probabilité que i ne choisisse pas j
 $p(i \rightarrow j | j \rightarrow i)$ probabilité conditionnelle que i choisisse j sachant que j choisit i .

On considérera les probabilités conditionnelles comme des constantes ce qui déterminera le caractère dyadique de nos modèles. On posera :

$$p(i \rightarrow j | j \rightarrow i) = p'$$

$$p(i \rightarrow j | j \rightarrow i) = p''$$

On peut présenter l'hypothèse dyadique d'une autre manière en disant que les dyades¹ sont des variables aléatoires indépendantes.

- *homogénéité et hétérogénéité du groupe.* — Une première hypothèse a été naturellement de supposer que le groupe constituait un ensemble homogène au sein duquel on pouvait considérer les probabilités de choix comme constantes. Ceci a permis de développer un modèle simple : le modèle homogène.

1. Une dyade est l'état des attractions entre deux sujets.

Une dyade peut être $\left\{ \begin{array}{l} \text{réciproque} \quad A \rightleftarrows B \\ \text{unilatérale} \quad A \rightarrow B \text{ ou } A \leftarrow B \\ \text{neutre} \quad A B \end{array} \right.$

Mais celui-ci devait se compléter d'un modèle hétérogène ou homogène par morceaux d'une part parce que les données expérimentales l'exigeaient, d'autre part pour des raisons méthodologiques plus profondes. Le modèle simple (homogène) ne pouvait être accepté sur un cas concret d'une observation sociométrique que dans la mesure où un modèle plus complexe n'en rendait pas compte d'une manière plus complète. La procédure selon laquelle le chercheur choisira un modèle pour représenter des données expérimentales n'est intéressante que si la décision ne se réduit pas à une alternative (souvent biaisée) entre une acceptation et un rejet, mais se fonde sur une palette d'hypothèses plus variées. Par ailleurs, la modélisation par morceaux homogènes permet de répondre à une question très ancienne en sociométrie : l'étude de l'effet sur la cohésion du groupe de différences structurelles de sa composition, problème très concret des classes mixtes, des groupes multiraciaux, etc. De plus, et ce n'est pas le moins important, cette perspective permet d'aborder un problème effleuré par la sociométrie classique, celui de la définition du groupe, qui peut toujours être considéré comme un sous-ensemble d'un ensemble plus large. Ainsi quel que soit le groupe (plus ou moins extensif) sur lequel on a recueilli les données, on pourra l'exploiter par sous-groupes homogènes et explorer les relations entre eux. La définition de groupes homogènes et cohérents devient le résultat de l'étude sociométrique et non une hypothèse nécessaire *a priori*.

● *évolution markovienne des dyades.* — Le problème de la stabilité des choix au cours du temps a été éludé avec art par les sociométriciens. Quand on répète le test sociométrique même dans un délai très court on observe une modification très importante des choix individuels mais une stabilité de leur structure globale. On peut représenter cette évolution par une chaîne de Markov dont les états sont les types de réalisation des dyades : neutre, unilatérale ou réciproque. Ainsi, le devenir de chaque dyade est déterminé seulement par sa réalisation à l'instant considéré.

Ce modèle markovien d'évolution des dyades a une grande importance théorique et pratique. En effet, l'instabilité des choix semble dénier au questionnaire de recherche de partenaires le caractère fondamental d'une bonne mesure, la fiabilité, à moins qu'on accepte le caractère instable de ce qui est mis en évidence par cette méthode, mais alors on réduit l'intérêt de l'observation unique, qui est la plus couramment pratiquée. Mais le modèle markovien d'évolution montre que rapidement on atteint une situation où il y a compensation entre les échanges des dyades de chaque type et constance de leur proportion, ce qui signifie que les paramètres du modèle statique retenu ne varient pas. Dès lors se trouve justifiée la démarche adoptée pour rendre compte d'une mesure isolée c'est-à-dire négliger les choix individuels, car ils sont instables, et privilégier des paramètres globaux de structure, qui restent constants malgré les évolutions individuelles.

L'approche modélisante statique et le souci de rendre compte de l'évolution diachronique convergent donc ici pour donner au test sociométrique un statut de méthode de mesure d'une réalité préférentielle dans les groupes mais cette réalité se situe moins au niveau individuel où Moreno se plaisait à placer son interprétation qu'à un niveau collectif.

Ces hypothèses ainsi exprimées rapidement dans leur fondement et dans leurs conséquences, il reste à décrire les modèles dyadiques. On donnera ensuite des données sociométriques réelles qui constituent des exemples de chaque type de modèle. L'objectif n'est pas de montrer que tout ensemble de données recueillies selon la procédure du questionnaire de recherche de partenaire, avec les précautions sur lesquelles les sociométriciens insistent traditionnellement, puisse se représenter par un modèle dyadique, mais notre propos est ici de montrer que les constructions théoriques décrites ont vocation à représenter les tests sociométriques et qu'il existe effectivement des réalités sociales auxquelles ces outils sont adaptés, réservant pour un autre cadre l'étude des conditions sociales dans lesquelles les préférences ont ou n'ont pas une structure dyadique, et de la signification psychosociale des paramètres de ces modèles.

Rappelons au préalable que les modèles dyadiques qui seront exposés concernent les données sociométriques les plus simples où une seule question est posée aux membres du groupe (un seul critère), où on demande seulement de choisir (dichotomie choix – non choix), et où le nombre de choix exprimés par chacun est libre.

3. MODÈLE DYADIQUE HOMOGENE

Champ d'application. — Un questionnaire de recherche de partenaires à choix libre, pour l'ensemble du groupe ou pour un sous-groupe.

Hypothèses. — Les probabilités conditionnelles de choix connaissant la réalisation du choix réciproque sont constantes quels que soient les deux individus appartenant aux groupes considérés :

$$p(i \rightarrow j | j \rightarrow i) = \text{constante} = p'$$

$$p(i \rightarrow j | j \rightarrow \bar{i}) = \text{constante} = p''$$

Caractéristiques du modèle. — La probabilité de choix simple entre deux individus quelconques est constante :

$$p(i \rightarrow j) = \text{constante} = p = \frac{p''}{1 - p' + p''} \quad (1)$$

Le modèle dépend de deux paramètres indépendants. Il est caractérisé par la valeur des trois probabilités p, p' et p'' qui sont liées par la relation (1).

Les probabilités des différents états d'une dyade sont données ci-dessous :

Dyade	Probabilité
—	—
Réciproque	pp'
Unilatérale	$2p(1 - p') = 2(1 - p)p''$
Neutre	$(1 - p)(1 - p'')$

Estimation des paramètres. — On dénombre les dyades de chaque type, soient S_0 nombre de dyades neutres, S_1 nombre de dyades unilatérales, S_2 nombre de dyades réciproques :

$$p^* = \frac{S_1 + 2S_2}{2(S_0 + S_1 + S_2)} \quad , \quad p'^* = \frac{2S_2}{S_1 + 2S_2} \quad , \quad p''^* = \frac{S_1}{2S_0 + S_1} .$$

Tests de vraisemblance. — Le nombre de choix émis n_i par l'individu i suit une loi binomiale de probabilité p avec $N - 1$ tirages ($N =$ effectif du groupe),

soit :

$$T_1 = \sum_{i=1}^{i=N} \frac{(n_i - p^*(N-1))^2}{p^*(N-1)}$$

T_1 suit une loi du khi-deux avec $N - 1$ degrés de liberté.

Le nombre de choix reçus n_j par l'individu j suit une loi binomiale de probabilité p avec $N - 1$ tirages,

soit :

$$T_2 = \sum_{j=1}^{j=N} \frac{(n_j - p^*(N-1))^2}{p^*(N-1)}$$

T_2 suit une loi du khi-deux avec $N - 1$ degrés de liberté.

● Le nombre de triangles complets TC (groupe de trois individus où les six choix possibles sont réalisés) suit une loi binomiale de probabilité $(p p')^3$ avec $\frac{N(N-1)(N-2)}{6}$ tirages,

soit :

$$T_3 = \frac{TC - (p^* p'^*)^3 \frac{N(N-1)(N-2)}{6}}{(p^* p'^*)^3 \frac{N(N-1)(N-2)}{6}}$$

T_3 suit une loi du khi-deux avec 1 degré de liberté.

Remarques :

● Les tests ont été donnés pour le cas où on estime les deux paramètres caractéristiques du modèle en fonction des observations. Si on a fixé *a priori* une valeur à ces paramètres on doit modifier le nombre de degrés de liberté et tester si la valeur observée des nombres de dyades est statistiquement égale à leur valeur théorique.

● L'hypothèse d'indépendance des dyades permet de considérer des sous-groupes du groupe.

Le groupe sur lequel on définit le modèle homogène peut n'être qu'un sous-groupe de celui sur lequel on a effectué les observations.

Tout sous-groupe d'un groupe dont les choix sont régis par le modèle homogène a des choix qui correspondent au même modèle avec la même valeur des paramètres.

Cas particuliers :

- pas de choix :

$$p = p'' = 0 \qquad p' \text{ indéterminé}$$

- tous les choix possibles sont réalisés (donc réciproques) :

$$p = p' = 1 \qquad p'' \text{ indéterminé}$$

- aucun choix réciproque :

$$p' = 0$$

- tous les choix réciproques :

$$p'' = 0 \qquad p' = 1$$

4. MODÈLE DYADIQUE HOMOGENÈNE PAR MORCEAUX

Champ d'application. — Un questionnaire de recherche de partenaires à choix libres, pour les relations entre deux sous-groupes.

Hypothèses. — On partitionne le groupe en sous-groupes homogènes selon les caractéristiques des individus (par exemple le sexe). Ainsi pour une partition en deux on obtient trois domaines de choix.

	SG1	SG2
SG1	1	3
SG2	3	2

Domaine 1 : relations des membres du sous-groupe 1 entre eux

Domaine 2 : relations des membres du sous-groupe 2 entre eux

Domaine 3 : relations des membres du sous-groupe 1 avec les membres du sous-groupe 2

On considère que les domaines 1 et 2 sont représentables par le modèle homogène décrit ci-dessus. Le domaine 3 est de nature différente; il est dissymétrique. La morcellisation introduit ce type de domaine pour lequel on fait l'hypothèse de constance des probabilités conditionnelles en différenciant selon le groupe d'appartenance des deux membres de la dyade :

$$\begin{aligned} p(i \rightarrow j | j \rightarrow i) &= \text{constante} = p'_{12} & \text{si} & \quad i \in SG1 \quad \text{et} \quad j \in SG2 \\ p(i \rightarrow j | j \rightarrow i) &= \text{constante} = p'_{21} & \text{si} & \quad i \in SG2 \quad \text{et} \quad j \in SG1 \\ p(i \rightarrow j | j \rightarrow i) &= \text{constante} = p''_{12} & \text{si} & \quad i \in SG1 \quad \text{et} \quad j \in SG2 \\ p(i \rightarrow j | j \rightarrow i) &= \text{constante} = p''_{21} & \text{si} & \quad i \in SG2 \quad \text{et} \quad j \in SG1 \end{aligned}$$

Caractéristiques du modèle. — La probabilité de choix simple entre deux individus quelconques est constante et dépend de l'appartenance des deux individus à chacun des sous-groupes :

$$\begin{aligned} p(i \rightarrow j) &= \text{constante} = p_{12} & \text{si} & \quad i \in SG1 \quad \text{et} \quad j \in SG2 \\ p(i \rightarrow j) &= \text{constante} = p_{21} & \text{si} & \quad i \in SG2 \quad \text{et} \quad j \in SG1 \end{aligned}$$

Le modèle dépend de 3 paramètres indépendants. Les valeurs des 6 probabilités sont liées par les égalités suivantes :

$$p_{12} p'_{21} = p_{21} p'_{12} \tag{2}$$

$$p_{12} (1 - p'_{21}) = (1 - p_{21}) p'_{12} \tag{3}$$

$$(1 - p_{12}) p''_{21} = p_{21} (1 - p'_{12}) \tag{4}$$

Les probabilités des différents états d'une dyade sont données ci-dessous

Dyade	Probabilité
—	—
Réciproque	$p_{12} \times p'_{21}$
Unilatérale	
$i \rightarrow j$ $i \in SG1$ $j \in SG2$	$p_{12} (1 - p'_{21})$
Unilatérale	
$i \rightarrow j$ $i \in SG2$ $j \in SG1$	$(1 - p_{12}) p''_{21}$
Neutre	$(1 - p_{12}) (1 - p''_{21})$

Estimation des paramètres. — On dénombre les dyades de chaque type soient : S_0 , le nombre de dyades neutres; S_{1*} , le nombre de dyades unilatérales $i \rightarrow j$, $i \in SG1$, $j \in SG2$; S_{1**} , le nombre de dyades unilatérales $i \rightarrow j$, $i \in SG2$, $j \in SG1$; S_2 , le nombre de dyades réciproques; N_1 , effectif de $SG1$; N_2 , effectif de $SG2$.

$$N_1 N_2 = S_0 + S_{1*} + S_{1**} + S_2$$

$$p^*_{12} = \frac{S_{1*} + S_2}{N_1 N_2} \quad p^*_{21} = \frac{S_{1**} + S_2}{N_1 N_2}$$

$$p'^*_{12} = \frac{S_2}{S_{1**} + S_2} \quad p'^*_{21} = \frac{S_2}{S_{1*} + S_2}$$

$$p''^*_{12} = \frac{S_{1*}}{S_0 + S_{1*}} \quad p''^*_{21} = \frac{S_{1**}}{S_0 + S_{1**}}$$

Tests de vraisemblance. — Le nombre de choix émis n_i par l'individu i vis-à-vis des membres de l'autre sous-groupe suit une loi binomiale de probabilité p^*_{12} ou p^*_{21} avec N_2 ou N_1 tirages

soit :

$$T_1 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \in SG1}}^{i=N_1} \frac{(n_i - p^*_{12} N_2)^2}{p^*_{12} N_2} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \in SG2}}^{i=N_2} \frac{(n_i - p^*_{21} N_1)^2}{p^*_{21} N_1}$$

T_1 suit une loi du khi-deux à $N_1 + N_2 - 2$ degrés de liberté.

Le nombre de choix reçus n_j par l'individu j de la part des membres de l'autre groupe suit une loi binomiale de probabilité p^*_{12} ou p^*_{21} avec N_2 ou N_1 tirages,

soit :

$$T_2 = \sum_{\substack{j=1 \\ j \in SG1}}^{j=N_1} \frac{(n_j - p^*_{21} N_2)^2}{p^*_{21} N_2} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \in SG2}}^{j=N_2} \frac{(n_j - p^*_{12} N_1)^2}{p^*_{12} N_1}$$

T_2 suit une loi du khi-deux à $N_1 + N_2 - 2$ degrés de liberté.

Le nombre de triangles complets ne peut pas servir de base de test pour les relations entre les deux sous-groupes seulement, puisque dans le triangle il y aura obligatoirement 2 individus qui appartiendront au même sous-groupe et il faudra tenir compte du modèle adopté pour les relations internes de ce sous-groupe.

Par exemple pour un groupe divisé en deux sous-groupes $SG1$ et $SG2$ au sein desquels on aurait des homogènes caractérisés par les probabilités p_1 , p'_1 , p''_1 et p_2 , p'_2 , p''_2 on aurait un nombre moyen de triangles modèles complets théorique TTH donné par la formule :

$$TTH = C^3_{N_1} (p_1 p'_1)^3 + C^3_{N_2} (p_2 p'_2)^3 + N_1 C^2_{N_2} (p_{12} p'_{21})^2 (p_2 p'_2) + N_2 C^2_{N_1} (p_{21} p'_{12})^2 (p_1 p'_1)$$

soit TC le nombre de triangles complets observé. $\frac{(TC - TTH)^2}{TTH}$ suit une loi du khi-deux à 1 degré de liberté.

Remarques. — Pratiquement on effectuera les tests sur les choix émis et reçus de manière globale pour tout le groupe en additionnant les khi-deux correspondants.

Sur un groupe où on aura effectué une division en deux sous-groupes, le modèle est représenté par 7 paramètres indépendants. Ceci signifie que sur des groupes restreints les valeurs des probabilités estimées sont très imprécises. On pourra alors tenter de regrouper des domaines de relations, ou tester des hypothèses sur la valeur de ces probabilités et le caractère significatif des différences des estimations.

Les critères selon lesquels on sépare les membres du groupe ne doivent pas être des résultats du test (par exemple une séparation selon le nombre de choix reçus), mais des caractéristiques observables indépendamment du test comme le sexe, l'âge, la race, la place dans l'organisation, etc.

Cas particuliers :

- pas de choix du sous-groupe 1 envers le sous-groupe 2 :

$$p_{12} = p'_{12} = p''_{12} = 0 \quad p'_{21} \text{ indéterminée}$$

- tous les choix possibles sont réalisés :

$$p_{12} = p_{21} = p'_{12} = p'_{21} = 1 \quad p''_{12} \text{ et } p''_{21} \text{ indéterminées}$$

- aucun choix réciproque :

$$p'_{12} = p'_{21} = 0$$

- tous les choix du sous-groupe 1 envers le sous-groupe 2 sont réciproques :

$$p''_{12} = 0 \quad p'_{21} = 1$$

5. MODÈLE DYADIQUE D'ÉVOLUTION MARKOVIENNE

Champ d'application. — Une série de questionnaires de recherche de partenaires à choix libres effectués pour un même groupe à des moments successifs.

Hypothèses. — La réalisation d'une dyade à un instant donné ne dépend que de la réalisation de cette même dyade à l'instant précédent.

Soit p_t le vecteur de probabilité des réalisations d'une dyade à l'instant t pour un domaine de relations symétriques (modèle homogène)

$$p_t = (p_0, p_1, p_2)$$

avec p_0 = probabilité d'une dyade neutre, p_1 = probabilité d'une dyade unilatérale, p_2 = probabilité d'une dyade réciproque.

Pour un domaine de relations dissymétriques (modèle homogène par morceaux), il faut distinguer le sens de la dyade unilatérale

$$p_t = (p_0, p_1, p_2, p_3)$$

avec p_0 = probabilité d'une dyade neutre, p_1 = probabilité d'une dyade unilatérale dans un sens, p_2 = probabilité d'une dyade unilatérale dans l'autre sens, p_3 = probabilité d'une dyade réciproque.

L'hypothèse d'évolution markovienne des dyades se traduit alors par la formule :

$$p_{t+1} = p_t \times M \quad (5)$$

M étant une matrice stochastique 3×3 ou 4×4 dont les coefficients sont constants.

Caractéristiques du modèle :

- Si à un instant t les choix peuvent être représentés par un modèle dyadique (homogène ou homogène par morceaux), à tout autre instant les choix seront également représentés par un modèle dyadique.

Les formules de passage des valeurs du vecteur p_t à celles des paramètres caractéristiques des modèles statiques se déduisent de manière évidente des probabilités des types de dyades dans ceux-ci.

On a toujours $p_t = p_0 \times M^t$

● Le modèle dépend du nombre de paramètres suivant :

Domaine symétrique (modèle homogène) • 2 paramètres indépendants caractéristiques du premier modèle statique
+ 6 paramètres indépendants caractéristiques de la matrice stochastique M de transition (3×3).

Domaine dissymétrique (modèle homogène par morceaux) • 3 paramètres indépendants caractéristiques du premier modèle statique
+ 12 paramètres indépendants caractéristiques de la matrice stochastique M de transition (4×4).

● Les éléments de la matrice de transition M sont les probabilités d'une dyade à un instant $t + 1$ sachant sa réalisation à un instant t .

● Sous les conditions habituelles de convergence du processus de Markov, le vecteur p_t tend vers une limite p invariante telle que $p = pM$.

Pratiquement ceci signifie que rapidement la répartition des dyades reste constante au cours du temps, les paramètres des modèles dyadiques statiques successifs ne varient pas. La valeur de ces paramètres ne dépend que de M , donc notamment est indépendante de l'état initial.

Estimation des paramètres. — On dénombre les dyades passant de chaque type à chaque autre type lors de deux observations successives.

Soit $n(t, i, j)$ le nombre de dyades passant de l'état i à l'instant t à l'état j à l'instant $t + 1$, soit $m(i, j)$ le coefficient de la ligne i et de la colonne j de la matrice stochastique de transition M

$$m^*(i, j) = \frac{\sum_t n(t, i, j)}{\sum_t n(t, i, .)}$$

$$\text{avec } n(t, i, .) = \sum_j n(t, i, j)$$

Tests de vraisemblance :

● Les matrices de passage qu'on pourrait estimer entre deux états consécutifs sont statistiquement égales à celle estimée sur l'ensemble des états consécutifs,

soit :

$$T_2 = \sum_t \sum_{i,j} \frac{[n(t, i, j) - n(t, i, .) m^*(i, j)]^2}{n(t, i, .) m^*(i, j)}$$

T_1 suit une loi du khi-deux dont le nombre de degrés de liberté est donné ci-dessous :

pour un domaine symétrique (modèle homogène), $DL = 6(r - 2)$;

pour un domaine dissymétrique (modèle homogène par morceaux), $DL = 12(r - 2)$;

avec $r =$ nombre d'observations c'est-à-dire nombre de fois où on a répété le test sociométrique sur le même groupe à intervalles réguliers.

● Les matrices de passage qu'on pourrait estimer entre deux états non consécutifs sont statistiquement égales à la puissance de la matrice M correspondante,

soit :

$$T_2 = \sum_{t,k} \sum_{i,j} \frac{[n(t, t+k, i, j) - n(t, i, .) m(i, j, k)]^2}{n(t, i, .) m(i, j, k)}$$

avec $n(t, t + k, i, j) =$ nombre de dyades de type i à l'instant t , transformées en dyades de type j à l'instant $t + k$ et $m(i, j, k) =$ coefficient de la ligne i et de la colonne j de la matrice M^k .

T_2 suit une loi du khi-deux dont le nombre de degrés de liberté est donné ci-dessous :

pour un domaine symétrique, $DL = 3(r - 1)(r - 2)$;
 pour un domaine dissymétrique, $DL = 6(r - 1)(r - 2)$.

Remarques :

● Pour estimer la matrice de transition il suffit de deux observations. En revanche pour tester l'hypothèse markovienne, il est nécessaire de posséder au moins trois observations obtenues à un intervalle de temps constant ($r \geq 3$).

● Dans un modèle homogène par morceaux, on peut avoir pour chaque domaine de relation une matrice de transition différente, de la même manière qu'on avait des modèles dyadiques statiques avec des valeurs différentes. Cette multiplicité de paramètres représentatifs montre à l'évidence qu'il faudra explorer systématiquement le caractère significatif des différences entre les estimations et tenter des regroupements.

Cas particuliers. — Certains coefficients de la matrice de transition peuvent être nuls si on n'observe pas de passage entre les deux états correspondant à cette carte.

Certaines lignes de la matrice peuvent être indéterminées si l'état des dyades correspondant n'est jamais observé (sauf éventuellement dans la dernière observation) on a pour cette ligne $i : \sum_t n(t, i, \cdot) = 0$

6. EXEMPLES

EXEMPLE N° 1 : $N = 18$.

Modèle homogène : $p = 0,40$, $p' = 0,57$, $p'' = 0,28$

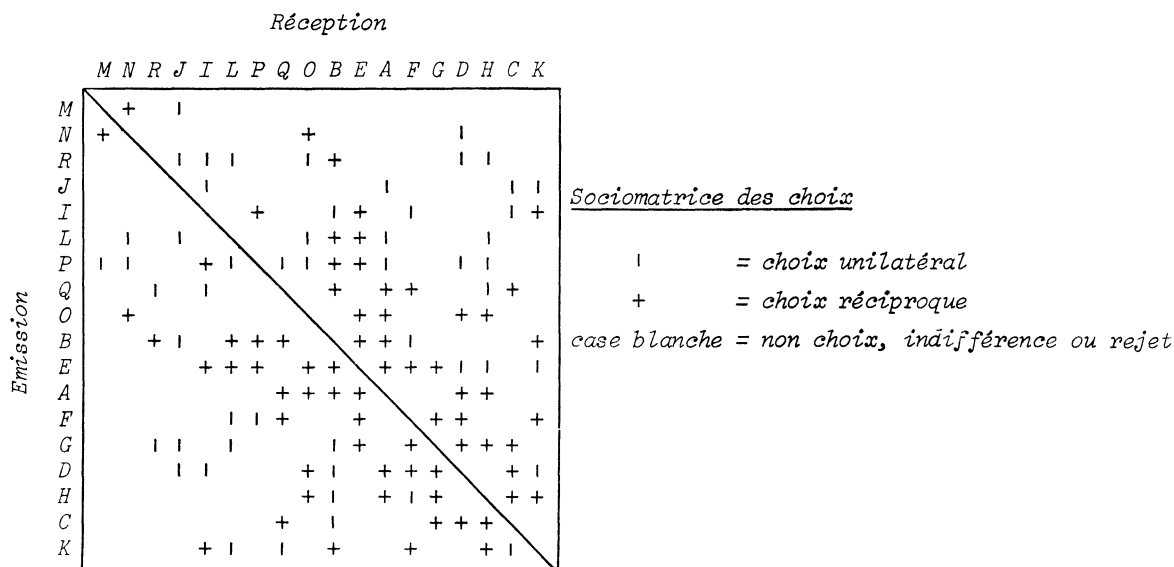
Khi-deux sur les choix émis = 15, khi-deux sur les choix reçus = 16, 17 DL, seuil à 10 % = 24,77.
 Triangles observés : 12, nombre moyens théorique : 9,8 ; khi-deux = 0,5, seuil à 10 % = 2,7.

EXEMPLE N° 2 : $N = 22$.

a. Modèle homogène : $p = 0,24$, $p' = 0,62$, $p'' = 0,12$.

Khi-deux sur les choix émis = 14, khi-deux sur les choix reçus = 23, 21 DL, seuil à 10 % = 29,6.
 Triangles observés : 10, nombre moyen théorique : 5,4 ; khi-deux = 3,9, seuil à 10 % = 2,7.

b. Modèle à 6 domaines : (1) pensionnaires, (2) demi-pensionnaires, et (3) externes, et toutes les combinaisons deux à deux.



Exemple 1. Test sociométrique sur un groupe de 18 étudiants en psychologie sociale

Réception

		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	Total	+		
Emission	A					+	+																		4	2	
	B		+				+																			2	2
	C			+																				+		4	3
	D				+		+					+	+										+	+	+	9	8
	E					+						+						+	+	+				+		7	6
	F						+						+				+	+								5	5
	G							+					+											+		4	4
	H								+																	5	3
	I									+				+												8	2
	J										+														+	7	4
	K											+														4	4
	L												+											+		4	3
	M													+												3	2
	N														+											5	3
	O															+										4	2
	P																+									4	2
	Q																	+								4	2
	R																									4	1
	S																									5	2
	T																									4	3
	U																									9	4
	V																									6	2
																										5	3
	Total		8	10	4	8	9	7	6	4	3	7	5	4	4	7	3	3	1	4	3	6	2	4	112		
	+		2	2	3	8	6	5	4	3	2	4	4	3	2	3	2	2	1	2	3	4	2	3		70	

Pensionnaires : A, B, E, F, H, I, K, N, V
 Demi-pensionnaires : J, M, O, P, Q
 Externes : D, G, L, R, S, T, U

Exemple 2. Classe de 1^e Filles

Probabilité du modèle b.

Domaine	p	p'	p''
—	—	—	—
	%	%	%
11.....	44	65	28
22.....	20	50	13
33.....	62	85	25
12.....	16	50	5
21.....	24	75	14
31.....	13	100	12
13.....	1	11	0
23.....	17	50	10
32.....	17	50	10

Khi-deux sur les choix émis = 61,3

Khi-deux sur les choix reçus = 52,5, 57 DL, seuil à 10 % = 70

Triangles observés : 11, nombre théorique de triangles : 9,56; khi-deux = 0,22, seuil à 10 % = 2,71.

c. *Modèle à 4 domaines* : (1) pensionnaires, (2) externes, (3) demi-pensionnaires entre elles et avec les autres, (4) externes et pensionnaires entre elles.

$p_1 = 0,44$	$p_2 = 0,62$	$p_3 = 0,19$	$p_{4*} = 0,01$	$p_{4**} = 0,13$
$p'_1 = 0,65$	$p'_2 = 0,85$	$p'_3 = 0,56$	$p'_{4*} = 0,11$	$p'_{4**} = 1,00$
$p''_1 = 0,28$	$p''_2 = 0,25$	$p''_3 = 0,10$	$p''_{4*} = 0,00$	$p''_{4**} = 0,12$

Khi-deux sur les choix émis = 45,6

Khi-deux sur les choix reçus = 47

seuil à 50 % = 50,5

Nombre théorique de triangles = 9,56

d. *Modèle à 2 domaines* : (1) pensionnaires entre elles plus externes entre elles, (2) pensionnaires vis-à-vis des externes et demi-pensionnaires entre elles et vis-à-vis de toutes les autres.

$p_1 = 0,50$	$p_2 = 0,14$
$p'_1 = 0,73$	$p'_2 = 0,48$
$p''_1 = 0,27$	$p''_2 = 0,08$

Khi-deux sur les choix émis = 36,3

Kki-deux sur les choix reçus = 41,8

seuil à 20 % = 44

Nombre théorique de triangles = 9

EXEMPLE N° 3 : $N = 20$.

Modèles à 3 domaines : (1) garçons, (2) filles, (3) garçons vis-à-vis des filles.

Résultats observés :

	C_1	C_2	C_3	$T = C_1 + C_2 + C_3$
	—	—	—	—
	%	%	%	%
Sous-groupe des 7 garçons (21 dyades) :				
p	40	50	36	42
p'	47	57	53	53
p''	36	43	26	34
Sous-groupe de 13 filles (78 dyades) :				
p	18	16	19	17
p'	21	17	35	25
p''	16	15	15	15
Relations entre les sous-groupes (91 dyades) :				
Garçons vis-à-vis des filles :				
p	23	23	21	22
p'	18	23	26	22
p''	28	23	17	22
Filles vis-à-vis des garçons :				
p	48	43	46	46
p'	38	43	58	46
p''	51	43	43	46

	A	B	C	D	E	F	G	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	
A	+	+								+	+										
B	+	+		+				+							+	+					
C	+	+														+	+				
D								+													
E	+																				
F																					
G													+								
h																					
i	+	+											+								+
j												+									
k																					
l									+												
m																					
n	+						+	+													
o																					
p	+	+																			
q	+																				
r		+																			
s																					
t								+													

C_1

	A	B	C	D	E	F	G	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	
A	+	+	+																		+
B	+							+							+	+					
C	+					+									+				+		
D	+		+					+													
E			+																		
F			+																	+	
G			+										+								
h																					
i	+	+												+							+
j																					
k																					
l									+												
m																					
n	+		+				+	+													
o																					
p	+																				
q	+																				
r	+		+						+												
s																					
t								+													

C_2

	A	B	C	D	E	F	G	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	
A	+																				
B			+					+							+	+					+
C				+																	
D	+	+	+					+	+												
E		+	+					+													
F																					
G													+					+			
h				+																	
i	+	+	+											+							+
j																					
k																					
l																					
m						+														+	
n	+	+					+	+													
o			+				+	+													
p	+																				
q	+																				
r					+																
s									+												
t		+																			

C_3

Exemple 3. *Campeurs de 18 à 25 ans, 3 tests à une semaine d'intervalle*

Test des modèles statiques.

	C_1	C_2	C_3
T_1 : variable test des expansivités.....	29	22	29
T_2 : variable test des choix reçus.....	31	44	35
Nombre de degrés de liberté des lois du khi-deux suivies par T_1 et T_2	36	36	36
Nombre théorique de triangles.....	0,83	1,70	1,60
Nombre de triangles observé.....	2	3	3

Test du modèle markovien.

	+	I	
+	0,40	0,30	0,30
I	0,33	0,28	0,37
	0,00	0,57	0,43

Garçons entre eux

	+	I	
+	0,60	0,20	0,20
I	0,02	0,37	0,61
	0,03	0,21	0,76

Filles entre elles

	+	$\overset{I}{G \rightarrow F}$	$\overset{I}{F \rightarrow G}$	
+	0,47	0,12	0,35	0,06
$\overset{I}{G \rightarrow F}$	0,08	0,40	0,12	0,40
$\overset{I}{F \rightarrow G}$	0,06	0,03	0,53	0,38
	0,08	0,08	0,23	0,61

Garçons vis-à-vis des filles

Matrices de transition

Domaine	Valeur du khi-deux	DL	Seuil à 10%
1	2,6	6	12,59
2	3,7	6	12,59
3	7,8	12	21,03

Test sur l'égalité des matrices de transition de deux observations consécutives

Domaine	Valeur du khi-deux	DL	Seuil à 10%
1	6,7	6	12,59
2	11,7	6	12,59
3	10,9	12	21,03

Test sur la matrice de transition entre le 1er et le 3e état

7. L'USAGE DES MODÈLES EN SOCIOMÉTRIE

On a pu sur les exemples précédents voir concrètement la démarche d'utilisation des modèles dyadiques sur des résultats de test sociométriques. L'objectif est de rechercher le modèle le plus simple qui permette de rendre compte des données recueillies. Pour cela on teste successivement différentes hypothèses sur la morcellisation du groupe. On commence par l'hypothèse la plus simple, l'homogénéité, et si celle-ci est inacceptable on tente une morcellisation selon les caractéristiques des membres du groupe qui semblent les plus pertinentes. Si on trouve une hypothèse acceptable on essaiera ensuite de la simplifier en regroupant les domaines, dans le but de diminuer le nombre de paramètres caractéristiques, donc de trouver le modèle le plus simple possible.

Cette démarche itérative suppose des moyens de calcul automatique pour effectuer commodément les estimations et les tests de vraisemblance. Un programme conversationnel de mise en œuvre des modèles dyadiques sur ordinateur sera prochainement disponible.

Sur le plan des principes il convient de remarquer qu'on va dans la pratique choisir un modèle (ou le rejet de tout modèle) parmi un ensemble de modèles possibles alors que l'outil statistique employé n'est pas adapté à cette question. En effet il faudrait utiliser un test de discriminance entre les hypothèses et on a seulement décrit des tests de vraisemblance du modèle, c'est-à-dire de jugement du modèle dans l'absolu. Il convient notamment de se demander quel est le risque en suivant une procédure de ce type d'être conduit à accepter une hypothèse alors que les observations correspondent à une autre hypothèse.

Une exploration de ce problème a permis de montrer que bien que les tests aient été construits dans la seule optique de juger la vraisemblance du modèle dans l'absolu, ils permettent dans la pratique d'évaluer le risque que les observations correspondent à un modèle très éloigné, la notion d'éloignement entre modèles correspondant à l'écart entre les valeurs des probabilités pondéré par la taille des groupes sur lesquels elles s'appliquent. Les tests sur la répartition des choix émis et reçus conduisent à rejeter le modèle homogène si les observations correspondent à un modèle homogène par morceaux où des sous-groupes de tailles pas trop disparates auraient des probabilités de choix de valeur très différentes.

De plus, le test effectué sur les triangles est extrêmement sensible à la tendance à la mutualité des choix à l'intérieur des sous-groupes, ce qui signifie qu'on teste de manière implicite les disparités pouvant survenir dans la valeur des probabilités conditionnelles selon les sous-groupes.

Ces remarques ne constituent qu'une réponse partielle et dans la pratique, après avoir exploré diverses hypothèses on aura plusieurs modèles acceptables entre lesquels on devra choisir en fonction moins d'un outil de discriminance statistique que d'un souci de simplicité et surtout du caractère significatif de l'hypothèse pour la réalité psychosociale du groupe.

BIBLIOGRAPHIE

- SCHÜTZENBERGER A., *La Sociométrie*, Paris, Presses universitaires de France, 1972, 136 p.
- DAVAL R., *Traité de psychologie sociale*, Paris, Presses universitaires de France, 1963, 530 p. et 487 p.
- BRONFENBRENNER U., « A constant frame of reference for sociometric research », *Sociometry*, vol. 6, pp. 363-397; vol. 7, pp. 40-75.
- MAISONNEUVE J., *Psychosociologie des affinités*, Paris, Presses universitaires de France, 1966, 545 p.
- MORENO J. L., *Fondements de la sociométrie*, Paris, Presses universitaires de France, 1954.
- NORTHWAY M. L., *Initiation à la sociométrie*, Paris, Dunod, 1964, 89 p.
- PARLEBAS P., « Effet Condorcet et dynamique sociométrique », *Mathématiques et Sciences humaines*, n° 36, 1971, et n° 37, 1972.
- PEAUCELLE J. L., *La Modélisation des attrait*s, thèse de 3^e Cycle, Paris, 1973, 469 p.