Y. KERGALL

Étude des tresses de Gutmann en algèbre à P valeurs

Mathématiques et sciences humaines, tome 46 (1974), p. 5-19
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1974__46__5_0>

Math. Sci. hum. (12e année, n° 46, 1974, pp. 5-19)

ÉTUDE DES TRESSES DE GUTMANN EN ALGÈBRE A *P* VALEURS

par

Y. KERGALL [1]

RÉSUMÉ

La notion de tresse de Gutmann a été introduite ([4]) *pour généraliser la notion de chaîne de Gutmann qui restait souvent assez loin du protocole observé. Les tresses de Gutmann ont été étudiées* ([3], [4], [6]) *en considérant que les réponses au questionnaire étaient dichotomiques. Nous supposons ici que les réponses aux questions appartiennent à un ensemble fini totalement ordonné quelconque.*

SUMMARY

The notion of Gutmann tress has been introduced ([4]) *in order to generalize the notion of Gutmann chain which often remained far away from the observed protocol. The Gutmann tresses have been studied* ([3], [4], [6]) *considering that answers to the questionary were dichotomic. We suppose here that the answers to the questions belong to any finite and totally ordered set.*

1. INTRODUCTION [2]

La notion de tresse de Gutmann a été introduite dans l'analyse des questionnaires pour généraliser la notion d'échelle de Gutmann qui restait souvent assez loin du protocole observé [4]. Les tresses de Gutmann ont été étudiées en considérant que les réponses au questionnaire étaient dichotomiques [3], [4]. Dans [6] on a introduit deux correspondances de Galois rendant compte des liaisons entre tresses, préordres et fuseaux d'ordres totaux définis sur un même ensemble E de questions. Nous supposons ici que les réponses aux questions appartiennent à un ensemble fini totalement ordonné quelconque. Au paragraphe deux, nous définissons une correspondance de Galois entre le treillis des parties d'un ensemble H et un treillis T ; cette correspondance généralise la correspondance de Galois entre préordres et topologies [6], ainsi que la classique correspondance de Galois associée à une relation entre deux ensembles [1]. Au paragraphe trois, on considère un ensemble E de n questions, les réponses à chaque question appartenant à un ensemble totalement ordonné $L_i = \{0, 1, ..., p - 1\}$. L'ensemble H des réponses possibles à ce questionnaire est donc le treillis distributif produit direct des n chaînes L_i. En prenant pour T le treillis P_E des préordres sur E, on définit une corres-

1. Laboratoire d'Informatique Appliquée, Université de Tours, Parc de Grandmont, 37 - TOURS.
2. L'auteur tient à remercier MM. Kuntzmann et Monjardet dont les suggestions lui ont été d'un grand profit.

pondance de Galois entre $P(H)$ et P_E c'est-à-dire entre protocoles et préordres. On appelle *tresse* les protocoles fermés pour la fermeture définie sur $P(H)$ par la correspondance de Galois. On montre facilement, en utilisant des résultats du paragraphe 2, que le treillis des tresses est dual du treillis des préordres définis sur E et on établit certaines propriétés de cette correspondance. Au paragraphe 4 on montre que les tresses sont des sous-treillis de H contenant la diagonale et on établit d'autres résultats concernant, par exemple, l'effectif de certaines tresses. Au paragraphe suivant on aborde les problèmes de conservation des tresses pour diverses opérations. Le dernier paragraphe a pour but d'obtenir une caractérisation « géométrique » des tresses comme sous-treillis particuliers de H ; cette caractérisation s'appuie sur des résultats concernant les sous-treillis de H qui impliquent également la généralisation de l'expression de la fonction caractéristique du complémentaire d'un sous-treillis, obtenue en algèbre de Boole ($f = \Sigma\, x_i x'_j$ cf [4]).

2. Rappels et préliminaires

2.1 *Treillis*

1re *définition* : Un treillis est un ensemble T muni de 2 lois notées $\wedge$ et $\vee$ qui sont respectivement associatives, commutatives, idempotentes et absorbantes.

2e *définition* : Un treillis est un ensemble T muni d'une relation d'ordre, notée $\leqslant$, telle que quels que soient $a, b \in T$, $sup\,(a, b)$ et $inf\,(a, b)$ existent et sont, par nature, uniques.

Les 2 définitions sont équivalentes :

— si T est donné par la première définition, la relation d'ordre est définie par :

$$a \leqslant b \Longleftrightarrow a \wedge b = a \Longleftrightarrow a \vee b = b$$

— si T est donné par la deuxième définition, les 2 lois sont définies par :

$$a \vee b = sup\,(a, b)$$
$$a \wedge b = inf\,(a, b)$$

2.2 *Treillis des préordres*

Soit E un ensemble fini, $E = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et P_E l'ensemble de tous les préordres sur E.

P_E est un treillis, on définit en effet sur P_E une relation d'ordre et 2 lois qui ont les propriétés vues plus haut.

Relation d'ordre : on dit qu'un préordre P_1 est plus fin qu'un préordre P_2 si et seulement si $x_i \underset{\mathrm{P}_1}{\leqslant} x_j \Rightarrow x_i \underset{\mathrm{P}_2}{\leqslant} x_j$ que l'on note par $\mathrm{P}_1 \subseteq \mathrm{P}_2$.

Si on note G_{P} le graphe représentatif d'une relation d'ordre comme le sous-ensemble correspondant de $E \times E$, on a :

$$\mathrm{P}_1 \underset{P_E}{\subseteq} \mathrm{P}_2 \Longleftrightarrow G_{\mathrm{P}_1} \underset{E \times E}{\subseteq} G_{\mathrm{P}_2}$$

Section finissante : On appelle section finissante d'un préordre P sur E, l'ensemble noté $F\,(\mathrm{P})$ de tous les préordres moins fins que P.

$$F\,(\mathrm{P}) = \{\mathrm{P}' \in P_E : \mathrm{P} \subseteq \mathrm{P}'\}$$

Intersection

$\mathrm{P} = \mathrm{P}_1 \wedge \mathrm{P}_2$ est défini par $x_i \underset{\mathrm{P}}{\leqslant} x_j \Longleftrightarrow x_i \underset{\mathrm{P}_1}{\leqslant} x_j$ et $x_i \underset{\mathrm{P}_2}{\leqslant} x_j$. On a $\mathrm{P} = \mathrm{P}_1 \wedge \mathrm{P}_2 \Longleftrightarrow G_{\mathrm{P}} = \mathrm{G}_{\mathrm{P}_1} \cap \mathrm{G}_{\mathrm{P}_2}$

Union

L'union « ensembliste » de 2 préordres P_1 et P_2 définie par :

$$x_i \underset{\mathrm{P}_1 \vee \mathrm{P}_2}{\leqslant} x_j \Longleftrightarrow x_i \underset{\mathrm{P}_1}{\leqslant} x_j \quad \text{ou} \quad x_i \underset{\mathrm{P}_2}{\leqslant} x_j$$

n'est pas nécessairement un préordre.

On définit donc l'union de 2 préordres dans P_E par la fermeture transitive de $P_1 \vee P_2$ ce que l'on note $\overline{P_1 \vee P_2}$

On a : $P = \overline{P_1 \vee P_2}$ $\quad G_P = \overline{G_{P_1} \underset{E \times E}{\cup} G_{P_2}}$

P_E, l'ensemble des préordres sur E, est un treillis *coatomique*, l'ensemble de ses coatomes (il y en a $2^n - 2$) étant l'ensemble des préordres totaux à 2 classes que l'on appelle préordres maximaux. Le treillis des préordres P_E est étudié plus en détail dans [1] (chapitre 6).

2.3 *Fermeture*

Définition : on appelle fermeture dans un ensemble ordonné $(H, \leqslant)$ une application $g : H \to H$ ayant les 3 propriétés :

a) $\forall x, \forall y \in H$ $\qquad x \leqslant y \Rightarrow g(x) \leqslant g(y)$
b) $\forall x \in H$ $\qquad x \leqslant g(x)$
c) $\forall x \in H$ $\qquad g(g(x)) = g(x)$

Un fermé est un élément x de H tel que $g(x) = x$.

Propriété : Dans un treillis, l'intersection de 2 fermés est un fermé.

2.4 *Correspondance de Galois*

Définition : On a une correspondance de Galois entre deux ensembles ordonnés E et F s'il existe 2 applications φ de E dans F et ψ de F dans E vérifiant :

1) $\forall x, \forall x' \in E$ alors $x \leqslant x' \Rightarrow \varphi(x') \leqslant \varphi(x)$
$\forall y, \forall y' \in F$ alors $y \leqslant y' \Rightarrow \psi(y') \leqslant \psi(y)$

2) on pose $f = \varphi \circ \psi$ et $g = \psi \circ \varphi$
alors $\quad \forall x \in F \quad x \leqslant f(x)$
$\forall y \in E \quad y \leqslant g(y)$

Propriété 1 : g et f sont deux fermetures dans E et F.

Propriété 2 : Si on a une correspondance de Galois entre deux treillis E et F alors l'ensemble des fermés de E et de F sont deux treillis *duaux*. Dans l'ensemble des fermés de E (de F) on conserve l'intersection de E (de F) et pour union on prend la fermeture de l'union dans E (dans F).

Définitions

Soit H un ensemble quelconque et T un treillis. Soit φ une application de H dans T. Cette application φ induit une application de $P(H)$ dans T.

$$H \xrightarrow{\varphi} T \qquad\qquad P(H) \xrightarrow{\varphi} T$$
$$x \mapsto \varphi(x) \qquad\qquad X \mapsto \varphi(X) = \bigwedge_{x \in X} \varphi(x)$$

Soit ψ l'application de T dans $P(H)$ définie par :

$$T \xrightarrow{\psi} P(H)$$
$$t \mapsto \psi(t) = \{x \in H : t \leqslant \varphi(x)\}$$

Propriétés

Proposition 1 : (φ, ψ) est une correspondance de Galois entre $P(H)$ et T.

On pose $f = \varphi \circ \psi$ et $g = \psi \circ \varphi$

a) Pour tout X_1 et X_2 de $P(H)$ alors $X_1 \subseteq X_2$ implique $\varphi(X_2) \leqslant \varphi(X_1)$

Soit $t_1 = \varphi(X_1)$
$t_2 = \varphi(X_2 - X_1)$

On a par définition de φ : $\varphi(X_2) = t_1 \wedge t_2$
donc $\varphi(X_2) \leqslant \varphi(X_1)$.

b) Pour tout t_1 et t_2 appartenant à T, $t_1 \leqslant t_2$ implique $\psi(t_2) \subseteq \psi(t_1)$: Soit $x \in \psi(t_2)$; alors $t_2 \leqslant \varphi(x)$ et $t_1 \leqslant \varphi(x)$ donc $x \in \psi(t_1)$ et $\psi(t_2) \subseteq \psi(t_1)$.

c) Pour tout $X \in P(H)$, $X \subseteq \psi \circ \varphi(X)$
Soit $x \in X$; alors $\varphi(X) \leqslant \varphi(x)$ et $x \in \psi \circ \varphi(X)$

d) Quel que soit $t \in T$, $t \leqslant \varphi \circ \psi(t)$

$$\psi(t) = \{x \in H : t \leqslant \varphi(x)\}$$

donc $\varphi(\psi(t)) = \wedge\, \varphi(x)$ avec $t \leqslant \varphi(x)$
et $t \leqslant \varphi(x)$, quel que soit x, implique $t \leqslant \wedge\, \varphi(x) = \varphi \circ \psi(t)$.

On dit qu'un treillis T est inf-expressible si tout élément de T est infimum d'éléments inf-irréductibles. Dans le cas particulier où tout élément de T est infimum de coatomes, T est dit coatomique. Notons I l'ensemble des éléments inf-irréductibles du treillis T.

Proposition 2 : Dans la correspondance de Galois (φ, ψ) entre $P(H)$ et un treillis inf-expressible T, la fermeture sur T, $f = \varphi \circ \psi$, est l'application identique si et seulement si $\varphi(H)$ contient l'ensemble I des inf-irréductibles de T.

Démonstration

- Supposons que $\varphi(H) \supseteq I$. Soit $t \in T$; $t = \wedge t_i$, $t_i \in I$; pour tout t_i, il existe $x_i \in H$ avec $t_i = \varphi(x_i)$ fermé de T. Donc $t = \wedge\, \varphi(x_i)$ est un fermé et $t = f(t)$.
- Supposons que pour tout t de T, $t = f(t)$. En particulier si $t \in I$, $t = \varphi \circ \psi(t)$. Posons $X = \psi(t) = \{x \in H : t \leqslant \varphi(x)\}$. On a $t = \varphi(X) = \bigwedge_X \varphi(x)$. Mais t étant inf-expressible, il existe $x \in X$ avec $t = \varphi(x)$.

Soit t un élément du treillis T ; on pose

$F(t) = \{t' \in T : t \leqslant t'\}$
$F^1(t) = F(t) \cap \varphi(H) = \{\varphi(x) : t \leqslant \varphi(x)\} = \{\varphi(x) : x \in \psi(t)\}$
$F^2(t) = \{$éléments minimaux de $F^1(t)\} \supseteq F(t) \cap \{$éléments minimaux de $\varphi(H)\}$

Proposition 3

Dans la correspondance de Galois (φ, ψ) entre $P(H)$ et T, on a

$$\psi(t) = \bigcup_{F(t)} \psi(t_i) = \bigcup_{F^1(t)} \psi(t_i) = \bigcup_{F^2(t)} \psi(t_i)$$

Démonstration

Pour tout $t_i \in F(t)$ on a $t \leqslant t_i$, donc $\psi(t_i) \subseteq \psi(t)$; donc

$$\bigcup_{F^2(t)} \psi(t_i) \subseteq \bigcup_{F^1(t)} \psi(t_i) \subseteq \bigcup_{F(t)} \psi(t_i) \subseteq \psi(t)$$

Il suffit donc de montrer $\psi(t) \subseteq \bigcup_{F^2(t)} \psi(t_i)$. Or $x \in \psi(t)$ implique $t \leqslant \varphi(x)$, donc $\varphi(x) \in F^1(t)$.

Dans $F^1(t)$ il existe un élément minimal $t_i = \varphi(y)$, tel que $t \leqslant t_i \leqslant \varphi(x)$; donc $x \in \psi(t_i)$, $t_i \in F^2(t)$ et $x \in \bigcup_{F^2(t)} \psi(t_i)$.

Cas particuliers

1) Soit E un ensemble fini ; posons $H = P(E)$, $T = P(E^2)$. Si X est une partie de E posons $\varphi(X) = \{(x, y), x \in X, y \in E\}$. La correspondance de Galois (φ, ψ) de la proposition 1 n'est autre que la classique correspondance de Galois induisant la dualité entre préordres et topologies définies sur E [2].

2) Soit E et E' deux ensembles finis ; posons $H = E$ et $T = P(E')$ et considérons une application φ de H dans T, c'est-à-dire une correspondance entre E et E'. La correspondance de Galois (φ, ψ) de la proposition 1 n'est autre que la classique correspondance de Galois associée à une correspondance φ entre deux ensembles ([2], [1] chapitre V).

3. Treillis des tresses

Soit $E = \{1, 2, ..., n\}$ et $L_i = \{0, 1, ..., p-1\}$. On pose $H = \prod_{i=1}^{n} L_i$. H, treillis distributif produit direct de n chaînes L_i, est encore appelé algèbre à p valeurs ou algèbre de Post ou hyperpavé. Nous utiliserons ici le terme d'*hyperpavé*. On note $H(n, p)$ ou H l'hyperpavé.

Soit P_E le treillis des préordres sur E.

On définit une application φ de H dans P_E qui à un point x de H fait correspondre un préordre total sur les composantes :

$$H \xrightarrow{\varphi} P(_E)$$
$$x = (x_1, ..., x_n) \quad \varphi(x) = [(i, j) \in \varphi(x) \Leftrightarrow x_i \leqslant x_j]$$

Exemple : $n = 8$, $p = 3$
$x = (0, 2, 1, 1, 0, 2, 2, 0)$

$\varphi(x) =$

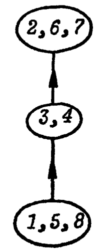


Figure 1

$\varphi(x)$ a au plus q classes, avec $q = min(p, n)$.

On étend la définition de φ : à une partie X de H on fait correspondre le préordre $\varphi(X)$ défini par :

$$P(H) \xrightarrow{\varphi} P_E$$
$$X \qquad \varphi(X) = \bigcap_{x \in X} \varphi(x)$$

et on définit $\psi : P_E \xrightarrow{\psi} P(H)$
$$P \qquad \psi(P) = \{x \in H : P \subseteq \varphi(x)\}$$

On peut alors utiliser les résultats du paragraphe 2 :

Proposition 1 : (φ, ψ) est une correspondance de Galois.

Proposition 2 : $f = \varphi \circ \psi$ est l'application identique.

Il suffit de montrer que $\varphi(H)$ contient l'ensemble des coatomes de P_E.

En effet soit P_o un coatome de P_E.

Il s'écrit (Fig. 2) :

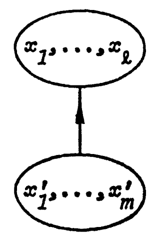


Figure 2

Le point x_o obtenu en affectant 1 aux composantes x_i $(i = 1, ..., l)$ et 0 aux composantes x'_j $(j = 1, ..., m)$ vérifie bien $P_o = \varphi(x_o)$.

Donc $\varphi(H) \supseteq \{\text{coatomes de } P_E\}$ et pour tout P, $\varphi \circ \psi(P) = P$.

On sait que $f = \varphi \circ \psi$ dans P_E et $g = \psi \circ \varphi$ dans $P(H)$ sont des opérations de fermeture et que les deux ensembles de fermés de P_E et $P(H)$ forment deux treillis duaux (voir rappels). L'ensemble des fermés de P_E est P_E lui-même d'après la proposition 2.

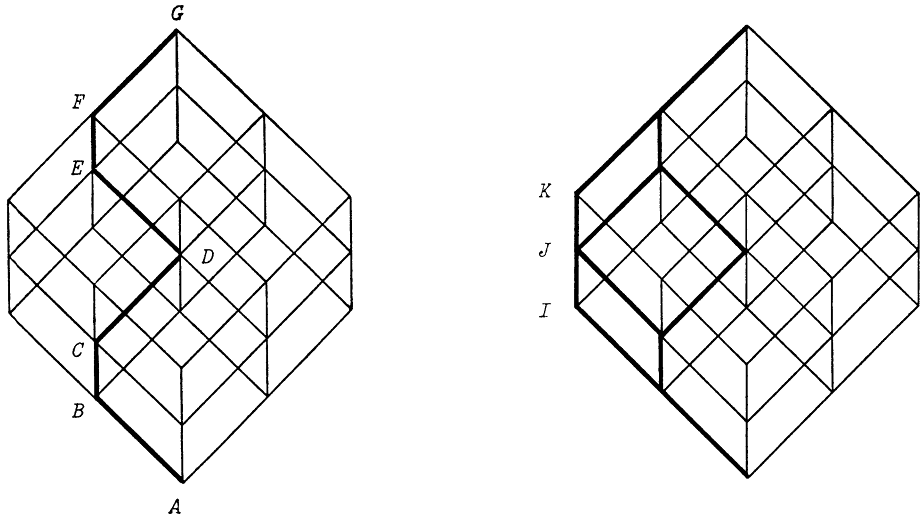
Les fermés de $P(H)$ sont les images par ψ des préordres. Ce sont donc les ensembles de la forme $X = \psi(P)$.

Définitions

1) On dit que $x \in H$ respecte le préordre P si $x \in \psi(P)$ c'est-à-dire, si $P \subseteq \varphi(x)$.

2) On appelle *tresse* un fermé de $P(H)$ pour g, donc un ensemble de la forme $X = g(X) = \psi(P)$, c'est-à-dire l'ensemble de tous les points de H respectant le même préordre P.

3) Si $X \subseteq H$, on appelle $g(X)$ la tresse associée à X, c'est-à-dire la plus petite tresse qui contient X (exemple, Fig. 3.).



$X = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ $\quad$ $g(X) = X \cup \{I, J, K\}$

$\varphi(X) = [x \leqslant y \leqslant z]$

Figure 3

Soit T le treillis des tresses ; il est dual du treillis des préordres sur E. On définit l'union ($\vee$) et l'intersection ($\wedge$) de deux tresses par :

$$T_1 \wedge T_2 = T_1 \cap T_2$$
$$T_1 \vee T_2 = g(T_1 \cup T_2)$$

De plus, en notant P_1 et P_2 les préordres associés à T_1 et T_2 et $\overline{P_1 \cup P_2}$ la fermeture transitive de $P_1 \cup P_2$:

$$T_1 \wedge T_2 = \psi(P_1) \wedge \psi(P_2) = \psi\,\overline{(P_1 \cup P_2)}$$
$$T_1 \vee T_2 = g(\psi(P_1) \cup \psi(P_2)) = \psi(P_1 \cap P_2)$$

Notations : On note $c(P)$ le nombre de classes du préordre P et $q = min\,(c(P), p)$

Soit $F(P) = \{P' \in P_E : P \subseteq P'\}$

$F^1(P) = F(P) \cap \varphi(H)$

$F^2(P) = \{$préordres minimaux de $F^1(P)$, pour la relation d'ordre $(\subseteq)$ dans $P_E\}$

Lemme 1 : $\varphi(H) = \{$préordres totaux $P \in P_E$ avec $c(P) \leqslant q_1\}$ où $q_1 = min\,(n, p)$.

Il est clair que si $P \in \varphi(H)$ alors P est un préordre total qui ne peut avoir plus de n classes ou plus de p classes.

Réciproquement, à un préordre total $P \in P_E$ ayant q' ($q' \leqslant q_1$) classes, on peut toujours associer un point x de H tel que $\varphi(x) = P$.

Soit P un préordre total ayant q' classes notées $c_1, \ldots, c_{q'-1}, c_{q'}$. Alors, puisque $q' \leqslant q_1 \leqslant p$, on peut affecter aux composantes de c_i $(1 \leqslant i \leqslant q')$ la valeur i et ainsi faire correspondre à P un point x de H tel que $\varphi(x) = P$.

Lemme 1'

$F^1(P) = F(P) \cap \varphi(H)$

$= \{$préordres totaux $P_i \in P_E$ avec $P \subseteq P_i$ et $c(P_i) \leqslant q = min\,(c(P), p)\}$.

Lemme 2 : $F^2(P) = \{$préordres totaux P_i, à q classes, $P \subseteq P_i\}$.

Soit P_2, préordre total ayant q classes et $P \subseteq P_2$. Supposons que P_2 ne soit pas un élément minimal de $F^1(P)$. Alors il existe $P_1 \in F^1(P)$ tel que $P_1 \subset P_2$ et $c(P_1) \leqslant q$.

On a $P_1 \subset P_2$ et donc P_1 est un préordre total auquel on a rajouté au moins un couple pour obtenir P_2. P_2 a donc au moins une classe de moins que P_1 et $c(P_1) > c(P_2) = q$, ce qui est impossible donc P_2 est minimal dans $F^2(P)$.

Réciproquement : Soit $P_1 \in F^2$ (P). P_1 est un préordre total minimal dans F^1 (P). On sait que $c(P_1) \leqslant q$. Montrons que $c(P_1) = q$.

Supposons que $c(P_1) = k < q \leqslant c(P)$. Montrons qu'il existe alors un préordre total P_2 tel que $P \subseteq P_2 \subset P_1$ et $c(P_2) \leqslant q$ ce qui contredira la minimalité de P_1.

En effet, si $P \subset P_1$ alors les classes de P_1 sont union de classes de P. Il existe au moins une classe c_i de P_1, union d'au moins deux classes de P : $c_i = c_{i1} + c_{i2} + \ldots$

On pose $c'_i = c_{i1}$ et $c''_i = c_i - c_{i1}$. Soit P_2 le préordre total obtenu en remplaçant c_i par c'_i et c''_i : $c(P_2) = k + 1 \leqslant q$ et $P_2 \subset P_1$, C.Q.F.D.

On a donc d'après la proposition 3 du paragraphe 2.4 :

$$\boxed{\psi(P) = \bigcup_{P_i \in F(P)} \psi(P_i) = \bigcup_{P_i \in F^1(P)} \psi(P_i) = \bigcup_{P_i \in F^2(P)} \psi(P_i)}$$

Cas particuliers

— $p = 2$: Si $p = 2$ alors F^2 (P) est l'ensemble des préordres totaux à 2 classes moins fins que P et on a :

$$P = \bigcap_{P_i \in F^2(P)} P_i \qquad \psi(P) = \bigcup_{P_i \in F^2(P)} \psi(P_i)$$

— Ordres partiels : Soit O un ordre partiel ; alors

$$c(0) = n \text{ et } q = \mathit{min}\,(p, n)$$

Supposons $n \leqslant p$; on a $q = n$ et F^2 (P) n'est autre que l'ensemble des ordres totaux O_i moins fins que O et $\psi(O) = \bigcup_i \psi(O_i)$

4. Etude des tresses

4.1 *Cas particuliers*

Dans P_E on note Δ l'élément supremum, c'est-à-dire le préordre le moins fin, celui qui n'a qu'une seule classe.

$$\psi(\Delta) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in H : x_i = k, \forall i \in E, \text{ et } 0 \leqslant k \leqslant p - 1\}$$

$\psi(\Delta)$ est la *diagonale* de H. On note $D = \psi(\Delta)$

De même si U est l'élément infimum de P_E, alors $\psi(U) = H$.

Remarque

Soit $T = \psi(P)$ la tresse associée à un préordre P ; alors $T = \psi(P) \supseteq D$.

En effet $P \subseteq \Delta$ implique $\psi(P) \supseteq D$.

4.2 *Propriété*

Une tresse est un sous-treillis de H contenant D.

Démonstration : On sait que toute tresse contient D. Montrons qu'une tresse est un sous-treillis de H :

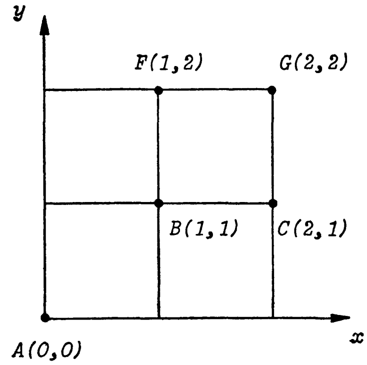
Soit $M = (m_1, \ldots, m_i, \ldots, m_n)$ et $M' = (m'_1, \ldots, m'_i, \ldots, m'_n)$ deux points de H appartenant à une tresse c'est-à-dire dont les coordonnées m_i et m'_i respectent un même préordre P ; M, M' $\in \psi(P)$.

Supposons que $i \underset{P}{\leqslant} j$

$$i \underset{P}{\leqslant} j \text{ implique } \left\{\begin{array}{l} m_i \underset{P}{\leqslant} m_j \\ \\ m'_i \underset{P}{\leqslant} m'_j \end{array}\right. \text{ implique } \left\{\begin{array}{l} \mathit{max}\,(m_i, m'_i) \underset{P}{\leqslant} \mathit{max}\,(m_j, m'_j) \\ \\ \mathit{min}\,(m_i, m'_i) \underset{P}{\leqslant} \mathit{min}\,(m_j, m'_j) \end{array}\right.$$

donc M $\cap$ M' et M $\cup$ M' $\in \psi$ (P).

La réciproque est fausse (Fig. 4).



$D = \{A, B, G\}$

$H = \{A, B, C, F, G\}$ et $D \subset H$

$\mathrm{P}_C = (y \leqslant x)$

$\mathrm{P}_F = (x \leqslant y)$

Figure 4

Donc φ (H) est le préordre « vide » c'est-à-dire pour lequel x et y sont incomparables ; alors ψ $(\varphi$ $(H))$ est formé des 9 points.

H est donc un sous-treillis qui contient D sans être une tresse car g $(H) \neq H$.

4.3 *Ordre, préordre totaux sur E et effectifs des tresses associées*

Soit $0 = [1 \leqslant 2 \leqslant \dots \leqslant n]$

$$\psi\ (0) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in H : x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_n\}$$

Effectif d'une tresse associée à un ordre total en algèbre à p valeurs

On ne restreint pas le problème en supposant que l'ordre total sur E est $1 \leqslant 2 \leqslant \dots \leqslant n$. Soit N (n, p) le nombre de points de H respectant cet ordre total sur les n composantes.

$$N\ (n, p) = \sum_{i=0}^{p-1} N_i\ (n, p)$$

où N_i (n, p) désigne le nombre de points respectant l'ordre et situés dans le $(n - 1)$ hyperpavé d'équation $x_n = i$.

On a $N_{p-1}\ (n, p) = N\ (n - 1, p)$
et d'une façon générale $N_i\ (n, p) = N\ (n - 1, i + 1)$

On en déduit : $N\ (n, p) = N\ (n - 1, p) + \underbrace{N\ (n - 1, p - 1) + \dots + N\ (n - 1, 1)}_{N\ (n,\ p\ -\ 1)}$ et

$N\ (n, p) = N\ (n - 1, p) + N\ (n, p - 1)$

N (n, p) se calcule facilement à partir de $N\ (n, 1) = 1$ et $N\ (1, p) = p$,

et $N\ (n, p) = C_{p+n-1}^{n}$ (combinaisons avec répétitions)

Effectif d'une tresse associée à un préordre total

Soit P un préordre total sur E ayant m classes d'équivalence ; alors $|\psi\ (\mathrm{P})| = N\ (m, p)$.

En effet, à un point de ψ (P) on peut faire correspondre un point de ψ (P'), $\psi\ (\mathrm{P}') \subseteq H\ (m, p)$, où P' est l'ordre total obtenu en prenant une composante quelconque dans chaque classe, et réciproquement.

$$|\psi\ (\mathrm{P}')| = N\ (m, p) = C_{m+p-1}^{m}$$

En particulier, les *coatomes* sont caractérisés par 2 sous-ensembles A et $\overline{A}$ de E et $\psi\ (P_{A\overline{A}}) = \{x \in H : \forall i \in A, \forall j \in \overline{A}, x_i = k$ et $x_j = k'$ avec $k \leqslant k'\}$ et $|\psi\ (\mathrm{P}_{A\overline{A}})| = C_{p+1}^{2} = \dfrac{p\ (p + 1)}{2}$.

Les *atomes* sont définis par $P_{ij} = [i \leqslant j]$ (les autres composantes étant incomparables) et $\psi\,(P_{ij}) =$

$\{x \in H : x_i \leqslant x_j\}$ et $|\psi\,(P_{ij})| = p\, C^2_{p+1} = \dfrac{p^2\,(p+1)}{2}$

4.4 *Plus grande tresse contenue dans un ensemble*

Soit F un sous-ensemble de H contenant les points diagonaux $(i, i...i)$, $0 \leqslant i \leqslant p-1$, et $P_1 = \bigcap\limits_{M \in F} P_M$ le préordre associé. Soit $T_1 = \psi\,(P_1)$. On peut se demander quelle est la plus grande tresse T_0 (ou les plus grandes tresses car *a priori* il n'y a pas nécessairement unicité) contenue dans F, c'est-à-dire pour laquelle il n'existe pas de tresse T telle que $T_0 \subset T \subset T_1$. Une telle tresse existe puisque F contient la tresse associée au préordre à une seule classe.

On pose $A = \{P_M / M \in F\}$

Considérons l'ensemble S de tous les préordres P_i de $F\,(P_1)$ vérifiant $\psi\,(P_i) \subset F$. On a $A \subset F\,(P_1)$ et $S \subset F\,(P_1)$.

Remarque : Si F est une tresse alors $A \subset S$ (réciproque fausse : contre-exemple Fig. 5).

Soit $P_M \in A$; $P_1 = \bigcap\limits_{M \in F} P_M \subseteq P_M$ donc $\psi\,(P_M) \subseteq \psi\,(P_1) = F$ et $P_M \in S$

Propriété. S est un sup-demi-treillis ; en effet

$$\psi\,(P_i) \text{ et } \psi\,(P_j) \subseteq F \text{ implique } \psi\,(\overline{P_i \cup P_j}) = \psi\,(P_i) \wedge \psi\,(P_j) \subseteq F$$

donc $P_i, P_j \in S$ implique $\overline{P_i \cup P_j} \in S$

On recherche des tresses T_0 telles qu'il n'existe pas de tresses T vérifiant $T \subset T_0 \subset T_1$ ce qui revient à rechercher des préordres $P_0 \in S$ tels qu'il n'existe pas de préordre $P \in S$ vérifiant

$$P_1 \subset P \subset P_0$$

P_0 est un préordre minimal de S auquel correspond une tresse maximale incluse dans F (exemple Fig. 5).

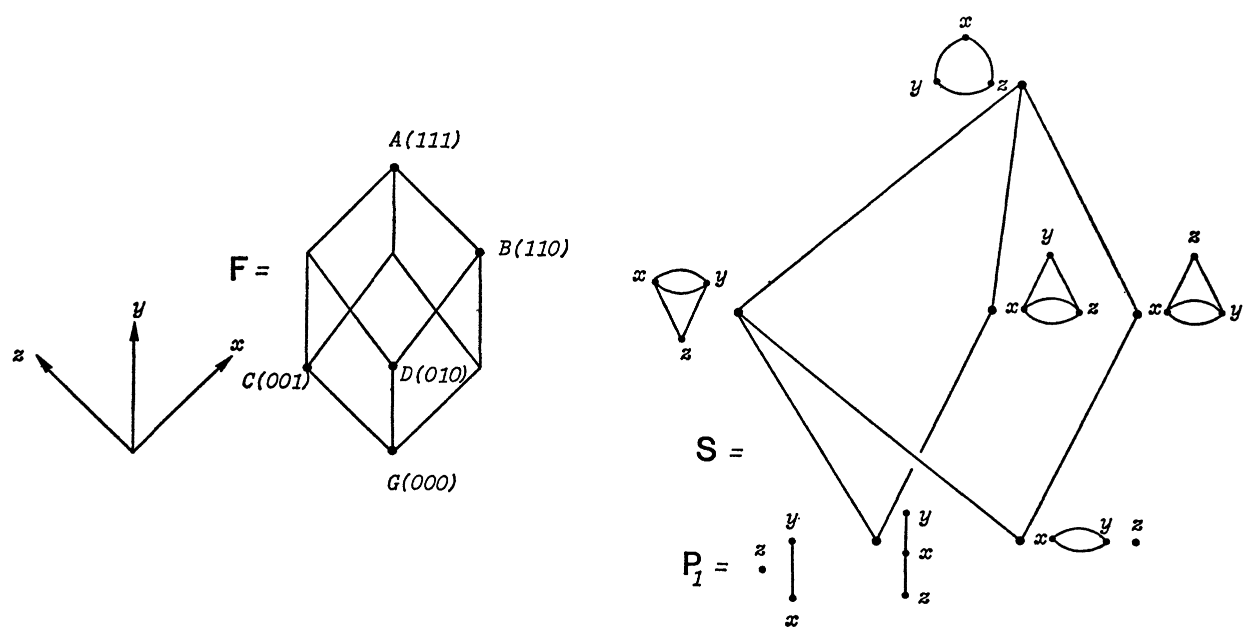


Figure 5

On a 2 préordres minimaux :  et  auxquels correspondent deux tresses maximales :

$\{A, B, D, G\}$ et $\{A, B, C, G\}$.

5. Conservation des tresses

5.1 *Conservation des tresses par réduction de p*

Définition : Sur l'ensemble $\{0, 1, ..., p-1\}$ on définit une *réduction* notée $R[i_1, i_2, ..., i_l]$ avec $2 \leqslant l < p$ et $\{i_1, ..., i_l\} \subset \{0, 1, ..., p-1\}$ comme étant la suppression de certaines valeurs de $\{0, 1, ..., p-1\}$ dont on ne garde que les valeurs $i_1, ..., i_l$.

On note $H' = H(i_1, ..., i_l)$ la réduction de $H(n, p)$ à $H(n, l)$.

Pour H on a défini plus haut les deux applications :

$$\varphi : P(H) \to P_E$$
$$\psi : P_E \to T \text{ (ensemble des tresses de } H)$$

On définit de même pour H' :

$$\varphi' : P(H') \to P_E$$
$$\psi' : P_E \to T'$$

avec quel que soit $A \subset H'$ alors $\varphi'(A) = \varphi(A)$
et quel que soit $\mathrm{P} \in P_E$ alors $\psi'(P) = \psi(P) \cap H'$

Propriété

Soit T une tresse de H et P le préordre associé ; alors quelle que soit la réduction $R[i_1, ..., i_l]$, $T \cap H'$ est une tresse dans H' dont le préordre associé est P.

En effet, on a $\psi(\mathrm{P}) = T$
donc $\psi'(\mathrm{P}) = \psi(\mathrm{P}) \cap H' = T \cap H'$

Application : *Préordre associé à une tresse*

Soit T une tresse de H et P le préordre associé, soit $R[i, j]$ une réduction et H' l'hyperpavé restant qui est un *hypercube*, encore appelé treillis booléen ou algèbre de Boole.

alors $\mathrm{P} = \bigcap\limits_{M \in T} \mathrm{P}_M = \bigcap\limits_{M \in H' \cap T} \mathrm{P}_M$

Si P est un ordre total, $|T| = C^n_{n+p-1}$ et $|T \cap H'| = n + 1$: on réduit de beaucoup le nombre de préordres dont on doit faire le produit pour calculer P (exemple Fig. 6).

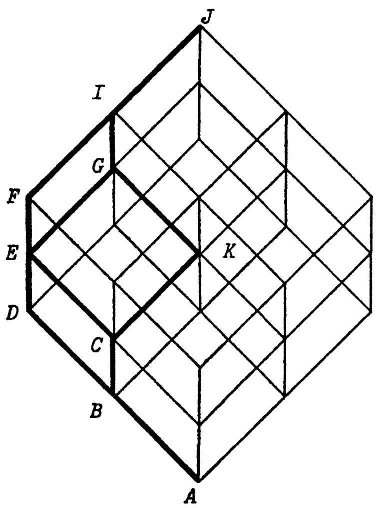


Figure 6

Soit la tresse $L = \{A, B, C, D, E, F, G, K, I, J\}$
$\mathrm{P} = \varphi(L) = \mathrm{P}_A \cap \mathrm{P}_B \cap \mathrm{P}_C \ldots \mathrm{P}_I \cap \mathrm{P}_J$; grâce à la propriété précédente on peut écrire plus simplement :
$\varphi(L) = \mathrm{P}_A \cap \mathrm{P}_B \cap \mathrm{P}_C \cap \mathrm{P}_K$
ou $\varphi(L) = \mathrm{P}_K \cap \mathrm{P}_G \cap \mathrm{P}_I \cap \mathrm{P}_J$
ou $\varphi(L) = \mathrm{P}_A \cap \mathrm{P}_D \cap \mathrm{P}_F \cap \mathrm{P}_J$

L est la tresse de H associée à P. L'ensemble $\{A, B, C, K\}$ est la tresse de $H(0, 1)$ associée à P ; $\{K, G, I, J\}$ est la tresse de $H(1, 2)$ et $\{A, D, F, J\}$ est la tresse de $H(0, 2)$ associée à P.

Réciproquement : Soit L un sous-ensemble de H (P $= \varphi$ (L)), tel que pour toute réduction R $(i_1, i_2, ..., i_l)$ alors $L \cap H$ $(i_1, ..., i_l)$ soit la tresse de H $(i_1, ..., i_l)$ associée à P. Alors L n'est pas forcément la tresse de H associée à P.

Exemple : Soit $L = \{A, B, C, D, F, G, I, J, K\}$ (mêmes points que dans l'exemple précédent, avec E en moins). On considère R (0, 1) et l'ensemble $\{A, B, C, K\}$ puis R (0, 2) et l'ensemble $\{A, D, F, J\}$ et enfin R (1, 2) et $\{K, G, I, J\}$. Ces trois ensembles sont les trois tresses de H (0, 1), H (0, 2) et H (1, 2) associées au préordre $[x \leqslant y \leqslant z]$ et L n'est même pas un sous-treillis.

Remarque : Si $n < p$ alors

$$\bigcup H\,(i_1, i_2, ..., i_l) = H$$
$$\text{pour tout } \{i_1, ..., i_l\} \subset \{0, 1, ..., p-1\}$$
$$2 \leqslant l \leqslant p-1$$

et dans ce cas la réciproque précédente est vraie.

Si $n = p$, le nombre de points de H non recouverts par H $(i_1, ..., i_l)$ est n ! : en effet chaque point non recouvert correspond à un ordre total sur les n composantes.

Exemple ($n = 3$, $p = 3$) :

Les 6 (= 3 !) points non recouverts sont : (x désigne la première composante, y la seconde et z la troisième).

(021) : $x \leqslant z \leqslant y$	(201) : $y \leqslant z \leqslant x$
(012) : $x \leqslant y \leqslant z$	(210) : $z \leqslant y \leqslant x$
(102) : $y \leqslant x \leqslant z$	(120) : $z \leqslant x \leqslant y$

5.2 *Conservation des tresses par restriction à un* ($k - 1$) *pavé*

Soit P un préordre et $T = \psi$ (P). Soit x_k ($1 \leqslant k \leqslant n$) une composante quelconque et l ($0 \leqslant l \leqslant p-1$) une valeur quelconque de cette composante.

Alors la restriction de T au $(n-1)$ hyperpavé d'équation $x_k = l$ n'est pas forcément une tresse pour ce $(n-1)$ hyperpavé. Dans l'exemple de la Figure 7, l'intersection de T avec le $(n-1)$ hyperpavé $z = 1$ n'est pas une tresse.

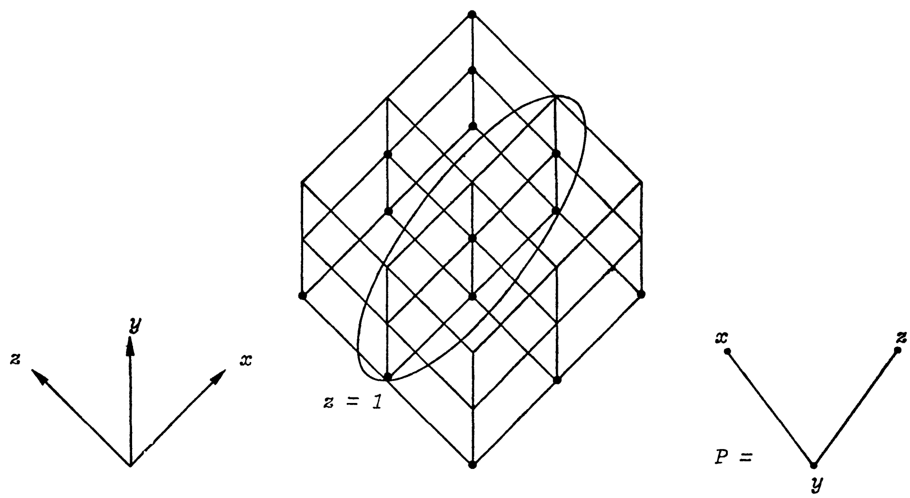


Figure 7

Par contre, soit x une composante telle qu'il n'existe pas d'autre composante x' vérifiant $x \underset{P}{\leqslant} x'$; alors l'intersection de T avec le $(n-1)$ hyperpavé d'équation $x = p-1$ est une tresse pour ce $(n-1)$ hyperpavé.

De même, soit y une composante telle qu'il n'existe pas y' vérifiant $y' \underset{P}{\leqslant} y$; alors l'intersection de T avec le $(n-1)$ hyperpavé d'équation $y = 0$ est une tresse pour ce $(n-1)$ hyperpavé. Dans ces 2 cas le préordre P' associé est la restriction de P aux $(n-1)$ composantes restantes.

5.3 *Conservation des tresses par projection*

Les tresses se conservent par projection sur un k-hyperpavé ($2 \leqslant k \leqslant n$), le préordre P' associé étant la restriction de P aux k composantes restantes.

6. Caractérisation géométrique des tresses

6.1 *Propriété des sous-treillis de H*

Lemme 1 : Soit deux triplets (x_1, x_2, x_3), (a_1, a_2, a_3) d'éléments de $[0, p-1]$; il existe i et $j \in \{1, 2, 3\}$ tels que soit $x_i \leqslant a_i$ et $x_j \leqslant a_j$, soit $x_i \geqslant a_i$ et $x_j \geqslant a_j$.

Définition : Soit $x = (x_1, ..., x_i, ..., x_n) \in H$, et $A \subseteq E$. On pose $proj_A x = \{x_i, i \in A\}$. On dit que deux éléments x et $y \in H$ sont associés sur A si et seulement si $proj_A x = proj_A y$.

Si $X \subset H$, on pose $proj_A X = \{proj_A x, x \in X\}$. On dit que y est associé à X si et seulement si y est associé à un élément de X, c'est-à-dire si $proj_A y \in proj_A X$. (On note y^X).

Lemme 2 : Soit T un sous-treillis de H et $y \in H$. Si quel que soit $A \subset E$, $|A| = k \geqslant 2$ il existe $x^A \in T$ associé à y sur A, alors quel que soit $B \subset E$, $|B| = k+1$, il existe $x^B \in T$ associé à y sur B.

- Vrai pour $n = 2$; supposons $n > 2$:
- Soit $y = (y_1, ..., y_i, ..., y_n)$ et $B = \{1, ..., k+1\}$

Posons $A_1 = \{1, ..., k\}$
$A_2 = \{1, ..., k-1, k+1\}$
$A_3 = \{1, ..., k-2, k, k+1\}$

Il existe x^{A_1}, x^{A_2} et x^{A_3} vérifiant :

$$x^{A_1} \in T \text{ et } x^{A_1} = (y_1, ..., y_k, a_1, ...)$$

$$x^{A_2} \in T \text{ et } x^{A_2} = (y_1, ..., y_{k-1}, a_2, y_{k+1}, ...)$$

$$x^{A_3} \in T \text{ et } x^{A_3} = (y_1, ..., y_{k-2}, a_3, y_k, y_{k+1}, ...)$$

Considérons les deux triplets (a_1, a_2, a_3) et (y_{k-1}, y_k, y_{k+1}).

D'après le lemme 1 on a par exemple $y_k \leqslant a_2$ et $y_{k+1} \leqslant a_1$

d'où $x^{A_1} \cap x^{A_2} = (y_1, ..., y_k, y_{k+1}, ...) \in T$
donc il existe x^B associé à y sur B.

Théorème 1

Soit T un sous-treillis de H et $y \in H$. Si, quel que soit $A \subset E$, avec $|A| = k \geqslant 2$ il existe $x \in T$ associé à y sur A, alors $y \in T$.

En effet, d'après le lemme 2 on déduit que la propriété est vraie pour tout $k' \geqslant k$ et donc pour $k' = n$, ce qui signifie qu'il existe $x' \in T$, associé à y sur E et donc $y = x' \in T$.

Corollaire 1

Soit T un sous-treillis de H et $y \notin T$; alors il existe $A \subset E$, $|A| \geqslant 2$, et $proj_A (y) \notin proj_A (T)$, c'est-à-dire que y n'est associé à aucun élément de T sur A.

Corollaire 2

Soit T un sous-treillis de H et $y \in H$; si quel que soit $i, j \in E$, il existe $x \in T$, associé à y sur $\{i, j\}$, alors $y \in T$.

Corollaire 2'

Soit T un sous-treillis de H et $y \notin T$; alors il existe i et $j \in E$ tel que $proj_{ij} (y) \notin proj_{ij} (T)$ (on note $proj_{ij}$ la projection sur $L_i \times L_j$).

Corollaire 3

Si deux sous-treillis de H, T_1 et T_2 vérifient :

$$\text{pour tout } \{i, j\} \in E, \ proj_{ij}(T_1) = proj_{ij}(T_2)$$

alors $T_1 = T_2$ (évident)

Conséquence

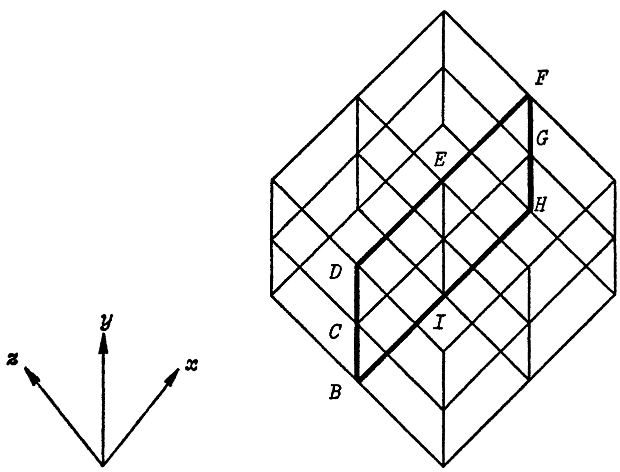
Soit A un sous-treillis de H et $A_{ij} = proj_{ij}(A)$

$$\text{alors } A = \bigcap_{ij} \overset{-1}{proj_{ij}} (A_{ij}) \tag{1}$$

$$\text{et } \complement_H A = \bigcup_{ij} \complement_H \overset{-1}{proj_{ij}} (A_{ij})$$

Soit f_{ij} la fonction caractéristique du complémentaire de $\overset{-1}{proj_{ij}} (A_{ij})$ et f celle du complémentaire de A alors $\boxed{f = \Sigma f_{ij}}$

Ceci généralise le résultat obtenu en algèbre de Boole ([4]) où le complémentaire d'un sous-treillis était caractérisé par une fonction f de la forme $f = \Sigma x_i x'_j$. Mais si en algèbre de Boole la réciproque était vraie, dans un hyperpavé un ensemble vérifiant la propriété (1) n'est pas obligatoirement un sous-treillis (contre-exemple, Fig. 8).



$A = \{B, C, D, E, F, G, H, I\}$

On a bien $A = \bigcap_{ij} \overset{-1}{proj_{ij}} (A_{ij})$ et A n'est pas un sous-treillis.

Figure 8

Autres conséquences équivalentes :

1) Soit T un sous-treillis de H et $M = (x_1, ..., x_n) \notin T$, alors on peut faire varier $(n - 2)$ variables x_i de M convenablement choisies sans arriver à un point de T.

2) Le complémentaire d'un sous-treillis est union de $(n - 2)$ pavés.

Théorème 2 : Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble $A \subset H$ respecte un préordre P, est que quels que soient i et $j \in E$, $proj_{ij}(A) \subset proj_{ij}(\psi(\mathrm{P}))$

nécessaire : $A \subset \psi(\mathrm{P})$ implique que pour tout $(i, j) \in E$:

$$proj_{ij}(A) \subset proj_{ij}(\psi(\mathrm{P}))$$

suffisante : découle immédiatement du théorème 1 :

$proj_{ij}(A) \subset proj_{ij}(\psi(\mathrm{P}))$, quels que soient i et $j \in E$, implique $A \subset \psi(\mathrm{P})$ car $\psi(\mathrm{P})$ est un sous-treillis de H.

C.Q.F.D.

6.2 *Caractérisation (géométrique) des tresses*

Lemme

Soit P un préordre, i et j deux composantes quelconques $\in E$ et P_{ij} l'atome de P_E où seuls i et j sont comparables

alors $proj_{ij}(\psi(P)) = proj_{ij}(\psi(P_{ij}))$

1) Soit $F = \psi(P)$ et $P = \bigcup_{ij} P_{ij}$ (car P_E ensemble des préordres est un treillis atomique) donc P est moins fin que P_{ij} et $P_{ij} \subset P$ implique $\psi(P) \subset \psi(P_{ij})$

donc $proj_{ij}(\psi(P)) \subset proj_{ij}(\psi(P_{ij}))$

2) Soit $M = (x_i, x_j)$ un point de $L_i \times L_j$ respectant le préordre P_{ij}. Alors il existe un point $A = (11, \ldots, 1x_i1, \ldots, 1x_j1, \ldots, 11)$ appartenant à H tel que $proj_{ij}(A) = M$; il est clair que $A \in \psi(P)$ donc $proj_{ij}(\psi(P_{ij})) \subset proj_{ij}(\psi(P))$

Ce résultat nous sera utile pour la démonstration du théorème suivant.

Définition : Dans $L_i \times L_j$ on appelle diagonale principale l'ensemble des points $M(x_i, x_j)$ tels que $x_i = x_j$; d'autre part tous les points situés du même côté de la diagonale principale sont caractérisés par $x_i \leqslant x_j$ ou $x_i \geqslant x_j$.

Théorème 3 : Soit F un sous-treillis de H.

Une condition nécessaire et suffisante pour que F soit une tresse est que quels que soient i et j appartenant à E, les projections de F dans tous les 2-pavés $L_i \times L_j$, contiennent la diagonale principale, et que si elles contiennent un point situé hors de cette diagonale principale, alors elles contiennent tous les points situés du même côté de la diagonale principale que ce point.

Nécessaire

Soit F une tresse : il existe un préordre P tel que $F = \psi(P)$ et F est un sous-treillis de H. Soit i et j deux composantes ; P_{ij} ne peut être que :

a) $i = j$ si i et j sont équivalents et $proj_{ij}(\psi(P_{ij}))$ occupe la diagonale principale de $L_i \times L_j$

b) i et j incomparables et $proj_{ij}(\psi(P_{ij}))$ occupe tout $L_i \times L_j$

c) $i \leqslant j$ et $proj_{ij}(\psi(P_{ij}))$ devient :

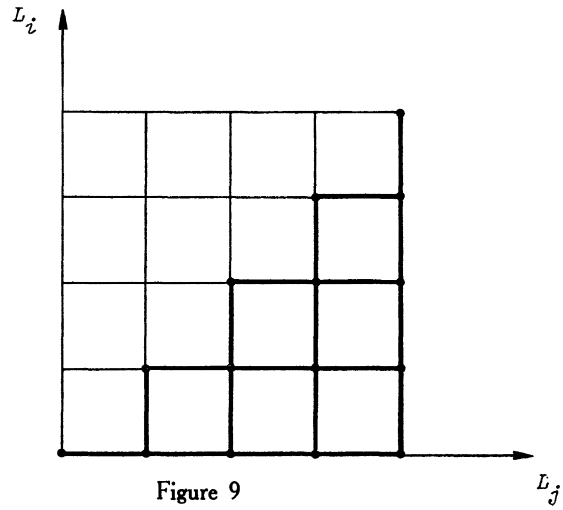


Figure 9

D'autre part on sait que

$$proj_{ij}(\psi(P)) = proj_{ij}(\psi(P_{ij}))$$

La condition nécessaire est donc démontrée.

Suffisante

Soit F un sous-treillis vérifiant la condition de l'énoncé. Montrons que F est une tresse, c'est-à-dire que tout point de F respecte un certain préordre P et que tout point qui respecte P ou un préordre moins fin appartient à F.

De la projection de F dans les 2-pavés $L_i \times L_j$ on déduit $\frac{n(n-1)}{2}$ préordres sur i et j notés P_{ij} (atomes de P_E), que respectent tous les points de F, car $F \subset \psi(\mathrm{P}_{ij})$. Donc $F \subseteq \bigcap_{ij} \psi(\mathrm{P}_{ij}) = \psi(\bigcup_{ij} \mathrm{P}_{ij})$

Soit $\mathrm{P} = \bigcup_{ij} \mathrm{P}_{ij}$

Soit $M \in \psi(\mathrm{P})$. Alors $M \in \psi(\mathrm{P}_{ij})$ quels que soient i et j, donc $proj_{ij}(M) \in proj_{ij}(F)$ et ce, quels que soient i et j. Donc, d'après le théorème 1, $M \in F$.

Donc F est une tresse, et $F = \psi(\mathrm{P}) = \bigcap_{ij} \psi(\mathrm{P}_{ij}) = \psi(\bigcup \mathrm{P}_{ij})$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARBUT M., MONJARDET B., *Ordre et classification, algèbre et combinatoire*, Paris, Presses Universitaires de France, 1970, 2 t.

[2] BIRKOFF G., « Lattice theory », Amer. math. Soc., 1948.

[3] DEGENNE A., *L'analyse ordinale des données : Méthodes statistiques et métriques*, Paris, Hachette, 1973.

[4] FLAMENT C., « Tresses de Gutmann », *Ordres : Travaux du séminaire sur les ordres totaux finis, Aix-en-Provence, Juillet* 1967, Paris, Mouton et Gauthier-Villars, 1970.

[5] FREY L., *L'analyse ordinale des données : Méthodes algébriques*, Paris, Hachette, 1971.

[6] MONJARDET B., « Tresses, fuseaux, préordres et topologies », *Math. Sci. hum.*, Paris, N° 30, 1970.