MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

B. MONJARDET

Tournois et ordres médians pour une opinion

Mathématiques et sciences humaines, tome 43 (1973), p. 55-70
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1973__43__55_0>

Math. Sci. hum. (11e *année,* n° 43, 1973, p. 55-70)

TOURNOIS ET ORDRES MÉDIANS POUR UNE OPINION

par

B. MONJARDET [1]

RÉSUMÉ

Dans cet article on étudie les propriétés d'ordres totaux à distance minimum d'un ensemble de tournois ; on montre, par exemple, que ces ordres contiennent l'ordre d'unanimité. On étudie la fonction $f(\mathrm{n,v})$ *maximum de la distance entre un ordre total et* v *tournois définis sur un ensemble à* n *éléments ; on donne sa valeur exacte pour* v *pair, un encadrement pour* v *impair, et sa valeur limite pour* v *tendant vers l'infini.*

SUMMARY

In this article we study the properties of complete orderings at minimum distance of a set of tournaments ; for instance, we show that these orderings are compatible with the Pareto relation ; we study the function $f(\mathrm{n,v})$, *the maximum distance between a complete ordering and* v *tournaments defined on a set of* n *elements ; we give its exact value for* v *even, bounds for* v *odd and its limit for* n *infinite.*

1. INTRODUCTION

Dans cet article une « opinion » est un v-uple de relations binaires, totales et asymétriques, définies sur le même ensemble X, c'est-à-dire un v-uple de tournois sur X. De telles opinions s'obtiennent lors d'expériences de comparaisons par paires où chacun des v sujets indique pour chacune des paires possibles d'un ensemble X d'objets, l'objet qu'il préfère. On obtient également des opinions de ce type dans les problèmes de procédure de votes ou d'agrégation de critères lorsque la relation

1. Centre de Mathématique Sociale, EPHE, 6e Section.

de préférence d'un votant (ou celle selon un critère) est supposée être un ordre total strict, c'est-à-dire un tournoi transitif. Dans tous les cas on est amené à résumer l'opinion donnée et parfois à lui ajuster une relation d'un type fixé, par exemple un ordre total. Une procédure classique consiste à prendre le résumé à « distance minimum », ce qui nécessite de définir la distance entre points et la distance entre parties et points. Dans cet article nous utilisons comme distance entre deux tournois la distance de Kendall (moitié de la distance de la différence symétrique) et comme distance entre une opinion et un tournoi la distance obtenue en sommant les distances de Kendall du tournoi aux tournois de l'opinion ; de façon générale, nous appellerons relation médiane, la relation à distance minimum d'un v-uple de relations, obtenue en adoptant les distances précédentes. Au paragraphe 3, nous rappelons la propriété classique du tournoi médian pour une opinion d'être le tournoi « majoritaire » obtenu par la procédure de Condorcet. Au paragraphe 4, nous étudions les propriétés des ordres médians pour une opinion ; en particulier dans le cas d'une opinion ordinale, c'est-à-dire composée d'ordres totaux, nous montrons que les ordres médians sont parétiens, c'est-à-dire contiennent les couples d'unanimité. Ceci répond à une question qui avait été posée dans [7]. Au paragraphe 5 nous étudions la fonction $f(n,v)$ qui permet d'évaluer la qualité de l'approximation obtenue en remplaçant une opinion par son ordre médian. Nous terminons, au paragraphe 6, par quelques considérations sur les algorithmes de recherche d'ordres médians. Le thème de cet article est intermédiaire entre deux travaux récents, celui de J.-C. Bermond sur les ordres à distance minimum d'un tournoi ([4]) et celui de E. Jacquet-Lagrèze sur l'analyse d'opinions valuées ([11] et [12]). Le cas étudié par J.-C. Bermond correspond à celui d'une opinion réduite à un seul tournoi : on constatera que plusieurs des résultats établis dans ce cas se généralisent sans difficulté au cas v quelconque. Le cas étudié par E. Jacquet-Lagrèze correspond à celui où les v-opinions individuelles peuvent être des relations binaires quelconques ; on peut obtenir encore certains résultats généraux et le théorème 1 ci-dessous est un cas particulier d'un résultat établi en général dans [11]. On peut aussi rapprocher le thème de cet article d'autres travaux portant sur les relations à distance minimum. D'abord dans le cas des relations médianes, S. Régnier a particulièrement étudié celui des partitions médianes par rapport à un ensemble de partitions (ces partitions sont appelées centrales dans [16]). D'autre part, on peut définir d'autres types de relations suivant la distance utilisée entre une relation et un v-uple de relations : relations moyennes si on prend comme distance la somme des carrés des distances entre relations ; relations centrales (ou modales) si on prend comme distance le maximum des distances entre relations ; pour des travaux récents sur ces relations, dans le contexte de l'agrégation des préférences, on se reportera à l'ouvrage de A. Degenne ([6]) ainsi qu'à l'article de J. Feldman ([7]) ; signalons aussi une revue des méthodes d'analyse multicritères qui recoupe plusieurs de ces thèmes ([5]) et l'étude de B. Roy sur ces méthodes ([19]).

2. DÉFINITION, NOTATIONS

Soit $X = \{1, \ldots i, j, \ldots n\}$ un ensemble de cardinal n ; un tournoi t sur X est une relation binaire, totale et asymétrique définie sur X ; un tournoi t est sans circuit d'ordre trois si et seulement si t est un ordre total strict ; on peut noter un tournoi t au moyen de sa fonction caractéristique, application de X^2 dans $\{0,1\}$ définie par :

$$t_{ij} = 1 \text{ si } (i,j) \in t \qquad t_{ij} = 0 \text{ si } (i,j) \notin t$$

pour un tournoi quelconque, on a donc, pour $i \neq j$, $t_{ij} + t_{ji} = 1$;

$$\sum_{i,j} t_{ij} = |t| = \frac{n(n-1)}{2} ;$$

si t est un ordre total strict, on a de plus $t_{ij} = t_{jk} = 1$ implique $t_{ik} = 1$. On note $\bar{t}$ le tournoi inverse de t défini par $\bar{t}_{ij} = t_{ji}$. On note T l'ensemble des tournois définis sur X, O l'ensemble des n ! ordres totaux (stricts) ; quand dans la suite on parlera d'un ordre total, il sera toujours supposé strict ($(i,i) \notin t$, pour tout i de X).

Soit $V = \{1, ..., r, s, ..., v\}$ un ensemble de cardinal v ; on appelle état de l'opinion, ou simplement opinion, un v-uple $e = (t_1, ..., t_r, ..., t_v)$ où les t_r sont des tournois définis sur X ; les t_r seront parfois appelés opinions individuelles ; si tous les t_r sont des ordres totaux on dira que e est une opinion ordinale ; on note $E = T^v$ l'ensemble des opinions. Si $e = (t_1, ... t_r, ... t_v)$ est une opinion on note $\pi(e)$, ou simplement π, la relation sur X définie comme intersection des opinions individuelles ;

$\pi = \bigcap_{r=1}^{v} t_r$; si e est une opinion ordinale, π est un ordre partiel (strict) ; c'est l'ordre dit de Paréto qui ne retient que les couples unanimes ; on dira qu'un ordre total est parétien, par rapport à une opinion ordinale e, s'il contient l'ordre $\pi(e)$.

Soit $e = (t_1, ... t_r, ... t_v)$ une opinion ; on pose : $V_{ij} = \{r \in V : (i,j) \in t_r\}$; $v_{ij} = |V_{ij}| = \sum_{r=1}^{v} t_{r,ij}$; on a pour $i \neq j$, $v_{ij} + v_{ji} = v$, et pour tout i, $v_{ii} = 0$. A l'opinion e, on associe le graphe valué G_e ainsi défini : l'ensemble des sommets de G_e est X ; l'ensemble des arcs de G_e est l'ensemble de tous les couples (i,j), $i \in X$, $j \in X$, $i \neq j$; l'arc (i,j) est valué par v_{ij} ; on remarque que deux opinions différentes peuvent avoir le même graphe valué ; à l'opinion e on peut aussi associer un tableau $M_e = (v_{ij})$ à n lignes et n colonnes ; l'ensemble des lignes et l'ensemble des colonnes sont totalement ordonnés par le même ordre arbitraire défini sur X ; dans les exemples X pourra être un ensemble de lettres et l'ordre total, l'ordre alphabétique : $a > b > c > ...$ noté aussi $abc...$

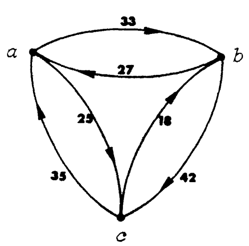
Exemple 1

$$X = \{a,b,c\} \qquad |V| = 60.$$

Dans cet exemple dû à Condorcet (et repris dans [8] et [11]) on a une opinion ordinale ; pour chaque ordre total possible écrit sous forme de permutation, nous indiquons le nombre de votants qui l'expriment :

abc : 23 ; acb : 0 ; bac : 2 ; bca : 17 ; cab : 10 ; cba : 8.

Figure 1



G_e

	a	b	c
a	0	33	25
b	27	0	42
c	35	18	0

Figure 2

M_e

On remarque que dans cet exemple l'ordre $\pi(e)$ d'unanimité est vide.

3. TOURNOIS ET ORDRES TOTAUX A DISTANCE MINIMUM D'UNE OPINION

On dit que deux tournois t et t' ont un désaccord sur les deux éléments x et y de X si $(x,y) \in t$ et $(y,x) \in t'$ ou $(y,x) \in t$ et $(x,y) \in t'$; on note $d_k(t,t')$ le nombre de désaccords entre t et t' ; ce nombre définit une distance sur l'ensemble T des tournois ; cette distance appelée distance de Kendall est égale à la moitié de la distance d_s de la différence symétrique entre t et t' ; on a en effet :

$$d_K(t,t') = |t - t'| = |t' - t| = \frac{1}{2}(|t - t'| + |t' - t|) = \frac{1}{2} d_s(t,t').$$

La distance de Kendall s'exprime de diverses façons :

$$d_K(t,t') = \frac{1}{2} \sum_{i,j} |t_{ij} - t'_{ij}| = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (t_{ij} - t'_{ij})^2 = \sum_{(i,j) \in t} |t_{ij} - t'_{ij}|.$$

Soient

$e = (t_1, \ldots, t_r, \ldots, t_v)$, $e' = (t'_1, \ldots, t'_r, \ldots, t'_v)$ deux opinions ; $v_{ij} = \sum_{i=1}^{v} t_{r,ij}$; $v'_{ij} = \sum_{r=1}^{v} t'_{r,ij}$.

On peut définir une distance entre e et e' en utilisant une distance entre les graphes valués G_e et $G_{e'}$ (ou les tableaux M_e et $M_{e'}$) ; nous prendrons la moitié de la distance définie par la somme des valeurs absolues des différences :

$$D(e,e') = \frac{1}{2} \sum_{i,j} |v_{ij} - v'_{ij}|.$$

On a ainsi défini sur l'ensemble E des opinions une distance généralisant la distance de Kendall ; de plus considérons une opinion, notée e_t, composée de v tournois tous égaux à t ; on a :

$$D(e,e_t) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} |v_{ij} - v\, t_{ij}| \text{ ; mais :}$$

$$\sum_{r=1}^{v} |t_{r,ij} - t_{ij}| = |v_{ij} - v t_{ij}| \text{ donc :}$$

$$D(e,e_t) = \frac{1}{2} \sum_{r=1} \sum_{i,j} |t_{r,ij} - t_{ij}| = \sum_{r=1}^{v} \mathrm{d}_k(\bar{t}_r,t)$$

$D(e,e_t)$ est donc égale à la somme des distances de Kendall des tournois t_r de e au tournoi t ; on peut aussi remarquer que :

$$\begin{aligned} |v_{ij} - vt_{ij}| &= v_{ij} \text{ si } (i,j) \notin t, \text{ c'est-à-dire si } (j,i) \in t \\ &= v_{ji} \text{ sinon ;} \end{aligned}$$

donc :

$$D(e,e_t) = \sum_{(i,j) \in t} v_{ji}.$$

Si $\bar{t}$ est l'ordre inverse de t, on a donc :

$D(e,e_{\bar{t}}) = \sum_{(i,j) \in t} v_{ij}$ qu'on notera $A(e,e_t)$;

$$A(e,e_t) + D(e,e_t) = \frac{n(n-1)\,v}{2}$$

enfin, on posera $B(e,e_t) = A(e,e_t) - D(e,e_t) = \sum_{(i,j) \in t} (v_{ij} - v_{ji})$.

On appelle tournoi à distance minimum d'une opinion $e = (t_1, ..., t_r, ..., t_v)$ un tournoi θ tel que $D(e,e_\theta)$ soit minimum (ou tel que la somme des distances $d_K(t_r,\theta)$ soit minimum) ; θ est donc tel que $A(e,e_\theta) = \sum_{(i,j) \in \theta} v_{ij}$ et $B(e,e_\theta)$ soit maximum ; sur le graphe valué G_e il est alors clair qu'on obtient un tournoi θ en retenant des deux arcs (i,j) et (j,i) celui de valuation maximum ; c'est la procédure de Condorcet qui consiste à retenir les couples (i,j) appartenant à une « majorité » de tournois t_r. Si $|V| = v$ est un nombre impair égal à $2p + 1$, on a donc :

$$\theta = \bigcup_{\substack{A \subset V \\ |A| = p+1}} \left(\bigcap_{r \in A} t_r\right) = \bigcap_{\substack{A \subset V \\ |A| = p+1}} \left(\bigcup_{r \in A} t_r\right)$$

c'est-à-dire que le tournoi θ est aussi le tournoi médian, au sens algébrique du terme, dans le treillis distributif des relations binaires ([3]). Si $v = 2p$ est un nombre pair, les deux formules algébriques ci-dessus ne sont plus nécessairement égales ; elles définissent généralement un intervalle dit intervalle médian. Tous les tournois contenus dans cet intervalle sont à distance minimum de e ; ce sont tous les tournois obtenus en retenant les couples (i,j) avec $v_{ij} > v_{ji}$ et soit le couple (i,j), soit le couple (j,i) si $v_{ij} = v_{ji}$. Nous appellerons désormais tournois médians, par rapport à l'opinion e, les tournois à distance minimum de e.

Donnons maintenant une caractérisation évidente des tournois médians mais intéressante pour le théorème 1 du paragraphe 3. Soit $e = (t_1, ..., t_r, ..., t_v)$ une opinion ; soit Y une partie de X ; on note t_r^Y le tournoi restriction de t_r à Y ; on appelle opinion restreinte à Y et on note e^Y l'opinion $(t_1^Y, ..., t_r^Y, ..., t_v^Y)$.

Proposition 1

Un tournoi θ est médian pour e si et seulement si pour toute partie Y de X, le tournoi θ^Y est médian pour e^Y.

La condition suffisante s'obtient en prenant $Y = X$. Soient maintenant Y partie quelconque de X, $Z = X - Y$. Posons $\theta^{YZ} = \theta - (\theta^Y \cup \theta^Z)$; on a :

$$D(e,e_\theta) = \sum_{(i,j) \in \theta} v_{ji} = \sum_{(i,j) \in \theta^Y} v_{ji} + \sum_{(i,j) \in \theta^Z} v_{ji} + \sum_{(i,j) \in \theta^{YZ}} v_{ji}$$

$$= D(e^Y_\theta, e^Y) + D(e^Z_\theta, e^Z) + \sum_{(i,j) \in \theta^{YZ}} v_{ji}$$

Si l'on fait varier θ sur la partie Y, les deux derniers termes de cette somme restent constants ; puisque $D(e,e_\theta)$ est minimum, il en résulte que $D(e^Y, e^Y_\theta)$ est minimum sur tous les tournois définis sur Y, c.q.f.d. (En particulier en prenant $Y = \{i,j\}$, on retrouve la condition v_{ij} maximum pour $(i,j) \in \theta$.)

La médiane d'une opinion quelconque peut en particulier être un ordre total et ceci sans qu'aucune des opinions individuelles soit un ordre total ; par contre, si toutes les opinions individuelles sont des ordres totaux il n'en résulte nullement que θ soit un ordre total. C'est l'« effet Condorcet » ([13], [10]) bien connu dans la théorie des procédures de votes ; ainsi dans l'exemple 1 ci-dessus, on a $\theta = \{ (a,b), (b,c), (c,a) \}$. Dans tous les cas, on est souvent amené à résumer ou à approximer une opinion e par un ordre total ω ; dans la logique de ce qui précède nous considérerons les ordres totaux à distance minimum $D(e,e_\omega)$ de l'opinion et nous les appellerons ordres médians. Si ω est un ordre médian pour l'opinion e, on a donc :

$$D(e,e_\omega) = \sum_{r=1}^{v} d_k(t_r,\omega) = \sum_{(i,j) \in \omega} v_{ji} \text{ minimum}$$

$$A(e,e_\omega) = \sum_{(i,j) \in \omega} v_{ij} \text{ maximum}$$

$$B(e,e_\omega) = \sum_{(i,j) \in \omega} (v_{ij} - v_{ji}) \text{ maximum.}$$

On remarque que dans le tableau M_e associé à l'opinion e, si o est l'ordre des lignes et des colonnes on a $D(e,e_o)$ = somme des nombres sous la diagonale, $A(e,e_o)$ = somme des nombres au-dessus de la diagonale. Chercher un ordre médian ω revient donc à trouver l'ordre des lignes et des colonnes qui minimise (maximise) la somme des nombres sous (au-dessus de) la diagonale.

4. PROPRIÉTÉS DES ORDRES MÉDIANS

Soit e une opinion, nous notons ω ou $>$ un ordre médian pour e ; dans ce dernier cas nous notons $\geqslant$ l'ordre total réflexif associé à $>$. Une partie Y de X est un intervalle de ω s'il existe i et $j \in X$ tels que $Y = \{k \in X : i \geqslant k \geqslant j\}$; Y est l'intervalle entre i et j, il est noté également $[i,j]$; tout élément k de $[i,j]$ différent de i ou j est un intermédiaire entre i et j. Rappelons que si Y est une partie quelconque de X, on note ω^Y l'ordre ω restreint à Y, e^Y l'opinion e restreinte à Y, e^Y_ω l'opinion composée des v ordres ω^Y.

Théorème 1 (*Jacquet-Lagrèze*)

Un ordre ω est médian pour une opinion e si et seulement si pour tout intervalle Y de ω, l'ordre ω^Y est médian pour e^Y.

La démonstration est exactement la même que pour la proposition 1 du paragraphe 2 ; il suffit de remarquer que dans la somme

$$D(e,\omega) = D(e^Y,e^Y_\omega) + D(e^{X-Y},e^{X-Y}_\omega) + \sum_{(i,j) \in \omega^{Y(X-Y)}} v_{ji}$$

le dernier terme est constant pour tout ordre défini sur Y si et seulement si Y est un intervalle de ω.

Corollaire 1

Soit $[i,j]$ un intervalle de cardinal q, d'un ordre médian ; on a :

$$\sum_{i \geqslant k > l \geqslant j} v_{kl} \geqslant \frac{q(q-1)\ v}{4}.$$

Posons $Y = [i,j]$; d'après le théorème, ω^Y est un ordre médian pour Y. Donc $D(e^Y, \underset{\omega}{e^Y})$ est minimum et $B(e^Y, e^Y)$ est maximum ; cette dernière quantité doit donc être positive ou nulle (sinon l'ordre inverse de ω^Y aurait un B supérieur) ; donc :

$$B(e^Y, \underset{\omega}{e^Y}) = \sum_{i \geqslant k > l \geqslant j} (v_{kl} - v_{lk}) \geqslant 0$$

soit en remplaçant v_{kl} par $v - v_{lk}$

$$\sum_{i \geqslant k > l \geqslant j} v_{kl} \geqslant \frac{q(q-1)\ v}{4} \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Corollaire 2

Le graphe de couverture d'un ordre médian pour une opinion e est un chemin hamiltonien du tournoi médian θ de e.

Le graphe de couverture d'un ordre total $>$ est celui obtenu en considérant les couples (i,j) de l'ordre qui n'ont pas d'intermédiaires ; on dit alors que i couvre j. Si (i,j) est un tel couple, il résulte du corollaire 1, qu'on a $v_{ij} \geqslant \frac{v}{2}$, donc $(i,j) \in \theta$ et on définit bien ainsi un chemin hamiltonien de θ.

Remarque 1

Les résultats précédents s'appliquent en particulier au cas d'une opinion réduite à un seul tournoi t. Ainsi le corollaire 2 redonne le fait bien connu que le graphe de couverture d'un ordre total à distance de Kendall minimum d'un tournoi est un chemin hamiltonien de ce tournoi ([4] p. 18).

Remarque 2

Soient e une opinion, θ le tournoi médian de e ; soit C l'ensemble des chemins hamiltoniens de θ ; la fermeture transitive d'un tel chemin hamiltonien est un ordre strict défini sur X. Soit C l'ensemble de ces ordres totaux ; les résultats précédents montrent que C contient l'ensemble des ordres médians pour e ainsi que l'ensemble des ordres totaux à distance minimum de θ. Y a-t-il d'autres relations entre ces deux ensembles ? Non, en général ; ainsi dans l'exemple 1, ci-dessus, il y a trois ordres à distance minimum de θ, *abc*, *bca* et *cab* alors que seul l'ordre *bca* est médian. Considérons par contre l'exemple suivant :

Exemple 2

$$X = \{a,b,c,d\}, \ |V| = 5$$

$$o_1 = dabc, \ o_2 = bcda, \ o_3 = acbd, \ o_4 = dabc, \quad o_5 = bcda.$$

On a ici $\theta = \{(a,b),(ac),(b,c),(b,d)(c,d),(d,a)\}$; il y a trois ordres médians ***bcda, dabc, bdac*** avec $D(e,e_\omega) = 12$, et un seul ordre à distance minimum de θ : ***abcd.***

Soient e une opinion, i un élément de X ; on définit les valuations positives et négatives de i de la manière suivante :

$$v^+(i) = \sum_{k \in X} v_{ik} \qquad v^-(i) = \sum_{k \in X} v_{ki}$$

On a $v^+(i) + v^-(i) = (n - 1) \ v.$

On note $[r]$ la partie entière du nombre réel r.

Théorème 2

Si i est le premier élément d'un ordre médian pour e,

$$v^+(i) \geqslant [\frac{n-1}{2}] \ v.$$

Soient en effet ω un ordre médian et i son premier élément ; supposons $v^+(\mathrm{i}) < [\frac{n-1}{2}] \ v$;

on en déduit $v^-(i) > v^+(i)$; considérons alors l'ordre o déduit de ω par une permutation circulaire amenant i à la dernière place ; on a :

$$D(e,e_o) = D(e,e_\omega) - v^-(i) + v^+(i) < D(e,e_\omega)$$

ce qui contredit ω médian.

Corollaire

Soit $Y = [i,j]$ un intervalle de cardinal q d'un ordre médian ; on a :

$$v^+_Y(i) \geqslant [\frac{q-1}{2}] \ v.$$

Il suffit d'appliquer le théorème 2 au tournoi médian ω^Y, $v^+_Y(i)$ étant $v^+(i)$ pour l'opinion e restreinte à Y, e^Y. En particulier si i est le p^e élément de ω, j le dernier élément et qu'on prenne $Y = [i,j]$, on obtient :

$$v^+_Y(i) \geqslant [\frac{n-p}{2}] \ v.$$

Remarque

Dans le cas d'une opinion réduite à un tournoi, on a une borne meilleure :

$v^+(i) \geqslant [\frac{n}{2}]$ ([4], p. 19).

Dans la suite de ce paragraphe nous ne considérerons plus que des opinions ordinales $e = (o_1, ..., o_r, ..., o_v)$, c'est-à-dire telle que o_r soit un ordre total, pour tout r. On définit une procédure de vote en associant à une telle opinion ordinale e les ordres médians pour e ; il est donc naturel de rechercher les propriétés de cette procédure à commencer par l'unicité. L'ordre médian ω est évidemment unique s'il n'y a pas d'effet Condorcet, c'est-à-dire si ω égale le tournoi médian θ ; on trouvera dans [14] des conditions suffisantes sur e pour qu'il en soit ainsi. Dans le cas où il y a effet Condorcet, l'ordre médian n'est plus nécessairement unique. Ainsi dans l'exemple 1, ci-dessus, il y a un seul ordre médian $\omega = bca$ avec $D(e,e_\omega) = 76$. Par contre dans l'exemple 2, il y a trois ordres médians, *bcda*, *bdac* et *dabc*. Dans le cas où il y a plusieurs ordres médians, on peut réitérer la procédure en prenant l'ensemble des ordres médians comme nouvelle opinion. Ainsi dans l'exemple 2, on n'obtient plus qu'un seul ordre *bdac* ; mais ce processus ne conduit pas nécessairement à un ordre unique ([11]). Toutefois, il semble qu'en général l'ordre médian soit unique ; mais il serait intéressant de préciser les conditions d'unicité (ou de non unicité).

Les autres axiomes classiquement étudiés par une procédure de votes sont ceux définis par Arrow ou ses continuateurs ; on en trouvera l'exposé le plus complet dans [18] ; on peut facilement montrer que la procédure précédente vérifie les autres axiomes classiques sauf celui d'indépendance ([12] ou [7]). Nous allons maintenant montrer que cette procédure est parétienne, c'est-à-dire qu'un ordre médian pour une opinion $e = (o_1, ..., o_r, ..., o_v)$ contient l'ordre d'unanimité

$$\Pi = \bigcap_{r=1}^{v} o_r.$$

Soit G_e le graphe valué associé à une opinion e ; soit U un ensemble d'arcs de G_e ; on pose

$$v(U) = \sum_{(i,j) \in U} v_{ij}.$$

Lemme

Soit G_e le graphe valué associé à une opinon ordinale e ; pour tout circuit C, de longueur h, de G_e, on a :

$$v \leqslant v(C) \leqslant (h-1)\, v.$$

La démonstration se fait par récurrence sur h ; nous supposons les sommets du circuit numérotés de 1 à h.

La propriété est vrai pour $h = 2$, puisque $v_{12} + v_{21} = v$.

Montrons qu'elle est vraie pour $h = 3$; posons :

$v_{ijk} = \left|\{r \in V : ijk \in o_r\}\right|$; on vérifie que :

$$v_{12} + v_{23} + v_{31} = 2(v_{123} + v_{231} + v_{312}) + v_{132} + v_{321} + v_{213} ;$$

d'où : $v \leqslant v_{12} + v_{23} + v_{31} = v_{123} + v_{231} + v_{312} + v \leqslant 2\, v$ c.q.f.d.

Supposons maintenant la propriété vraie pour $h-1$ et soit un circuit de longueur h ; on a :

(1) $\quad v \leqslant v_{12} + v_{23} + \dots v_{h-2,h-1} + v_{h-1,1} \leqslant (h-2)\, v$

(2) $\quad v \leqslant v_{h-1,h} + v_{h,1} + v_{1,h-1} \leqslant 2\, v$

(2) implique :

$$v_{h-1,1} = v - v_{1,h-1} \leqslant v_{h-1,h} + v_{h,1} \leqslant v - v_{1,h-1} = v + v_{h-1,1}$$

d'où on déduit en reportant dans (1) :

$v \leqslant v_{12} + v_{23} + \dots + v_{h-1,h} + v_{h,1}$ et

$$v_{12} + v_{23} + \dots v_{h-1,1} + v_{h-1,h} + v_{h,1} \leqslant (h-2)\, v + v + v_{h-1,1}$$

soit : $v_{12} + v_{23} + \dots v_{h-1,h} + v_{h,1} \leqslant (h-1)\, v$ c.q.f.d.

Remarque 1

La démonstration précédente montre que la condition du lemme est vérifiée dès qu'elle est vérifiée pour les circuits de longueur 3.

Remarque 2

Il est montré dans [9] que la condition du lemme caractérise les graphes valués associés aux opinions ordinales, c'est-à-dire que si on se donne un tel graphe valué il est possible de trouver v ordres totaux tels que v_{ij} soit le nombre d'ordres totaux contenant le couple (i,j).

Corollaire

Soient e une opinion et (i,j) un couple tel que $v_{ij} = 0$; si $>$ est un ordre total contenant (i,j) tel que l'intervalle $[i,j]$ ait q éléments on a :

$$S = \sum_{i > k > j} (v_{i,k} + v_{k,j}) \leqslant (q-2)\, v$$

Soit en effet k un élément différent de i ou de j ; d'après le lemme, on a :

$$v \leqslant v_{i,k} + v_{k,j} + v_{j,i} \leqslant 2\, v.$$

Mais : $v_{ij} = 0$ implique $v_{ji} = v$, d'où :

$$0 \leqslant v_{i,k} + v_{k,j} \leqslant v$$

et en sommant sur les $q-2$ éléments intermédiaires entre i et j,

$0 \leqslant S \leqslant (q-2)\, v$ c.q.f.d.

Théorème 3

Un ordre médian (pour une opinion ordinale) est parétien (pour cette opinion).

Soit un ordre médian pour l'opinion ordinale $e = (o_1, ..., o_r, ..., o_v)$; on le note ω ou $>$; il faut montrer que $v_{ji} = v$ implique $(j,i) \in \omega$; supposons que $(i,j) \in \omega$ et considérons l'ordre ω^Y restreint à l'intervalle $Y = [i,j]$; posons $|[i,j]| = q$; on a

$$D[e^Y, \omega^Y] = \sum_{i > k > l > j} v_{k,l} = v_{ij} + \sum_{i > k > j} (v_{ik} + v_{kj}) + \sum_{i \geqslant k > l \geqslant j} v_{kl}.$$

Considérons alors l'ordre o^Y défini sur Y en échangeant i et j dans ω^Y ; on a :

$$D[e^Y, o^Y] = v_{ji} + \sum_{i > k > j} (v_{ki} + v_{jk}) + \sum_{i > k > l > j} v_{kl}$$

$$D[e^Y, o^Y] - D[e^Y, \omega^Y] = v_{ji} - v_{ij} + \sum_{i > k > j} (v_{ki} + v_{jk}) - \sum_{i > k > j} (v_{ik} + v_{kj}).$$

Mais $v_{ji} = 0$ et d'après le corollaire précédent

$$S = \sum_{i > k > j} (v_{ik} + v_{kj}) \leqslant (q - r)\ v.$$

Comme $\sum_{i > k > j} (v_{ki} + v_{jk}) + \sum_{i > k > j} (v_{ik} + v_{kj}) = (q - 2)\ v$, on a

$\sum_{i > k > j} (v_{ki} + v_{jk}) \geqslant (q - 2)\ v$ donc

$\sum_{i > k > j} (v_{ki} + v_{jk}) - \sum_{i > k > j} (v_{ik} + v_{kj}) \leqslant 0$, et

$$D[e^Y, o^Y] - D[e^Y, \omega^Y] \leqslant - v$$

$D[e^Y, o^Y] < D[e^Y, \omega^Y]$ ce qui contredit ω^Y médian pour e^Y.

Remarque

Ce résultat répond à une question posée dans [7].

5. FONCTION f(n,v)

Soit une opinion $e \in E = T^v$, sur un ensemble X à n éléments ; posons

$$D(e) = \min_{o \in 0} D(e,e_o) = D(e,e_\omega)$$

où ω est un ordre médian. $D(e)$ constitue un indice de l'éloignement de e vis-à-vis d'une opinion ordinale unanime. On peut normaliser cet indice en posant :

$$c(e) = 1 - \frac{D(e)}{\max\limits_{e \in E} D(e)}$$

On est donc amené à étudier le maximum de $D(e)$ pour $e \in T^v$; nous posons $f(n,v) = \max\limits_{T^v} D(e)$.

Nous considérons aussi la restriction de $f(n,v)$ aux opinions ordinales : nous posons

$$\Phi\ (n,v) = \max_{0^v} D(e).$$

On a évidemment :

$$\Phi\ (n,v) \leqslant f(n,v) \qquad \Phi\ (n,1) = 0$$

La fonction $f(n,1)$ est la fonction $f(n)$ déjà étudiée par différents auteurs ([4]). Nous donnons ci-dessous des propriétés de $f(n,v)$, généralisant des propriétés de $f(n)$, établies dans [4] ; pour v pair on en déduit la valeur exacte de $f(n,v)$.

Soient e une opinion sur X, et $Y \subset X$; nous posons $\bar{Y} = X - Y$,

$$v^+(Y,\bar{Y}) = \sum_{\substack{i \in Y \\ j \in \bar{Y}}} v_{ij} \ ; \ v^+(i) = v^+(i, X - i), \ v^-(i) = v^+(X - i, i).$$

Proposition

Pour toute partie Y de X,

$$D(e) \leqslant D(e^{\bar{Y}}) + D(e^{\bar{Y}}) + \min\ [v^+(Y,\bar{Y}),\ v^+(Y,Y)].$$

Il suffit de considérer les deux ordres totaux sur X obtenus par union d'un ordre médian sur Y et d'un ordre médian sur Y.

Corollaire 1

Pour tout élément i de X, $D(e) \leqslant D(e^{X-i}) + \min\ [v^+(i),\ v^-(i)]$.

En utilisant le fait que pour toute opinion e, il existe $i \in X$ tel que $v^+(i) \leqslant [\frac{(n-1)\ v}{2}] \leqslant v^-(i)$, on obtient alors :

$$f(n,v) \leqslant f(n-1,v) + [\frac{(n-1)\ v}{2}]$$

$$f(n,v) \leqslant \sum_{k=1}^{n} [\frac{(k-1)\ v}{2}].$$

Corollaire 2

Pour v pair, $f(n,v) \leqslant \dfrac{n(n-1)\ v}{4}$.

Pour v impair, $f(n,v) \leqslant \dfrac{n(n-1)\ v}{4} - \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{n}{2}\right]$.

Théorème 4

$$\Phi\ (n,2p) = f(n,2p) = \frac{n(n-1)\ p}{2}.$$

D'après le corollaire 2, il suffit de montrer qu'il existe une opinion ordinale avec

$D(e) = \dfrac{n(n-1)\ v}{4}$. Or il suffit de prendre $e = (o_1, \ldots, o_r, \ldots, o_v)$ avec $o_r = o$ pour $1 \leqslant r \leqslant p$, $o_r = \overline{o}$ pour $p + 1 \leqslant r \leqslant 2p$, où o est un ordre total quelconque, $\overline{o}$ l'ordre inverse. On remarque que tout ordre total est médian pour une telle opinion.

Dans le cas v impair le corollaire 2 donne une borne supérieure pour $f(n,v)$; on va donner une borne inférieure. Soit e l'opinion d'un ensemble V de votants ; considérons une partition de V en deux sous-ensembles V^1 et V^2 ; notons $e^1(e^2)$ la restriction de e à $V^1(V^2)$.

Lemme

Si e^1 et e^2 admettent un même ordre médian, on a :

$$f(n,v) \geqslant D(e^1) + D(e^2).$$

Soit ω un ordre médian pour e ; on a toujours :

$$D(e) = D(e,e_\omega) = D(e^1,e^1_\omega) + D(e^2,e^2_\omega) \geqslant D(e^1) + D(e^2).$$

S'il existe un ordre ω' médian pour e^1 et e^2, on a :

$$D(e) \leqslant D(e,e_{\omega'}) = D(e^1) + D(e^2).$$

D'où finalement :

$$f(n,v) \geqslant D(e) = D(e^1) + D(e^2).$$

Remarque

Le lemme précédent se généralise à une partition quelconque de V.

Proposition (J.-C. Bermond).

$$f(n,2p) + f(n) \leqslant f(n,2p+1).$$

Soient $\bar{o}$ un ordre total quelconque, $\bar{o}$ l'ordre inverse, t un tournoi dont la distance minimum à un ordre total est $f(n)$; considérons l'opinion $e = (t_1, ..., t_r, ..., t_{2p+1})$ avec $t_r = o$, pour $1 \leqslant r \leqslant p$, $t_r = \bar{o}$, pour $p + 1 \leqslant r \leqslant 2p$, $t_{2p+1} = t$; posons $V^1 = \{1, ..., 2p\}$, $V^2 = \{2p + 1\}$; tout ordre total étant médian pour l'opinion e^1 associée à V^1 on peut appliquer le lemme ; d'où :

$$f(n,2p+1) \geqslant D(e^1) + D(e^2) = f(n,2p) + f(n).$$

Corollaire 1

$$\frac{n(n-1)\,p}{2} + f(n) \leqslant f(n,2p+1) \leqslant \frac{n(n-1)\,p}{2} + \frac{n(n-1)}{4} - \frac{1}{2}\left[\frac{n}{2}\right].$$

Immédiat en utilisant le théorème 4 et le corollaire 2 précédent.

Corollaire 2

$$\Phi\,(2,2p+1) = f(2,2p+1) = p$$

$$\Phi\,(3,2p+1) = f(3,2p+1) = 3p+1.$$

En effet, pour $n = 2$ ou 3, les bornes précédentes sont égales.

De plus, on obtient une opinion ordinale e avec $D(e) = 3p+1$, en prenant p ordres égaux à l'ordre *abc*, $p - 1$ ordres égaux à l'ordre *cba*, 1 ordre égal à l'ordre *cab*, 1 ordre égal à l'ordre *bca* ; les ordres médians pour une telle opinion sont les trois ordres *abc*, *cab* et *bca*.

Corollaire 3

$$\lim_{n \to \infty} f(n,v) = \frac{n(n-1)\,v}{4}.$$

Pour v pair ceci résulte du théorème 4 ; pour v impair on utilise le corollaire 1 et le fait, démontré dans [4], que pour $n > n_0$, on a $\frac{4}{n(n-1)} - \varepsilon \leqslant f(n)$.

Il reste à déterminer les valeurs exactes de $\Phi\,(n,v)$ et $f(n,v)$ pour v impair, n supérieur à 3 ; en particulier a-t-on toujours l'égalité $\Phi\,(n,v) = f(n,v)$?

6. ALGORITHMES

Étant donnée une opinion e quels sont les algorithmes pour trouver les ordres médians pour e ?

L'algorithme « naïf » consiste à calculer pour tous les ordres totaux possibles o la distance $D(e,e_o) = \sum_{(i,j) \in o} v_{ji}$ et à retenir le (ou les) ordre(s) à distance minimum ; évidemment cet algorithme devient rapidement impraticable lorsque $|X| = n$ augmente ; cependant les théorèmes 1 et 2 ci-dessus permettent, en principe, de réduire le nombre d'ordres totaux à considérer. Le théorème 2 permet de n'envisager que les ordres totaux compatibles avec l'ordre partiel d'unanimité. Mais pour que cette réduction soit intéressante, il faut qu'il y ait suffisamment de couples unanimes dans e ; *a contrario,* s'il n'y en a aucun, il n'y a aucune réduction. Le corollaire 2 du théorème 1 permet de n'envisager que les ordres totaux associés aux chemins hamiltoniens du tournoi médian θ de e ; on est donc amené à chercher *tous* les chemins hamiltoniens d'un tournoi fortement connexe ([15]), ce qui n'est pas nécessairement aisé.

On peut penser à utiliser un algorithme analogue à celui de « l'arbre minimum » ([17]) ; dans le graphe valué G_e, associé à l'opinion e, on cherche en effet un graphe partiel qui soit un ordre total de poids maximum (ou de poids minimum en considérant l'ordre inverse). Considérons alors l'algorithme suivant : on classe les couples (i,j) par valeurs décroissantes des v_{ij} ; à chaque étape on choisit un couple (i,j) qui ne forme pas de circuits avec les couples déjà retenus et qui soit de valuation maximum (il est équivalent de choisir un couple de valuation maximum n'appartenant pas à la fermeture transitive des couples déjà retenus ou n'étant pas inverse d'un de ces couples). On obtient bien ainsi un ou plusieurs ordres totaux ; mais les ordres totaux n'ont pas la propriété des arbres d'être les bases d'un matroïde ([1]). Aussi il n'est pas surprenant que les ordres obtenus ne soient pas nécessairement médians :

Exemple 3

$$X = \{a,b,c,d\} \quad |V| = 5$$

$$e_1 = acdb,\ e_2 = cdba,\ e_3 = bcad,\ e_4 = bcda,\ e_5 = adbc$$

l'algorithme précédent conduit à deux ordres totaux : $bcad$, médian (à distance 12 de e) ; $cdba$, non médian (à distance 13 de e). Cependant dans le cas $|X| = n = 3$, l'algorithme précédent conduit bien aux ordres médians ([6]). Soient en effet ikj trois éléments consécutifs d'un ordre médian ω ; l'ordre ikj étant médian sur $\{i,k,j\}$ il résulte du théorème 2 que $v_{ik} + v_{ij} \geqslant v_{ki} + v_{ji}$, ce qui est équivalent à $v_{kj} \geqslant v_{ji}$ dans le cas $n = 3$; si par exemple v_{ik} et $v_{kj} > v_{ji}$, l'algorithme conduit bien à l'ordre médian ikj ; de même si l'une des deux valeurs v_{ik}, v_{kj} (ou les deux) égale v_{ji}.

Dans le cas général ($n > 3$) on peut se demander si l'ensemble des ordres totaux obtenus pour une opinion e par l'algorithme précédent contient toujours au moins un ordre médian : la réponse est non pour une opinion quelconque, inconnue (à notre connaissance) pour une opinion ordinale. De toutes façons, les ordres obtenus par cet algorithme semblent assez proches de l'optimum et il serait intéressant de préciser l'approximation obtenue.

Un autre algorithme dû à Jacquet-Lagrèze ([11]) est basé sur le théorème 1 ; le principe consiste en partant d'un ordre arbitraire à optimiser sur les ordres partiels composés de deux, trois, etc., éléments consécutifs. Dans la pratique on utilise des tests pour décider si un ordre partiel est médian ; aussi l'algorithme conduit-il rapidement à une solution mais dont on ne peut affirmer avec certitude qu'elle soit optimale. Cet algorithme est de même nature que l'algorithme des « transferts » utilisé dans le cas où l'on cherche la partition médiane (au même sens que ci-dessus) d'un ensemble de partitions ([16]).

Enfin on pourrait utiliser un algorithme généralisant l'algorithme de Remage-Thompson (amélioré par J.-C. Bermond, cf. [4], p. 20) utilisé pour la recherche des ordres à distance minimum d'un tournoi.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Berge, C., *Graphes et hypergraphes,* Paris, Dunod, 1970.

[2] Barbut, M., *Médianes, Condorcet et Kendall, note SEMA,* Paris, 1967.

[3] Barbut, M., Monjardet B., *Ordre et classification : Algèbre et combinatoire,* 2 t., Paris, Hachette, 1971.

[4] Bermond, J. C., « Ordres à distance minimum d'un tournoi et graphes partiels sans circuits maximaux », *Math. Sci. hum.,* 37, 1972.

[5] Bernard, G., Besson, M. L., « Douze méthodes d'analyse multicritère », *RIRO,* v. 3, octobre 1971.

[6] Degenne, A., *Techniques ordinales en analyse des données : Statistique,* Paris, Hachette, 1972.

[7] Feldman, J., « Pôles, intermédiaires et centres dans un groupe d'opinion », *Math. Sci. hum.,* 43, 1973.

[8] Guilbaud, G. Th., « Les théories de l'intérêt général et le problème logique de l'agrégation », *Economie appliquée,* 15, 1952, repris dans *Eléments de la théorie des jeux,* Paris, Dunod, 1968.

[9] Guilbaud, G. Th., « Préférences stochastiques », *Math. Sci. hum.,* 32, 1970.

[10] Guilbaud, G. Th., Rosenstiehl, P., « Analyse algébrique d'un scrutin », *Math. Sci. hum.,* 4, 1963.

[11] Jacquet-Lagrèze, E., « L'agrégation des opinions individuelles », *Informatique en sciences humaines,* 4, 1969.

[12] Jacquet-Lagrèze, E., « Analyse d'opinions valuées et graphes de préférences », *Math. Sci. hum.,* 33, 1971, p. 33-55.

[13] Kendall, M. G., *Rank correlation methods,* 3e ed., New York, Hafner, 1962.

[14] Monjardet, B., « Correspondance de Galois et procédures de votes », *C.R.A.S.,* t. 272, pp. 1522-1525, 7 juin 1971.

[15] Monjardet, B., « Tournois », note interne au Centre de Mathématiques Sociales, 1972.

[16] Régnier, S., « Sur quelques aspects mathématiques des problèmes de classification automatique », *I.C.C. Bulletin,* 4, Rome, 1965.

[17] Rosenstiehl, P., *L'arbre minimum d'un graphe : Théorie des graphes,* Rome, I.C.C., Paris, Dunod, 1967, 357-368.

[18] Sen, A. K., *Collective choice and social welfare,* Londres, Oliver and Boyd, 1970.

[19] Roy, B., Décisions avec critères multiples, problèmes et méthodes, *Metra,* 11, 1, 1972.