MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

E. JACQUET-LAGRÈZE

Le problème de l'agrégation des préférences : une classe de procédures à seuil

Mathématiques et sciences humaines, tome 43 (1973), p. 29-37
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1973__43__29_0>

Math. Sci. hum. (11ᵉ *année*, n° 43, 1973, p. 29-37)

LE PROBLÈME DE L'AGRÉGATION DES PRÉFÉRENCES : UNE CLASSE DE PROCÉDURES A SEUIL

par

E. JACQUET-LAGRÈZE [1]

RÉSUMÉ

Après avoir rappelé les conditions et le théorème d'Arrow, l'article présente une classe de procédures d'agrégation à seuil, dont les cas particuliers sont la règle de l'unanimité et la procédure majoritaire de Condorcet.

La première apparaît comme une procédure très prudente mais pauvre, la seconde comme une procédure plus riche mais risquée. Choisir un seuil est alors choisir une procédure intermédiaire entre ces deux procédures extrêmes. L'article discute alors de conditions dans lesquelles peuvent apparaître des circuits dans la relation de préférence collective. Des indices de pouvoir de l'électeur sont également présentés.

SUMMARY

After recalling Arrow's conditions and theorems, this article presents a class of aggregation rules using thresholds, particular cases of which are the Pareto relation construction and the majority rule of Condorcet. The first procedure appears to be very prudent but poor, the second more fruitful but risky. Choosing a threshold means in other words choosing a procedure intermediate between the latter two extremes. The paper discusses the conditions in which cycles may appear in social ordering. Indices of the power of voters are also presented.

Le problème de l'agrégation des préférences se pose de la façon suivante : une assemblée de p électeurs émet ses préférences pour n candidats sous la forme de p classements, c'est-à-dire de p préordres totaux sur les n candidats.

1. SEMA (Metra-International), Direction Scientifique.

Peut-on choisir une règle d'agrégation, ou procédure de vote, permettant de dégager une préférence collective à partir de préférences individuelles ? [1], [2], [5], [7], [10].

Après avoir rappelé le théorème d'Arrow, nous présenterons deux procédures bien connues, la règle de majorité par paires ou procédure de Condorcet et la règle de l'unanimité comme deux cas particuliers d'une classe de procédures à seuil. Ces procédures à seuil permettent de construire une relation de préférence collective partielle. Nous étudierons alors les conditions dans lesquelles cette préférence collective peut contenir des circuits.

1. LES CONDITIONS ET LE THÉORÈME D'ARROW

Arrow [1], [2] a présenté un certain nombre de conditions que devrait satisfaire toute procédure d'agrégation. Ces conditions sont les suivantes :

1.1. Une préférence individuelle est un préordre complet sur les objets et tous les préordres complets sont admissibles.

1.2. Si un individu améliore le classement d'un objet dans un préordre, le classement de l'objet dans la préférence collective ne doit pas baisser.

1.3. La préférence collective relativement à un sous-groupe des objets ne dépend que des préférences individuelles relativement à ce sous-groupe (en particulier, si un objet est retiré, la préférence collective sur les autres objets ne doit pas être modifiée). Cette condition est parfois appelée indépendance vis-à-vis des choix extérieurs.

1.4. Aucune préférence collective n'est *a priori* interdite (il existe toujours un système de préordres individuels tels qu'un objet soit préféré à un autre collectivement).

1.5. Aucun individu ne peut imposer son choix (aucun individu ne doit être dictateur).

1.6. La préférence collective est un préordre complet.

Arrow a démontré que ces *six conditions sont incompatibles* si on a plus de deux objets et plus de deux électeurs. Par conséquent, toute procédure imaginée ou imaginable violera une ou plusieurs des conditions d'Arrow.

En général les conditions non respectées sont :

— la première : on restreint l'ensemble des préordres admissibles (condition de Black, condition de Sen) ;

— la troisième : indépendance des choix extérieurs ;

— la sixième : la préférence collective n'est pas un préordre complet.

2. DEUX PROCÉDURES D'AGRÉGATION BIEN CONNUES : LA RÈGLE DE MAJORITÉ PAR PAIRES DE CONDORCET [5] ET LA RÈGLE DE L'UNANIMITÉ

Dans la suite, nous supposerons que les préordres collectifs sont des ordres totaux (absence d'exæquo). Soit n_{ij} le nombre de fois où i est préféré à j et n_{ji} le nombre de fois où j est préféré à i.

Dans ces conditions :

$$\forall\ i \neq j \quad n_{ij} + n_{ji} = p.$$

2.1. *La règle de majorité par paires de Condorcet*

Pour la collectivité, on aura :

$iPj \Leftrightarrow n_{ij} > n_{ji} \Leftrightarrow n_{ij} > p/2$ où P représente larelation de préférence collective. On sait que cette procédure satisfait aux cinq premières conditions d'Arrow mais pas à la sixième. La relation P n'est pas nécessairement un préordre complet.

Si p est impair, P est un tournoi c'est-à-dire une relation complète, antisymétrique et qui se présente en général avec des intransitivités (un ordre total est un tournoi transitif, ou tournoi sans intransitivités, ou sans circuits). A partir d'un tournoi, on peut se poser le problème de l'approximer par un ordre total [3], [4].

2.2. *La règle de l'unanimité*

Pour la collectivité, on aura :

$$iPj \Leftrightarrow n_{ij} = p,\ n_{ji} = 0.$$

Une telle procédure conduit à un ordre partiel : P est transitive mais ne permet pas la comparaison de tous les objets. Elle satisfait également aux cinq premières conditions d'Arrow mais pas à la sixième. De plus, l'ordre partiel lorsqu'il n'est pas vide demeure souvent très pauvre, et cette procédure devient alors peu opérationnelle.

2.3. *Comparaison des deux procédures : deux extrêmes qui se rejoignent*

— Nous dirons que la procédure de Condorcet est risquée. En effet, il suffit qu'un individu sur les p change de préférence pour que la préférence collective puisse être modifiée. Supposons que $p = 2\ m + 1$, que m électeurs préfèrent i à j et m : j à i ; dans ces conditions, la préférence collective sera la préférence du p^e électeur : les $2\ m$ électeurs se neutralisent, le p^e a un pouvoir entier sur le sens de la préférence collective. En adoptant la procédure majoritaire, la collectivité prend ainsi un risque : une minorité est capable d'inverser la préférence collective.

— Mais nous dirons également que la *règle de l'unanimité* est une procédure prudente pour ne pas dire paralysante. Si $p - 1$ électeurs sont unanimes pour préférer i à j, le p^e électeur a le pouvoir d'annuler l'unanimité des $p - 1$ autres électeurs en donnant l'ordre j préféré à i.

— Deux procédures qui semblent extrêmes selon un point de vue risque-prudence semblent en fait devenir très proches en ce qui concerne le pouvoir d'un électeur sur le résultat de la préférence collective dans certaines situations données il est vrai.

3. UNE CLASSE DE PROCÉDURES A SEUIL

B. Roy [8] a été conduit à introduire la notion de risque dans la définition d'une procédure d'agrégation, en construisant des *relations de surclassement : S.*

On aura iSj si d'après l'information dont on dispose, on peut prendre le risque d'admettre que i est préféré à j pour la collectivité. Dans cette optique, le tableau des n_{ij} n'est qu'une information qui nous permet de savoir dans quelles conditions on prendra un risque en admettant la relation iPj.

On peut alors introduire un seuil α tel que iPj si la proportion des avis i préféré à j dépasse ce seuil.

3.1. *Définition d'une procédure à seuil*

Soit P_α une relation de préférence collective. Une procédure à seuil consiste à construire une relation P_α telle que :

$$iP_\alpha\, j \Leftrightarrow n_{ij} > p\,\alpha \Leftrightarrow n_{ji} < (1-\alpha)\, p \quad \text{où } 1/2 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

La relation P_α obtenu est antisymétrique et partielle. Schématiquement on a la règle suivante :

n_{ij}	0	$(1-\alpha)\,p$	$\alpha\, p$	p
P		$jP_\alpha\, i$	i et j non comparables par P_α	$iP_\alpha\, j$

Pour $\alpha = 1/2$, on obtient la procédure de Condorcet.

Pour $\alpha = 1$, on obtient la règle de l'unanimité [1].

Ces deux procédures sont donc deux procédures α particulières. Les procédures P_α vérifient également les cinq premières conditions d'Arrow mais pas la sixième : P_α n'est pas en général un préordre complet. Le plus souvent, P_α est une relation partielle, pouvant même contenir des circuits, mais nous reviendrons sur cette question dans le paragraphe suivant.

3.2. *Seuil et risque de la procédure*

Les règles de majorité par paires et d'unanimité sont extrêmes selon le point de vue risque-prudence et correspondent aux deux valeurs extrêmes du seuil α.

Le seuil α peut être interprété comme un *indice de prudence* de la procédure. Plus le seuil est grand, moins on prend de risque lorsqu'on se prononce pour une préférence collective $iP_\alpha\, j$.

---

1. En toute rigueur, pour $\alpha = 1 - \varepsilon$ avec $\varepsilon \leq \frac{1}{p}$, on obtient la règle de l'unanimité. $\alpha = 1$ conduit à une relation toujours vide.

3.3. *Seuil et pouvoir de l'électeur*

Pour α quelconque, on constate qu'il faut $2\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) p + 1$ électeurs changeant d'opinion pour que de $iP_\alpha j$ on obtienne $jP_\alpha i$, c'est-à-dire pour renverser la préférence collective. De même on constate qu'il faut $(1 - \alpha)\, p + 1$ électeurs pour émettre un veto sur la préférence $iP_\alpha j$. Ceci permet de définir deux indices de pouvoir de l'électeur.

- Indice de pouvoir d'inversion de la préférence collective d'un électeur :

Par définition : $P_i = \dfrac{1}{(2\alpha - 1)\, p + 1}$

- Indice de pouvoir de veto d'un électeur (refuser la préférence collective) :

Par définition : $P_v = \dfrac{1}{(1 - \alpha)\, p + 1}$

Pour la procédure majoritaire $\left(\alpha = \frac{1}{2}\right)$

$$P_i = 1, \qquad P_v = \frac{1}{\frac{p}{2} + 1}$$

1 électeur peut inverser une préférence mais il faut dans certains cas $\frac{p}{2} + 1$ électeurs pour refuser une préférence collective.

Pour la procédure de l'unanimité ($\alpha = 1$) :

$$P_i = \frac{1}{p + 1}, \qquad P_v = 1$$

1 électeur peut refuser une préférence collective, mais il faut parfois p électeurs pour inverser une préférence collective.

Les deux indices de pouvoir de l'électeur sont égaux lorsque :

$$(2\alpha - 1)\, p + 1 = (1 - \alpha)\, p + 1 \quad \text{soit} \quad \boxed{\alpha = \frac{2}{3}}$$

La procédure $\alpha = \frac{2}{3}$ est donc la seule qui donne à chaque électeur le même pouvoir pour inverser une préférence collective ou pour refuser une préférence collective.

• Des indices de pouvoir d'une coalition de m membres pourraient être :

$$P_i = m\ p_i \text{ et } P_v = m\ p_v.$$

3.4. *Les conditions d'absence de circuits*

On peut se demander à quelles conditions le graphe correspondant à la relation P_α contient des circuits.

Dans un article récent, G. Th. Guilbaud [6] montre que le long d'un circuit de longueur l, la somme des probabilités estimées par $\frac{n_{ij}}{p}$ est comprise entre 1 et $l - 1$. Autrement dit, si C_l est un circuit de longueur l,

$$1)\quad 1 < \sum_{(i,j) \in C_l} \frac{n_{ij}}{p} \leqslant l - 1$$

Or, pour que P_α donne naissance à un circuit de longueur l, il est nécessaire et suffisant que : $n_{ij} > p\alpha \quad \forall\ (i,j) \in C_l$. En sommant sur les l arcs du circuit on en déduit une condition nécessaire pour obtenir un circuit de longueur l :

$$2)\quad \sum_{(i,j) \in C_l} n_{ij} \geqslant l\ p\alpha.$$

1) et 2) donnent :

$$l\alpha < \sum_{(i,j) \in C_l} \frac{n_{ij}}{p} \leqslant l - 1 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\alpha < \frac{l-1}{l}}$$

$\alpha < \frac{l-1}{l}$ est donc une condition nécessaire pour avoir un circuit de longueur l dans une procédure α.

D'après le résultat de G.-Th. Guilbaud présenté sous cette nouvelle forme, on en déduit donc : « Une condition suffisante pour qu'une procédure α ne puisse conduire à des circuits de longueur l est que le seuil soit supérieur ou égal à $\frac{l-1}{l}$.

$$\boxed{\alpha \geqslant \frac{l-1}{l} \Rightarrow P_\alpha \text{ ne peut contenir aucun circuit de longueur inférieure ou égale à } l.}$$

Cette condition n'est évidemment pas nécessaire car un seuil inférieur à $\frac{l-1}{l}$ peut ne pas conduire à des circuits (absence d'effet Condorcet dans une procédure majoritaire par exemple).

Du théorème on en déduit le corollaire :

Une condition suffisante pour qu'une procédure d'agrégation ne puisse conduire à un circuit est que α soit supérieur ou égal à $\dfrac{n-1}{n}$.

Ce corollaire est intéressant pour $n = 3$ ($\alpha = \dfrac{2}{3}$) et peut être pour $n = 4$ ($\alpha = \dfrac{3}{4}$), mais au-delà, α serait trop proche de 1 et la relation P_α serait trop pauvre.

Deux exemples

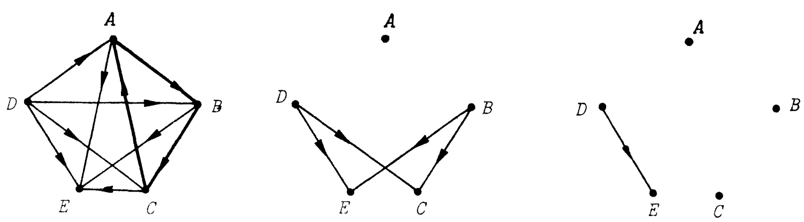
Exemple 1 : Soient 5 objets classés par 5 experts, les classements étant les permutations :

1	A	B	C	D	E
2	D	B	C	A	E
3	D	E	C	A	B
4	A	D	B	E	C
5	B	D	C	E	A

Le tableau n_{ij} est le suivant :

	A	B	C	D	E
A	0	3	2	2	3
B	2	0	4	2	4
C	3	1	0	1	3
D	3	3	4	0	5
E	2	1	2	0	0

Suivant les valeurs du seuil α on obtient les 3 solutions suivantes :



$\dfrac{4}{5} \leqslant \alpha < 1$ $\quad$ $\dfrac{3}{5} \leqslant \alpha < \dfrac{4}{5}$ $\quad$ $\dfrac{1}{5} \leqslant \alpha < \dfrac{2}{5}$

Figure 1

Exemple 2 :

Agrégation des n permutations circulaires des n objets :

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \ldots n \\ 2 & 3 & 4 \ldots 1 \\ \vdots & & \\ n & 1 & 2 \ldots n-1 \end{matrix}$$

Le tableau (n_{ij}) correspondant est le suivant :

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \hline 1 & 0 & n-1 & n-2 & \dots & 1 \\ 2 & 1 & 0 & n-1 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & & & & \\ n & n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 0 \end{array}$$

c'est-à-dire : $n_{ij} = n - (j - i)$ pour $i < j$
$n_{ij} = i - j$ pour $i > j$.

Si $\alpha = \dfrac{n-1}{n}$, on n'a pas de circuits et tous les objets sont incomparables.

Si $\alpha = \dfrac{n-1}{n} - \varepsilon$, alors on obtient le circuit de longueur n :

$$1\,P\,2\,P\,3 \dots n-1\,P\,n\,P\,1.$$

CONCLUSION

Cette classe de procédures à seuil semble posséder des propriétés mathématiques nombreuses ; nous avons vu les conditions pour ne pas avoir de circuits de longueur donnée. D'autre part, la procédure de Condorcet et la règle de l'unanimité sont des cas particuliers de cette classe de procédures.

D'autres propriétés restent à mettre en évidence. Notamment, on peut chercher à généraliser la condition de Sen qui permet de rendre transitive la procédure Condorcet en interdisant dans les ordres admissibles la présence simultanée de trois permutations circulaires sur un triplet. La condition plus générale porterait sur l'interdiction de la présence simultanée des l permutations circulaires sur tout l-uplet.

Sur le plan des applications pratiques dans l'aide à la décision, notamment dans les études multicritères, les procédures à seuil semblent être un outil aisé à utiliser dans le cas de données ordinales. Elles permettent une intervention du décideur notamment dans le choix et l'essai de différents seuils, elles permettent à ce dernier de se situer entre les deux procédures extrêmes de la règle de l'unanimité et de la règle Condorcet.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ATTALI, J., *Analyse économique de la vie politique,* Paris, Presses Universitaires de France, 1972.

[2] ARROW, K. J., *Social choice and individual value,* New York, Wiley, 1963.

[3] BARBUT, M., « Note sur les ordres totaux à distance minimum d'une relation binaire donnée », *Math. Sci. hum.*, 17, 1966.

[4] BERMOND, J.-C., « Ordres à distance minimum d'un tournois et graphes partiels sans circuits maximaux », *Math. Sci. hum.*, 37, 1972.

[5] GUILBAUD, G. Th., *Éléments de la théorie mathématique des jeux*, Paris, Dunod, 1968.

[6] GUILBAUD, G. Th., « Préférences stochastiques », *Math. Sci. hum.*, 32, 1970.

[7] JACQUET-LAGRÈZE, E., « L'agrégation des opinions individuelles », *Informatique en sciences humaines*, 4, 1969.

[8] ROY, B., « La méthode Électre », RFRO, 8, 1968.

[9] ROY, B., « How outranking relation helps multiple criteria decision-making », Paper presented at the *Seminar on Multiple Criteria Decision-Making*, University of South Carolina, Columbia, SC, October 1972.

[10] SEN, A.-K., *Collective choice and social welfare*, Londres, Oliver and Boyd, 1970.