Y. LADEGAILLERIE

Sur un problème d'ordre lié à la permutation de variables

Mathématiques et sciences humaines, tome 41 (1972), p. 5-12
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1972__41__5_0>

Math. Sci. hum. (11e année, n° 41, 1973, p. 5-12)

SUR UN PROBLÈME D'ORDRE LIÉ A LA PERMUTATION DE VARIABLES

par

Y. LADEGAILLERIE [1]

I. INTRODUCTION

On considère une fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant l'hypothèse :

$$(\mathscr{H})\ \forall x\ \forall y\ \forall x'\ \forall y'\ (x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}, x' \in \mathbf{R}, y' \in \mathbf{R})$$
$$(x < x') \text{ et } (y > y') \Rightarrow f(x, y) - f(x, y') + f(x', y') - f(x', y) < 0$$

(cette condition exprime en quelque sorte que la croissance en y est d'autant plus forte que x est plus grand ; par exemple, la fonction $f(x, y) = x\,y$ vérifie cette hypothèse).

Alors, pour une suite croissante : $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$, de n réels et une suite décroissante : $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_n$ de n réels et pour une substitution σ des entiers $\{1, 2, \ldots, n\}$ on peut considérer le réel $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_{\sigma(i)})$. Si l'on désigne par x la suite croissante (on notera $\mathrm{x} \in \mathbf{R}^n \uparrow$), et par y la suite décroissante (ce qu'on notera $\mathrm{y} \in \mathbf{R}^n \downarrow$), on définit ainsi une fonction des $2n$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ que l'on notera S_σ ; $S_\sigma(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ désignera sa valeur pour x et y.

Il s'agit alors de comparer $S_\sigma(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ et $S_{\sigma'}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ pour deux substitutions σ et σ' d'ordre n.

Nous introduisons la notion de transfert :

— On dira qu'on passe de σ à σ' par transfert direct positif s'il existe deux entiers i et j, $(i \leqslant n, j \leqslant n)$, et une transposition τ échangeant $\sigma(i)$ et $\sigma(j)$ avec :

$$i < j$$
$$\sigma(i) < \sigma(j)$$
$$\tau \circ \sigma = \sigma'.$$

— On dira qu'on passe de σ à σ' par transfert positif si on passe de σ à σ' par une suite (nécessairement finie) de transferts directs positifs (c'est-à-dire s'il existe une suite $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_p$ de substitutions, avec $\sigma_0 = \sigma$, $\sigma_p = \sigma'$, telle qu'on passe de σ_i à σ_{i+1} par transfert direct positif, pour tout entier $i = 0, 1, \ldots, p - 1$).

On peut définir sur l'ensemble des fonctions S_σ un ordre par :

« $S_\sigma \leqslant S_{\sigma'}$ si pour toute suite croissante x et pour toute suite décroissante y, on a : $S_\sigma(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \leqslant S_{\sigma'}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ »

---

1. Structures de l'Information, Institut Henri-Poincaré, 11, rue Pierre-et-Marie-Curie, Paris 5e.

Le problème de l'étude de cet ordre se pose pour certaines fonctions f dans la recherche de l'optimisation de questionnaires avec coûts [7] [8].

II. THÉORÈME FONDAMENTAL

Nous allons démontrer le théorème suivant :

« L'ordre ainsi défini sur les fonctions S_σ ne dépend pas de la fonction f vérifiant l'hypothèse ($\mathscr{H}$). Plus précisément : S_σ est inférieure à $S_\sigma{}'$ pour cet ordre, si et seulement si on peut passer de σ à σ' par un transfert positif. »

Démonstration

Un calcul simple montre que si l'on passe de σ à σ' par un transfert direct positif, alors :

$$\forall x \, \forall y \, (x \in \mathbf{R}^n \uparrow, \; y \in \mathbf{R}^n \downarrow)$$

on a :

$$S_\sigma (x, y) \leqslant S_\sigma{}' (x, y).$$

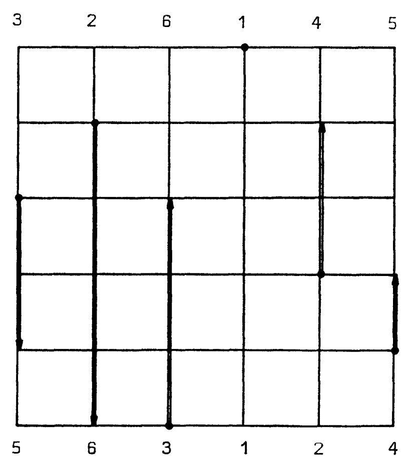
On en déduit facilement la même propriété pour un transfert positif.

La démonstration de la réciproque est beaucoup plus délicate, elle se fait en plusieurs étapes. Il est utile d'introduire la notion de diagramme de passage de σ à σ' pour faciliter la compréhension de cette démonstration.

III. DIAGRAMMES DE PASSAGE

Définition

Si σ est la substitution $(\sigma (1), \sigma (2), \ldots, \sigma (n))$ et σ' la substitution $(\sigma' (1), \sigma' (2), \ldots, \sigma' (n))$, on obtient le diagramme de passage $\Delta (\sigma, \sigma')$ de la façon suivante : on trace un carré de dimensions $n \times n$ dont on numérote lignes et colonnes de 1 à n. La colonne n° i représentera le couple $(\sigma (i), \sigma' (i))$: pour cela, dans cette colonne, on trace une flèche de la ligne $\sigma (i)$ à la ligne $\sigma' (i)$.



Exemple : $\sigma = (3, 2, 6, 1, 4, 5)$
$\sigma' = (5, 6, 3, 1, 2, 4)$

Il est également utile d'introduire la matrice de passage de σ à σ', $M(\sigma, \sigma')$, construite de la manière suivante : c'est une matrice $(n - 1, n)$ dont le terme de la $i^{\text{ème}}$ ligne, $j^{\text{ème}}$ colonne, noté $M^i(j)$, est obtenu en ne considérant que la portion de $\Delta(\sigma, \sigma')$ comprise entre les lignes i et $i + 1$ et en posant :

$$M^i(j) = \begin{cases} 0 & \text{si aucune flèche ne passe en colonne } j \\ 1 & \text{si une flèche descendante passe en colonne } j \\ -1 & \text{si une flèche montante passe en colonne } j \end{cases}$$

Exemple : dans l'exemple ci-dessus, on a :

$$M(\sigma, \sigma') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On utilisera aussi la matrice caractéristique $C(\sigma, \sigma')$ formée des nombres caractéristiques :

$$S^i(j) = \sum_{k \leq j} M^i(k).$$

Dans l'exemple précédent, c'est :

$$C(\sigma, \sigma') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Propriétés élémentaires de ces diagrammes :

Nous ne démontrons pas les propriétés élémentaires suivantes :

— La somme vectorielle de toutes ces flèches est nulle.

— Pour tout i, on a $\sum_{j=1}^{n} M^i(j) = 0$ (ou encore $S^i(n) = 0$).

— Étant donnés $\Delta(\sigma, \sigma')$ et $\Delta(\sigma', \sigma'')$ deux diagrammes de passage, on obtient $\Delta(\sigma, \sigma'')$ en faisant pour chaque colonne j, la somme vectorielle des flèches figurant dans la colonne j de $\Delta(\sigma, \sigma')$ et dans la colonne j de $\Delta(\sigma', \sigma'')$. (Cette somme de vecteurs liés existe car l'extrémité du premier coïncide avec l'origine du second.)

Remarque

Par rapport à la représentation de σ par un diagramme que donne A. Comtet (*cf.* [2]), celle-ci présente la propriété de composition sous forme vectorielle et ceci va être très utile dans la suite.

IV. DIAGRAMMES SIGNÉS

Le diagramme $\Delta(\sigma, \sigma')$ sera dit signé positif si tous les éléments de $C(\sigma, \sigma')$ sont positifs ou nuls.

Proposition 1

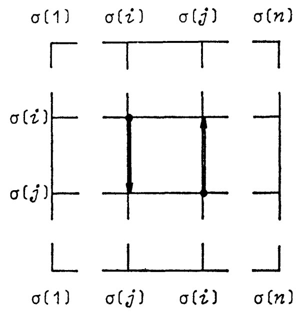
« Si $\Delta(\sigma, \sigma')$ est signé positif, alors on passe de σ à σ' par un transfert positif. »

Remarque

Il y a, en fait, équivalence entre les deux propriétés, mais on ne se servira que de cette implication.

Démonstration

Nous allons montrer que si $\Delta(\sigma, \sigma')$ est signé positif, il est la somme de diagramme de transfert direct positif ; le diagramme du transfert direct positif échangeant $\sigma(i)$ et $\sigma(j)$, $(i < j, \sigma(i) < \sigma(j))$ a la forme suivante :



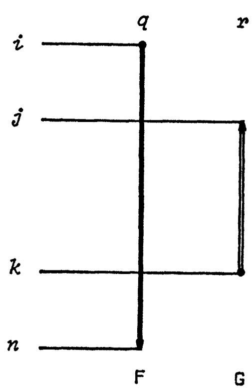
Nous lui donnerons le nom de boucle élémentaire.

Pour décomposer $\Delta(\sigma, \sigma')$, signé positif, en somme de boucles élémentaires, on utilise l'algorithme suivant :

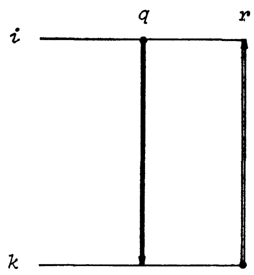
$\Delta(\sigma, \sigma')$ étant de dimension $n \times n$, soit q tel que $\sigma'(q) = n$, soit $i = \sigma(q)$. (On suppose $i \neq n$ sinon le diagramme se ramènerait à un diagramme $(n-1) \times (n-1)$ par suppression de la dernière ligne et de la colonne q, inutiles.)

Il y a donc une flèche descendante F dans la colonne q entre les lignes i et n. Considérons alors les flèches montantes situées dans les colonnes d'indice supérieur à q et qui ont une portion de leur corps entre les lignes i et n. De telles flèches existent car le diagramme étant positif, les lignes de $C(\sigma, \sigma')$ sont positives et comme $M^l(q) = 1$ pour $l = i, i+1, \ldots (n-1)$, on a $S^l(q) = S^l(q-1) + 1 \geqslant 1$; comme $S^l(n) = 0$, il existe q', $q' > q$, tel que $M^l(q') = -1$.

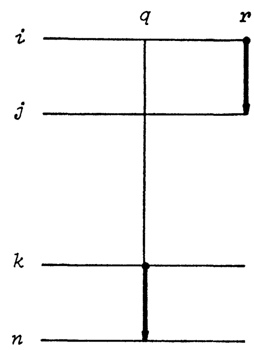
Appelons G celle de ces flèches d'indice le plus faible : r, et posons $j = \sigma'(r)$, $k = \sigma(r)$.



Nous allons soustraire à $\Delta(\sigma, \sigma')$ le diagramme de transfert direct positif échangeant i et k en colonnes q et r, soit :



Le diagramme obtenu ne diffère du précédent que par les colonnes q et r :



Le nouveau diagramme est encore positif :

La ligne n° l pour $l \geqslant k$, de $M(\sigma, \sigma')$ est inchangée. Considérons la ligne n° l de $C(\sigma, \sigma')$ pour $j \leqslant l \leqslant k$.

Cette ligne est :

$S^l(1), S^l(2), \ldots, S^l(q-1), S^l(q), S^l(q+1), \ldots, S^l(r-1), S^l(r), S^l(r+1), \ldots, S^l(n)$
avant l'opération, ces nombres sont positifs ou nuls et comme G est la flèche montante la plus proche, à droite de F, on a :

$$S^l(q) \leqslant S^l(q+1), \ldots, \leqslant S^l(r-1) \qquad \text{et} \qquad S^l(q) = S^l(q-1) + 1$$

donc :

$$S^l(q) \geqslant 1, S^l(q+1) \geqslant 1, \ldots, S^l(r-1) \geqslant 1 \qquad \text{et} \qquad S^l(r) \geqslant 0.$$

Dans l'opération de transfert, $M^l(q)$ et $M^l(r)$ deviennent égaux à zéro ; cela ne change pas $S^l(j)$ pour : $j < q$ ou $j \geqslant r$; cela diminue $S^l(j)$ de 1 pour : $j \geq q$ et $j < r$, mais $S^l(j)$ reste positif car il était supérieur à un.

Considérons enfin la ligne n° l pour $i \leqslant l < j$ (uniquement dans le cas où $j \geqslant i$; dans le cas contraire, la démonstration est terminée).

Avant l'opération : $M^l(q) = 1$, $M^l(r) = 0$
après : $M^l(q) = 0$, $M^l(r) = 1$
donc, avant : $1 \leqslant S^l(q) \leqslant S^l(q+1), \ldots, \leqslant S^l(r)$.

L'opération a pour effet de diminuer $S^l(j)$ de 1 pour : $q \leqslant j < r$, ce qui laisse positif et ne le change pas pour $j < q$ ou $j \geqslant r$.

Le diagramme étant de nouveau positif, mais la flèche F ayant diminué strictement de longueur, on peut alors itérer l'opération jusqu'à sa complète disparition. Le diagramme obtenu alors étant de dimension $(n - 1) \times (n - 1)$, (au plus), la démonstration s'achève par récurrence.

V. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

Il suffira donc de montrer que si S_σ est plus petit, pour l'ordre considéré, que $S_{\sigma'}$ alors le diagramme $\Delta(\sigma, \sigma')$ est signé positif.

Lemme 1

« La différence $S_\sigma - S_{\sigma'}$ est égale à $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i$, où l'on a posé :

$$\lambda_i = \sum_{l=1}^{k(i)} [f(x_{i_l}, y_i) - f(x_{i_l}, y_{i+1}) + f(x_{i'_l}, y_{i+1}) - f(x_{i'_l}, y_i)]$$

où les indices i_l et i'_l sont tous différents et où les suites i_l et i'_l sont croissantes. »

Démonstration

On a :

$$S_\sigma - S_{\sigma'} = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i, y_{\sigma(i)}) - f(x_i, y_{\sigma'(i)})].$$

On pose : $k = \sigma(i)$, $l = \sigma'(i)$.

Si $k < l$, on a :

$$f(x_i, y_k) - f(x_i, y_l) = [f(x_i, y_k) - f(x_i, y_{k+1})] + [f(x_i, y_{k+1}) - f(x_i, y_{k+2})] + \dots + [f(x_i, y_{l-1}) - f(x_i, y_l)]$$

Si $k > l$, on effectue une décomposition analogue. On regroupe ensuite les termes ayant même y_k et y_{k+1}, cela donne λ_k ; λ_i est donc une somme de termes de la forme $\pm Q^i_j$ (en notant $Q^i_j = f(x_j, y_i) - f(x_j, y_{i+1})$. Le terme $+ Q^i_j$ figure dans λ_i équivaut à $M^i(j) = 1$. Le terme $- Q^i_j$ qui figure dans λ_i équivaut à $M^i(j) = -1$. Comme $S^i(n) = 0$, il y a autant (pour i fixé) de Q^i_j muni du signe + que du signe —. De plus, chacun figure une fois ou pas du tout dans λ_i. Ceci permet de placer les termes $+ Q^i_j$ dans l'ordre croissant des indices j, ainsi que les $- Q^i_j$ et de les regrouper deux à deux pour donner l'expression du lemme 1.

Remarque

Au passage, remarquons que dans l'expression de λ_i :

$$\lambda_i = \sum_{l=1}^{k} [f(x_{i_l}, y_i) - f(x_{i_l}, y_{i+1}) + f(x_{i'_l}, y_{i+1}) - f(x_{i'_l}, y_i)],$$

le fait que les indices i_l et i'_l y figurent, signifie que :

$$M^i(i_l) = 1, \quad M^i(i'_l) = -1.$$

Lemme 2

« Avec les notations du lemme 1 :

$$S_\sigma \leqslant S_{\sigma'}, \quad \Leftrightarrow \quad \forall i, (i = 1, \dots, n-1), \forall l\ (l = 1, \dots, k(i)) \quad (i_l < i'_l). »$$

Démonstration

1) Si $i_l < i'_l$ alors l'hypothèse ($\mathscr{H}$) implique que pour tout i : $\lambda_i(\mathrm{x}, \mathrm{y}) < 0$ et donc $S\sigma \leqslant S\sigma'$.

2) Supposons $S\sigma \leqslant S\sigma'$ et qu'il existe i et l_0 tels que $i_{l_0} > i'_{l_0}$.

Alors, soit :

$$\mathrm{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n), (y \in \mathbf{R}^n \downarrow),$$

avec :

$$y_1 = y_2, \ldots, y_i > y_{i+1} = y_{i+2}, \ldots, = y_n.$$

Alors, seul y_i est non nul.

Prenons ensuite :

$$\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \ (\mathrm{x} \in \mathbf{R}^n \uparrow)$$

avec :

$$x_1 = x_2, \ldots, x_{i'_{l_0}} = \ldots = x_{(i_{l_0}-1)} < x_{i_{l_0}} = \ldots = x_n$$

et soit toujours :

$$Q^i_j = f(x_j, y_i) - f(x_j, x_{i+1}).$$

Si $\quad l < l_0,\ x_{i_l} = x_{i'_l}$ et $(Q^i_{i_l} - Q^i_{i'_l}) = 0.$

Si $\quad l = l_0,\ x_{i'_{l_0}} < x_{i_{l_0}}$ et $(Q^i_{i_l} - Q^i_{i'_l}) > 0.$

(d'après l'hypothèse ($\mathscr{H}$).

Si $\quad l > l_0,\ x_{i'_l} \leqslant x_{i_l}$ et donc $(Q^i_{i_l} - Q^i_{i'_l}) \geqslant 0.$

Donc :

$$\lambda_i = \sum_l [Q^i_{i_l} - Q^i_{i'_l}] > 0 \text{ — contradiction.}$$

Lemme 3

« $S\sigma \leqslant S\sigma'$ entraîne $\Delta(\sigma, \sigma')$ signé positif. »

Ce lemme, vu les remarques précédentes, entraîne le théorème. En fait, il y a équivalence, là aussi, entre les deux propositions, mais cette implication nous suffit.

On sait (remarque ci-dessus) que si $S\sigma - S\sigma'$ est écrit sous la forme du lemme 1, alors :

$$\begin{aligned} \forall i, \forall l :\ & M^i(i_l) = 1 \\ & M^i(i'_l) = -1 \\ & i_l < i'_l \end{aligned} \qquad \text{(lemme 2)}$$

Considérons, pour i fixé, les nombres caractéristiques $S^i(1)$, $S^i(2) \ldots S^i(n)$. Comme $M^i(i_l) = 1$, $M^i(i'_l) = -1$, on a :

$$S^i(j) = N_j - N'_j$$

où :

N_j est le nombre des i_l tels que $i_l \leqslant j$,

N'_j est le nombre des i'_l tels que $i'_l \leqslant j$.

Alors, soit j, $j \leqslant n$ et soit $i'_{l_0} = \sup\{i'_l, i'_l \leqslant j\}$ alors $N'_j = l_0$ et comme $i_{l_0} < i'_{l_0}$, on a $i_{l_0} \leqslant j$ et $N_j \geqslant l_0$ et donc $S^i(j) \geqslant 0$.

On vient de démontrer que pour tout couple (i, j) le nombre caractéristique $S^i(j)$ est positif ou nul, le diagramme $\Delta(\sigma, \sigma')$ est donc signé positif.

VI. CONCLUSION

La méthode des diagrammes de passage a été très utile pour démontrer ce résultat de type combinatoire. On peut généraliser largement ce théorème en prenant un groupe ordonné quelconque au lieu de **R**. Il s'étend aussi à certains ordres partiels sur $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ mais pas à tous.

On a pu ainsi ramener l'étude de l'ordre sur les fonctions S_σ à celle d'un ordre indépendant de la fonction f, ne faisant intervenir que les permutations σ des variables y_i de S_σ. Le graphe de cet ordre est le permutoèdre d'ordre n. L'étude de cet ordre est plus aisée que celle de l'ordre initial. Voir C. Berge [1], p. 114 et les travaux de G. Th. Guilbaud et P. Rosenstiehl [3] et [9].

BIBLIOGRAPHIE

[1] Berge, C., *Principes de combinatoire*, Paris, Dunod, 1968.

[2] Comtet, A., *Analyse combinatoire*, Paris, Presses Universitaires de France, 1970, t. 2.

[3] Guilbaud, G. Th., Rosenstiehl, P , "Analyse algébrique d'un scrutin", *Math. Sci. hum.*, 4, 1960.

[4] Hardy, G. H., Littlewood, J. E. et Polya, G., *Inequalities*, Cambridge, Cambridge University Press, 1952.

[5] Ladegaillerie, Y., *Ordres liés au groupe symétrique : Note aux C.R. Acad. Sci.*, 1970, Série A, t. 271, pp. 137-140, 20 juillet 70.

[6] Ladegaillerie, Y., *Ordres et groupe symétrique*, Thèse 3e Cycle, Paris VII, 1971.

[7] Petolla, G., *Coûts, contraintes, ordres et questionnaires*, Thèse 3e Cycle, Lyon, 1970.

[8] Picard, C. F., *Graphes et questionnaires*, Paris, Gauthier-Villars, 1972, t. 2.

[9] Rosenstiehl, P., *Communication au Colloque NATO sur la Théorie des Jeux*, Toulon, 1966.