

P. PARLEBAS

Centralité et compacité d'un graphe

Mathématiques et sciences humaines, tome 39 (1972), p. 5-26

http://www.numdam.org/item?id=MSH_1972__39__5_0

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CENTRALITÉ ET COMPACTITÉ D'UN GRAPHE

par

P. PARLEBAS ¹

RÉSUMÉ

Un grand nombre de situations de psychologie sociale peuvent être interprétées en termes de graphe, notamment celles qui traitent des phénomènes de relation et de communication. Les travaux de A. Bavelas et H. Leavitt ont révélé l'influence des différents types de réseaux sur le comportement des groupes ; ils ont mis en pleine lumière l'intérêt de la notion de centralité. Les recherches de C. Flament ont enrichi et fortement nuancé ces résultats en faisant apparaître le poids de la nature de la tâche qui interfère de façon déterminante avec le réseau lui-même.

On a tenté de montrer ici que l'indice de centralité adopté par Bavelas n'était pas entièrement satisfaisant tant au point de vue psycho-social que mathématique. Un autre indice a été proposé : la centralité d'un réseau évolue alors entre deux bornes dont la supérieure correspond au graphe-étoile et l'inférieure aux graphes homogènes qui comprennent entre autres le graphe-cycle et le graphe-clique.

De façon complémentaire, a été étudiée la dimension de compacité ; un graphe a été réputé d'autant plus compact que sa somme des relais est proche de zéro. On s'est appuyé sur la relation d'intermédiarité à laquelle a été attachée la notion de relais. La compacité d'un réseau peut osciller entre un maximum illustré par le graphe-clique et un minimum représenté par le graphe-chaîne.

Il semble que la notion de relais et la distinction entre relais simple et relais fort permettent de rendre compte de façon opérationnelle de certains phénomènes de groupe (cohésion, centralisation, circulation de l'information, redondance, saturation). La notion de relais semble pouvoir jouer un rôle d'importance dans l'évaluation et l'interprétation des processus de communication.

De nombreuses situations de psychologie sociale peuvent être représentées sous forme de graphe ². Soit un graphe $G = (X, U)$; l'ensemble X des sommets du graphe peut par exemple, symboliser les sujets d'un groupe et l'ensemble U des arcs une *relation* unissant ces sujets : relation affective (sociogramme), possibilités de transmission d'information (réseau de communication), liaisons nécessaires pour mener à bien une action (modèle de tâche)...

1. UER de Mathématique, Logique Formelle et Informatique, Université René Descartes, Paris.

2. L'auteur remercie vivement B. Monjardet pour ses suggestions et ses conseils au cours de cette étude.

Est-il possible d'apprécier *quantitativement* les propriétés d'un tel réseau ? Peut-on mesurer certaines caractéristiques du graphe à l'aide d'indices ? Peut-on comparer des réseaux ? En bref, est-il possible de déterminer des *mesures de l'organisation interne* du graphe qui susciteront des interprétations intéressantes de la situation psychosociale correspondante ?¹.

A. LA CENTRALITÉ D'UN GRAPHE

C'est Alex Bavelas, puis Harold Leavitt qui, dans la perspective des travaux de Kurt Lewin, ont effectué les premières recherches en ce domaine.

Bavelas a tenté d'établir une liaison entre le comportement des individus d'un groupe de travail et les caractéristiques du réseau de communication imposé à ce groupe, caractéristiques résumées dans un indice dit de « centralité ». Au cours de ses expériences, il utilise notamment quatre réseaux typés de 5 sommets chacun : les réseaux dits « en cercle », « en chaîne », « en Y », « en roue » (ou « en étoile »). En langage de graphe, le premier est un *cycle*, les trois autres sont des *arbres* (graphe connexe sans cycle). Ces réseaux peuvent être ordonnés de telle sorte que leur centralité relative paraisse, intuitivement, de plus en plus accentuée (Fig. 1).

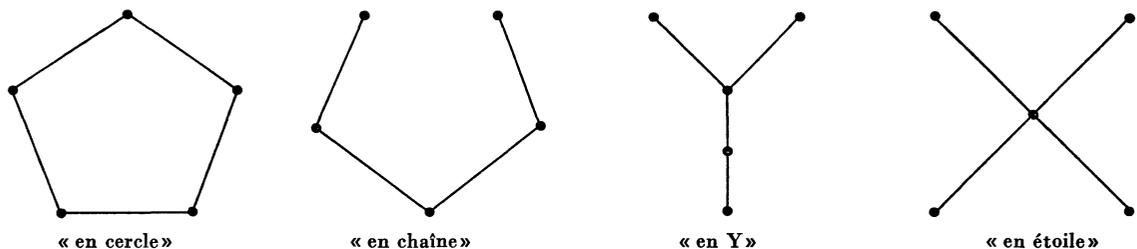


Figure 1

Les quatre réseaux de Bavelas ordonnés selon une centralité croissante

Est-il possible d'associer à ces graphes une mesure de centralité en accord avec les données intuitives ? Est-il possible de généraliser cette mesure à tout graphe ?

Avant de commenter les résultats obtenus par Bavelas, il semble souhaitable de fonder la légitimité de certaines opérations mathématiques que nous utiliserons abondamment, en recourant aux concepts et aux résultats de la théorie des graphes [1].

I. TRAITEMENT DU RÉSEAU CONSIDÉRÉ COMME UN GRAPHE

Tous les graphes considérés ici seront *symétriques*, c'est-à-dire que toute liaison (x, y) se double d'une liaison (y, x) .

$$(x, y) \in G \Rightarrow (y, x) \in G.$$

Toute liaison entre deux sommets est donc constituée de deux arcs inverses : elle est appelée *arête* ; ici, les arêtes ne seront pas valuées.

Une *chaîne* de x à y : $\mu(x, y)$ est une *séquence d'arêtes* d'extrémité initiale x et d'extrémité termi-

1. Harary ([10], [11]) a étudié des questions analogues dans le cas d'un graphe à n sommets, non forcément symétrique, ni même connexe. A la suite de Bavelas, on étudie ici la classe des graphes symétriques (ou non orientés) connexes à n sommets.

nale y . Quand entre deux points quelconques d'un graphe, passe toujours au moins une chaîne, ce graphe est réputé *connexe*. Les graphes que nous utiliserons ici, seront tous connexes.

Les graphes G que nous étudierons, appartiendront tous à l'ensemble \mathcal{G} des graphes connexes et symétriques.

La *longueur d'une chaîne* allant de x à y est égale au nombre de ses arêtes que nous noterons ainsi :

$$\text{longueur de } \mu(x, y) = |\mu(x, y)|$$

Est réputée *piste* de x à y , $p(x, y)$ toute chaîne de longueur minimum joignant x à y .

On appelle *écart* entre deux sommets x et y , $d(x, y)$ la longueur de toute piste joignant x à y :

$$d(x, y) = \min |\mu(x, y)| = |p(x, y)|.$$

L'écart entre deux sommets est donc égal au *nombre d'arêtes de la plus courte chaîne* reliant ces deux points.

La caractéristique fondamentale pour notre étude, est que *cet écart possède les propriétés d'une distance* au sens topologique du terme.

— Propriété de positivité :

$$d(x, y) \geq 0 \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

— Propriété de symétrie :

$$d(x, y) = d(y, x).$$

— Propriété d'inégalité triangulaire :

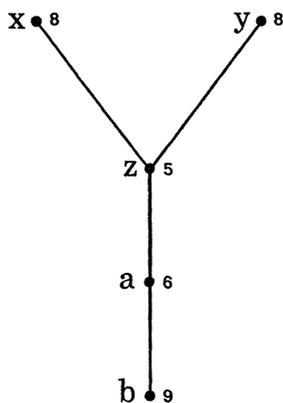
$$d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z).$$

Il s'ensuit que les graphes connexes et symétriques se prêtent aux opérations classiques réalisables sur les distances. Remarquons que cela n'est possible que grâce à la propriété de symétrie qu'on s'est octroyée au départ (cas des sociogrammes de choix *réciproques*, des réseaux de communication à liaisons *symétriques*, des réseaux de circulation à *double sens*, etc.).

Pour tout graphe, il est possible de dresser la *matrice des écarts* (ou matrice des distances) associée à ce graphe.

Si un graphe G a n sommets $(x_1, x_2, \dots, x_i, x_j, \dots, x_n)$, la matrice des écarts de G est une matrice carrée d'ordre n dont les n^2 éléments sont constitués par l'ensemble des écarts $d(x_i, x_j)$.

Établissons par exemple, la matrice des distances du graphe « en Y » (Fig. 2).



	x	y	z	a	b	$\sum d(i,j)$
x	0	2	1	2	3	8
y	2	0	1	2	3	8
z	1	1	0	1	2	5
a	2	2	1	0	1	6
b	3	3	2	1	0	9
						36

Figure 2. *Matrice des écarts*

Soit un sommet quelconque x_i . Appelons *somme des écarts* $S(x_i)$ (ou *somme des distances*) du sommet x_i d'un graphe G d'ordre n , la somme des écarts séparant ce sommet x_i des $n - 1$ autres sommets de ce graphe :

$$S(x_i) = \sum_{j=1}^{j=n} d(x_i, x_j)$$

Ici, on a :

$$S(x) = 8, \quad S(y) = 8, \quad S(z) = 5, \quad S(a) = 6, \quad S(b) = 9.$$

Appelons *somme des écarts* $S(G)$ (ou *somme des distances*) du graphe G d'ordre n , la somme totale des sommes des distances des n sommets de ce graphe :

$$S(G) = \sum_{i=1}^{i=n} S(x_i) \quad \text{ici} \quad S(G) = 36.$$

La somme des distances d'un sommet et la somme des distances d'un graphe représentent les matériaux de base qui seront utilisés pour mesurer les caractéristiques de liaisons d'un graphe. La première correspondra à la « proximité » d'un élément vis-à-vis de tous les autres ; la seconde à la « proximité » globale de tous les éléments d'un ensemble entre eux.

II. L'INDICE DE CENTRALITÉ DE BAVELAS

Pour étudier la centralité d'un graphe, Bavelas s'est appuyé sur la somme des distances de chaque sommet et sur la somme des distances du réseau [2]. Il a défini un indice de centralité $C(x_i)$ d'un sommet quelconque x_i tel que :

$$C(x_i) = \frac{S(G)}{S(x_i)}.$$

Dans le graphe précédent par exemple :

$$C(z) = \frac{36}{5} = 7,20.$$

L'indice de centralité $C(G)$ du graphe G est tel que :

$$C(G) = \sum_{i=1}^{i=n} C(x_i).$$

Dans notre exemple :

$$\begin{aligned} C(G) &= C(x) + C(y) + C(z) + C(a) + C(b) \\ &= 4,50 + 4,50 + 7,20 + 6 + 4 = 26,20. \end{aligned}$$

En revenant aux quatre réseaux de Bavelas, on constate que les indices de centralité respectifs permettent bien d'ordonner ces graphes selon l'ordre de centralité croissante souhaité :

25 (en cercle), puis 26,10 (en chaîne), puis 26,20 (en Y), enfin 26,29 (en étoile).

Présentant une grande originalité, les travaux de Bavelas et Leavitt ont débouché sur des résultats très intéressants au point de vue de la dynamique des groupes de travail. Dans les situations expérimentales qu'ils ont créées, ces auteurs ont en effet mis en évidence que les performances de groupe étaient d'autant plus élevées que la centralité du réseau était plus prononcée. D'autre part, ils ont

également constaté que le degré de satisfaction des sujets était d'autant plus élevé que la centralité du réseau était plus faible (Fig. 3). « Ces mesures de centralité, écrit Leavitt, sont en corrélation avec le comportement que nous avons observé » [3].

Réseaux				
Indicateurs				
Indices de centralité	25	26,10	26,20	26,29
Performances de groupe accomplies				
Degré de satisfaction déclarée				

Figure 3
Schématisation des résultats de Bavelas

Ainsi était nettement montré que la structure d'un réseau de communication (mesurée ici par sa « centralité ») pouvait influencer de façon marquée les comportements d'un groupe de travail.

III. LES RECHERCHES DE CLAUDE FLAMENT

Flament a repris les recherches de Bavelas et Leavitt en se posant la question suivante : peut-on généraliser ces résultats à toutes les situations de groupe ?

Interprétant les résultats de divers psycho-sociologues et menant lui-même de nombreuses expériences, il a montré que les résultats de Bavelas ne sont pas généralisables [5]. L'influence d'un réseau sur le comportement d'un groupe n'est pas pré-déterminée de façon rigide; en effet, elle interfère avec la nature de la tâche du groupe. Flament propose à ses groupes expérimentaux plusieurs types de tâches dont par ailleurs il détermine à titre de référence le modèle formel, *a priori* (graphe |optimum des communications nécessaires). Les groupes expérimentaux disposent au départ d'un réseau riche en possibles et ils peuvent choisir eux-mêmes leur propre organisation interne. Flament constate que les groupes tendent tous au cours de la résolution de leur tâche à assurer un isomorphisme entre le modèle formel de la tâche et la structure des communications adoptées. Ce qui semble donc compter, ce n'est pas le réseau seul, mais le couple *tâche-réseau*, l'adéquation de l'un à l'autre. En tendant vers cet isomorphisme, le groupe tend vers la meilleure performance. La prise de conscience par les sujets de ces rapports tâche-réseau peut elle-même intervenir : la performance s'accroît quand les sujets prennent conscience des rapports entre les possibilités du réseau et les nécessités de la tâche.

Chemin faisant, Flament a critiqué l'indice de centralité de Bavelas qui en fait, mesurerait « le degré de disparité entre les points du graphe » [4]. Il souligne que le réseau « en cercle » (graphe-

cycle) et le réseau « complet » (graphe-clique) ont le même indice de centralité, ce qu'il juge inacceptable (Fig. 4). « Il est clair, écrit-il, que ces deux réseaux ne peuvent être jugés identiques quant à leur centralisation » [5].

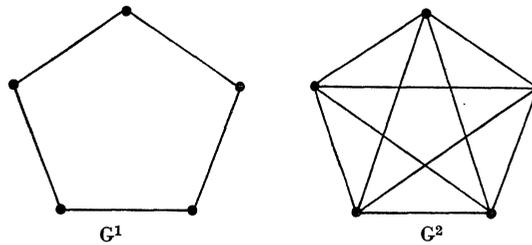


Figure 4
Deux réseaux de même centralité

Ce cas est considéré comme un contre-exemple rédhibitoire par cet auteur. Or, comme nous le verrons, il est possible d'envisager une définition de la centralité d'un graphe telle que les deux réseaux précédents aient une centralité identique et cela sans aucune incohérence.

La clef de la position de Flament apparaît lorsqu'il écrit : « L'indice de centralité ne correspond pas à la propriété des réseaux dont Bavelas s'attendait à ce qu'elle détermine l'activité du groupe. » Flament a manifestement montré que la dépendance de la performance vis-à-vis du réseau n'obéissait pas à l'absolu déterminisme proposé par Bavelas ; celui-ci en effet rattache étroitement la performance au réseau et définit le réseau par la centralité ; Flament démontre que la liaison performance-réseau est erronée, mais cela n'entraîne pas pour autant que la centralité d'un réseau soit une propriété sans intérêt.

Le propos de ce chercheur est peut-être excessif lorsqu'il écrit : « Il ne s'agit pas de remplacer cet indice par un autre, mais de reprendre l'analyse des rapports entre réseau et tâche dans leur ensemble. » En effet, ces deux approches ne semblent pas incompatibles. Ce qui est remis en cause de façon élégante par Flament, c'est l'utilisation étroite d'un indice de centralité dans une théorie prônant une influence despotique des réseaux sur la tâche ; mais ce n'est pas la légitimité d'un indice pertinent de centralité.

En effet, dans de nombreux secteurs de la psychologie sociale, la possession d'une mesure de l'organisation interne d'un réseau semble d'un grand intérêt (sans que cela préjuge d'une quelconque opinion quant à l'influence de cette organisation sur le comportement d'un groupe par exemple).

IV. CRITIQUE DE L'INDICE DE BAVELAS

Flament s'est posé la question : « Les résultats de Bavelas concernant la performance des groupes sont-ils généralisables ? » Pour notre part, nous nous poserons la question suivante : « L'indice de centralité de Bavelas est-il généralisable ? »

Au premier regard, cet indice est séduisant, car il paraît bien s'ajuster à la notion qu'on se fait de la centralité, notion illustrée par exemple, par la série croissante des quatre réseaux expérimentaux déjà observés. C'est certainement l'une des raisons pour lesquelles de nombreux ouvrages de psychosociologie actuels reprennent avec abondance l'indice de Bavelas devenu classique, et parlent de types de réseaux « en cercle », « en chaîne », « en Y », « en étoile ».

L'affirmation de Leavitt selon laquelle « le concept de centralité défini par Bavelas est utile pour décrire les différences à l'intérieur et entre les structures » [3] est peut-être hasardeuse. En effet, il paraît délicat d'évaluer de telles différences : dans le cas précédent où $n = 5$, comment interpréter la différence de 1,29 qui sépare « l'étoile » du « cercle » ou la différence de 0,19 séparant « l'étoile » de la « chaîne » ? En présence de deux réseaux dont le nombre d'éléments diffère, ne serait-ce que d'une unité, les difficultés augmentent. L'indice de centralité du réseau en cercle atteint 25 pour $n = 5$ et 100 pour $n = 10$;

ne s'agit-il pourtant pas de la même structure ? Et la centralité de ce même réseau « en cercle » qui vaut 100 pour $n = 10$ serait-elle supérieure à la centralité de « l'étoile » pour $n = 9$, centralité qui n'atteint alors que 84,27 ?

Ces quelques difficultés pourraient cependant être aisément surmontées : il suffirait de normer l'indice. Le vrai problème, c'est que cet indice ne semble pas adapté à la mesure de l'objet pour lequel il a été conçu. En effet, les types de réseaux très caractéristiques et bien mis en relief d'ailleurs par Bavelas, ne s'ordonnent pas sur l'échelle de centralité selon un ordre invariant lorsque l'effectif du réseau augmente. Lorsqu'il affirme que « ces quatre réseaux présentaient des extrêmes en centralité (comme le cercle par opposition à l'étoile) » [3], Leavitt semble ignorer que l'ordination selon une centralité croissante de ces quatre graphes est brutalement prise en défaut dès que $n \geq 8$. Il se produit un brusque renversement des valeurs de centralité. Ainsi, pour $n = 10$, la chaîne possède un indice de Bavelas supérieur (104,64) à celui de l'étoile (103,88) ! Il y a donc incohérence, non-fidélité, des valeurs de l'indice de centralité vis-à-vis des structures correspondantes.

Le Tableau (Fig. 5) illustre les contradictions résultantes. L'indice de Bavelas semble *démuni de validité ; il n'est pas généralisable*.

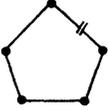
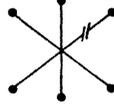
Nombre de sommets du réseau	TYPES DE RESEAUX			Différences de centralité entre l'étoile et la chaîne : $C_{\text{étoile}} - C_{\text{chaîne}}$
	"en cercle" 	"en chaîne" 	"en étoile" 	
3	9	9,33	9,33	0
4	16	16,67	16,80	+ 0,13
5	25	26,10	26,29	+ 0,19
6	36	37,62	37,78	+ 0,16
7	49	51,23	51,27	+ 0,04
8	64	66,94	66,77	- 0,17
9	81	84,74	84,27	- 0,47
10	100	104,64	103,88	- 0,76
11	121	126,63	125,26	- 1,37
12	144	150,72	148,76	- 1,96
13	169	176,90	174,26	- 2,64
20	400	418,80	408,76	- 10,04

Figure 5

Tableau de la valeur des indices de centralité de Bavelas en fonction du nombre de sommets des réseaux

Les deux *bornes de centralité* choisies par Bavelas semblent pourtant pertinentes :

- Le cercle : à centralité minimum.
- L'étoile : à centralité maximum.

C'est l'indice proposé qui paraît inadéquat. Si l'on s'y réfère, les deux bornes précédentes ne délimitent plus un intervalle de centralité contenant tous les réseaux intermédiaires possibles. En effet, la chaîne — entre autres — crève ce pseudo-intervalle, ce qui est incohérent.

Cet indice semble donc doublement inacceptable :

- *Au point de vue psychosocial* : un réseau en chaîne ne peut être considéré comme étant plus centralisé qu'un réseau en étoile. Et le renversement de l'ordre de centralité de ces deux réseaux en fonction de l'effectif ne paraît pas pouvoir être justifié par des phénomènes psycho-sociaux.
- *Au point de vue mathématique* : il convient de définir un intervalle dont les deux bornes invariantes encadrent rigoureusement tout le champ des possibles.

V. PROPOSITION D'UNE MESURE DE LA CENTRALITÉ D'UN GRAPHE

1. *Approche intuitive de la notion de centralité*

La série croissante des quatre réseaux proposés par Bavelas semble très bien correspondre à ce qu'on peut entendre par centralité. Il faut cependant apporter quelques précisions.

Lorsqu'on dit d'une structure hiérarchique qu'elle est centralisée, on entend par là que toutes les questions importantes sont canalisées vers un seul centre par qui passent toutes les décisions ; lorsqu'on dit que le réseau ferroviaire français est centralisé, on comprend que toutes les grandes lignes convergent vers la même ville, Paris, qui est souvent un point de passage obligé entre deux autres grandes cités. C'est cette idée que nous retiendrons ; la notion de centralité correspond au fait qu'un sommet est privilégié vis-à-vis de l'ensemble des autres au point de vue de l'accès à la « communication ».

Pour apprécier cette communicabilité, plusieurs critères quantifiés sont disponibles : on pourrait par exemple, utiliser l'*écartement* de chaque sommet (c'est-à-dire la longueur de la plus longue piste issue de ce sommet), le rayon du graphe (écartement d'un sommet d'écartement minimum) ou encore le diamètre (écartement d'un sommet d'écartement maximum). Ici, nous choisirons la somme des écarts de chaque sommet comme critère de base, car d'une part, il s'agit d'une distance au sens rigoureux du terme et d'autre part, cette somme des écarts semble assez bien adaptée aux situations concrètes correspondant à la dynamique d'un groupe (aspects fonctionnels et/ou affectifs des groupes de travail, groupes de discussion, équipes sportives, modèles de tâches).

Dans ce cas, le minimum de centralité sera obtenu quand aucun sommet ne sera privilégié : tous les sommets seront équivalents au regard de la somme des distances.

Le maximum de centralité correspondra au graphe dont un sommet sera privilégié à l'extrême : un sommet sera au contact direct de tous les autres qui devront obligatoirement passer par lui pour communiquer entre eux.

2. *Indices de centralité. Définitions*

— *L'indice de centralité du sommet* x d'un graphe G connexe et symétrique, est égal au rapport entre la somme des distances du sommet x et la somme des distances du graphe G .

$$C(\mathbf{x}) = \frac{S(\mathbf{x})}{S(G)}$$

Plus cet indice est petit, plus la centralité du sommet est forte.

— Nous appelons *point central* du graphe G tout sommet de G qui possède le plus petit indice de centralité:

$$z \in \{\text{points centraux}\} \Leftrightarrow C(z) = \min_{z, \mathbf{x} \in G} C(\mathbf{x}).$$

Un point central d'un graphe est donc un élément à distance minimum de l'ensemble des autres sommets. On peut l'interpréter comme une *médiane* ainsi que le montre B. Leclerc, dans une note ci-après.

— L'indice de centralité brut d'un graphe G est égal à l'indice de centralité de son point central :

$$C(G) = C(z) = \min_{\mathbf{x} \in G} C(\mathbf{x}) = \frac{\min S(\mathbf{x})}{S(G)}$$

— L'indice de centralité normé $\delta(G)$ d'un graphe G sera obtenu en projetant l'indice brut dans un intervalle compris entre 0 et 1.

Cet indice que nous établirons dans les pages suivantes a pour valeur:

$$\delta(G) = \frac{2(n-1)(1-n \cdot C(G))}{n-2} \quad \text{tel que} \quad 0 \geq \delta(G) \geq 1.$$

La centralité d'un réseau est donc ici définie au moyen du *rapport entre la plus petite somme des distances d'un sommet et la somme totale des distances des sommets du graphe*. C'est le sommet le plus centralisé (point central) qui devient l'étalon du graphe. Avec de telles définitions, la centralité normée du graphe mesurée par $\delta(G)$ augmente quand l'indice $C(G)$ diminue, ce qui répond bien à la conception intuitive de centralité.

3. Graphes de centralité minimum

Un graphe G est de centralité minimum (c'est-à-dire que $\delta(G) = 0$) si et seulement si $C(G)$ est maximum.

On a:

$$\text{pour } \mathbf{x} \in G \text{ et } G \in \mathcal{G}, C(G) = \frac{\min S(\mathbf{x})}{S(G)} \quad \text{et} \quad S(G) = \sum S(\mathbf{x})$$

donc:

$$\text{pour } |G| = n; \quad \frac{\min S(\mathbf{x})}{S(G)} \leq \frac{\min S(\mathbf{x})}{n \cdot \min S(\mathbf{x})}$$

et:

$$C(G) \leq \frac{1}{n}$$

donc:

$$\max C(G) \leq \frac{1}{n}$$

Cette valeur $\frac{1}{n}$ représente donc la borne supérieure de $C(G)$ (et correspond à la borne inférieure de l'indice normé $S(G)$).

Cette borne supérieure de $C(G)$ correspond-elle à un graphe réel ?

Appelons *graphe homogène* tout graphe connexe et symétrique d'ordre n dont tous les sommets possèdent la même somme des écarts $S(x)$ tel que $\forall x \in G, S(x) = \frac{S(G)}{n}$.

Il est clair que pour un tel graphe, $C(G) = \frac{1}{n}$. Un quelconque de ces graphes homogènes est donc un graphe de centralité $\delta(G)$ minimum. Or la classe des graphes homogènes existe; mais elle ne correspond pas à un type unique. Lui sont associées plusieurs sous-classes dont deux sont très caractéristiques: le *graphe-cycle* et le *graphe-clique*. (Les valeurs concernant les distances et la centralité de ces deux graphes sont portées sur le tableau 12.) Selon l'ordre n du graphe et selon qu'il est pair ou non, il s'y ajoute un certain nombre de types de graphes non isomorphes aux précédents (exemple: le graphe homogène G_3 de la figure 6).

Il convient de différencier les graphes homogènes tels que nous les avons définis, des graphes réguliers. Un graphe est dit *régulier* de degré h , quand tous ses sommets ont le même degré h [1], c'est-à-dire quand tous les sommets sont incidents au même nombre d'arêtes h (ou ce qui est équivalent dans notre cas, quand ils ont le même nombre h de sommets adjacents).

La relation étant symétrique, chacune des m arêtes du graphe est prise en compte deux fois lors de l'appréciation du degré h de tous les n sommets.

On a donc:

$$m = \frac{h \cdot n}{2} \quad \text{soit} \quad h = \frac{2m}{n}.$$

Or malgré une telle relation, des graphes de même ordre n , tous réguliers et de même degré h , possédant donc le même nombre d'arêtes m , ne sont pas nécessairement homogènes. La figure 6 exhibe un contre-exemple composé de 3 graphes réguliers d'ordre 8 et de degré 3, non isomorphes et dont deux ne sont pas homogènes.

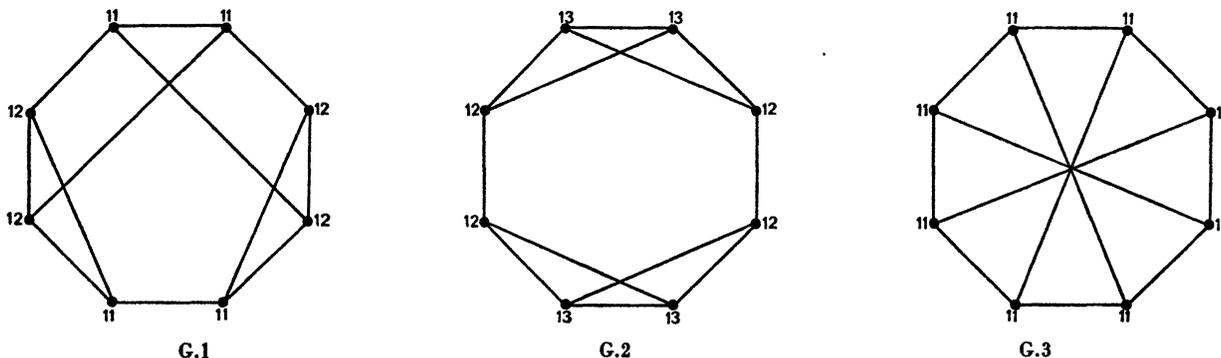


Figure 6

*Graphes réguliers de degré 3: seul G_3 est homogène
(A chaque sommet est affectée sa somme des distances)*

Le graphe-cycle n'est donc pas le graphe unique fixant la limite inférieure de centralité: celle-ci comprend l'ensemble des graphes homogènes dont font partie entre autres, le graphe-cycle et le graphe-clique.

4. Graphe de centralité maximum

— Un graphe correspond-il à l'indice de centralité $C(G)$ minimum ?

Un réseau dont un sommet serait emprunté par toutes les pistes quelles qu'elles soient serait tel que toutes les communications entre deux sommets passeraient nécessairement par ce sommet. Un tel réseau illustrerait bien le phénomène de centralité. Or ce réseau existe: c'est le graphe-étoile. Nous avons conjecturé que ce graphe avait un indice $C(G)$ minimum; la démonstration de cette propriété est réalisée ci-après par B. Leclerc.

— Quelle est la valeur de $C(G)$ pour ce graphe ?

Le point central de cet arbre (Fig. 7) étant adjacent à tous les $(n - 1)$ autres sommets, on a: $S(z) = n - 1$

Pour tout autre sommet périphérique y , appartenant au graphe-étoile (Et):

$$S(y) = (n - 2) \cdot 2 + 1 = 2n - 3$$

$$S(Et) = (n - 1) + (n - 1)(2n - 3) = 2(n - 1)^2$$

et

$$C(Et) = C(z) = \frac{n - 1}{2(n - 1)^2} \quad C(Et) = \frac{1}{2(n - 1)}$$

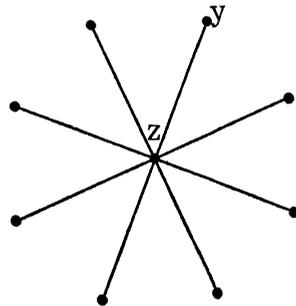


Figure 7

Arbre centralisé (graphe-étoile)

5. Intervalle de centralité

Pour les graphes d'ordre n , l'intervalle de $C(G)$ est donc compris entre 2 bornes:

— La borne de centralité maximum (graphe homogène) de valeur $\frac{1}{n}$.

— La borne de centralité minimum (arbre centralisé) de valeur $\frac{1}{2(n - 1)}$.

L'intervalle de variation a pour valeur:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2(n - 1)} = \frac{n - 2}{2n(n - 1)}$$

6. Indice de centralité normé

On peut définir un indice de centralité normé $\delta(G)$ d'un graphe quelconque d'ordre n tel que :

$$\delta(G) = \frac{\frac{1}{n} - C(G)}{\frac{n-2}{2n(n-1)}} \quad \text{avec} \quad 0 \geq \delta(G) \geq 1$$

on obtient :

$$\delta(G) = \frac{2(n-1)(1 - n \cdot C(G))}{n-2}$$

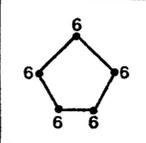
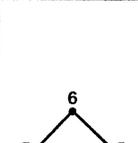
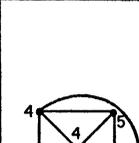
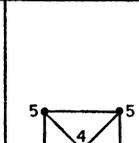
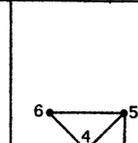
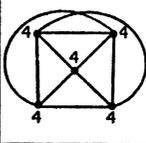
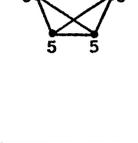
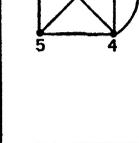
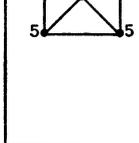
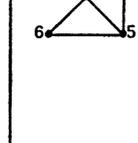
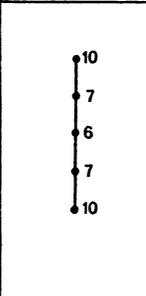
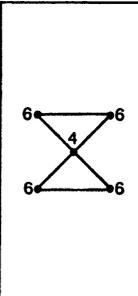
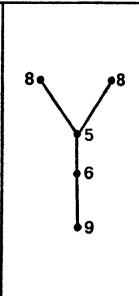
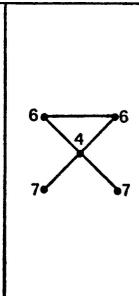
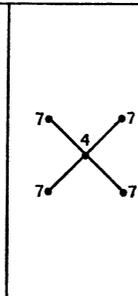
				
				
0	0,10	0,24	0,44	0,62
				
0,67	0,76	0,81	0,89	I

Figure 8

Indices de centralité normés de quelques graphes d'ordre 5

Sur le Tableau (Fig. 8) sont ordonnés selon une centralité croissante, quelques graphes d'ordre 5 parmi lesquels on retrouve les 4 graphes-types de Bavelas dont l'ordre est conservé.

Ces quelques graphes illustrent bien l'aspect relatif de la notion de centralité. La même structure de liaison « en étoile » concernant le point central par exemple, est présente sur de nombreux graphes. Il est clair que la centralité ne prend pas en compte la valeur *absolue* d'une somme des distances privilégiée mais la valeur *relative* de celle-ci par rapport à toutes les autres.

On se rappelle que la centralité du graphe-chaîne évaluée par l'indice de Bavelas débordait celle du graphe-étoile quand le nombre de sommets du réseau dépassait 7. A titre de vérification, il est aisé

de constater que cet inconvénient a maintenant disparu. Effectuons la différence entre l'indice brut du graphe-chaîne et celui du graphe-étoile (cf. le tableau de la page 25).

Deux cas sont possibles, selon que n est pair ou impair.

— Pour $n = 2k + 1$:

$$\frac{3}{4n} - \frac{1}{2(n-1)} = \frac{n-3}{4n(n-1)} > 0 \quad \text{pour } n > 3.$$

— Pour $n = 2k$:

$$\frac{3n}{4(n^2-1)} - \frac{1}{2(n-1)} = \frac{n-2}{4(n^2-1)} > 0 \quad \text{pour } n > 2.$$

Pour $n > 3$, la centralité ($\delta(G)$) du graphe-étoile est donc bien toujours supérieure à celle du graphe-chaîne.

Il est clair que cet indice normé est un résumé qui ne tient compte que d'une partie de l'information donnée par le graphe. En aucun cas il ne peut prétendre épuiser le contenu du graphe; il ne fait état que de la dimension de centralité pour l'évaluation de laquelle il a été construit.

Assimiler par exemple, le graphe-clique au graphe-cycle comme nous l'avons fait, ne serait pas acceptable si nous ne limitons pas cette équivalence à l'aspect précis de la centralité. Est-il possible de tenir compte de la différence de ces deux graphes par exemple, selon une autre dimension qui essaierait de mesurer l'accès à la communication pour l'ensemble de tous les sommets d'un graphe? Nous allons tenter l'approche d'une telle dimension en définissant la compacité d'un graphe.

B. COMPACITÉ D'UN GRAPHE

La compacité d'un graphe (symétrique et connexe) peut être définie par la somme des distances de chaque sommet à tous les autres, ou encore par la somme des relais qui séparent chaque sommet de tous les autres (ce qui revient au même à un coefficient près). Nous centrerons cette étude sur la notion de *relais*, car celle-ci semble pouvoir éclairer de nombreux problèmes de réseaux. Nous essaierons de déterminer les bornes inférieure et supérieure de la compacité définie en termes de relais et enfin nous proposerons un indice normalisé de compacité évoluant entre zéro et l'unité.

I. DÉFINITIONS

Dans un graphe G , deux sommets reliés directement par une arête sont des sommets *adjacents*, à distance 1. Deux sommets à distance égale ou supérieure à 2, donc non adjacents, sont reliés par une piste qui emprunte un ou plusieurs sommets intermédiaires appelés *relais*.

Dans un réseau de communication, la facilité d'accès à l'information pour un sujet dépend du nombre de relais qu'il doit utiliser pour entrer en communication avec tous les membres du groupe. En ce qui concerne le groupe en tant que réseau, on peut caractériser ses possibilités d'échanges, sa *compacité*, par le nombre total de relais nécessaires pour que chacun puisse entrer en contact avec tous.

Appelons *nombre de relais* $r(x, y)$ d'une piste $p(x, y)$ le nombre de sommets empruntés par cette piste, les deux sommets terminaux x et y étant exclus.

Si cette piste passe par n sommets on sait que:

$$|p(x, y)| = d(x, y) = n - 1$$

et

$$r(x, y) = n - 2 = d(x, y) - 1.$$

Appelons *somme des relais* $r(x)$ du sommet x d'un graphe G d'ordre n la somme totale des relais appartenant à $(n - 1)$ pistes qui relient le sommet x à tous les autres sommets du graphe.

Il vient:

$$r(x) = \sum_{y \in G} d(x, y) - (n - 1),$$

$$r(x) = S(x) - (n - 1).$$

Appelons *somme des relais* $r(G)$ du graphe G d'ordre n , le total de toutes les sommes des relais des n sommets de ce graphe:

$$r(G) = \sum_{x \in G} r(x),$$

$$r(G) = S(G) - n(n - 1).$$

Pour tout graphe, ces trois types de caractéristiques peuvent être consignés dans une *matrice des relais* (Fig. 9).

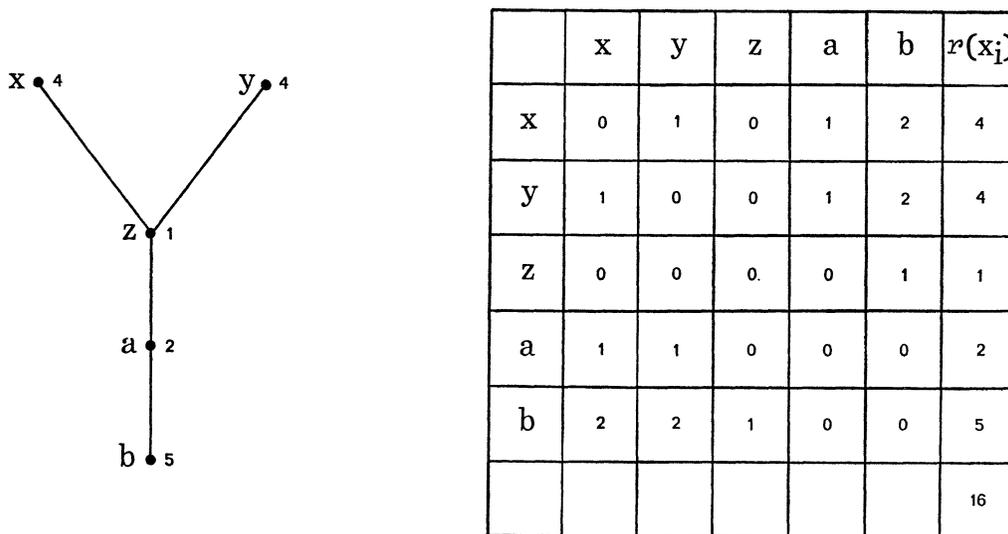


Figure 9

Matrice des relais

(A chaque sommet du réseau « en Y » est associée sa somme des relais)

Reprenons l'exemple du graphe « en Y ». Pour chaque cellule, l'inspection du graphe permet de déterminer le nombre des relais de la piste correspondante. Mais nous savons que le nombre des relais d'une piste est égal à la longueur de cette piste diminuée d'une unité. Il est donc facile de passer de la matrice des distances à la matrice des relais.

Les cellules de la diagonale resteront inchangées. On retranchera une unité aux $\frac{n(n - 1)}{2}$ cellules restantes (toutes strictement positives puisque le graphe est connexe (Fig. 2)).

Nous quantifierons la compacité d'un graphe à partir de la somme des relais de ce graphe. (Il serait équivalent d'utiliser la somme des écarts de ce graphe.)

II. BORNES DE COMPACITÉ

1. Borne supérieure

Par définition, la compacité d'un graphe est maximum quand la somme des relais $r(G)$ du graphe est minimum.

Soit \mathcal{G} l'ensemble des graphes connexes et symétriques d'ordre n et soit G , élément de \mathcal{G} .

La plus petite valeur possible du nombre des relais d'une piste est égale à zéro : ce cas est réalisé quand les deux sommets terminaux sont adjacents :

$$\min r(x, y) = 0 \Leftrightarrow d(x, y) = 1.$$

Il vient :

$$\forall x, \forall y \in G: d(x, y) = 1 \Leftrightarrow r(x, y) = 0 \Leftrightarrow r(x) = 0 \Leftrightarrow r(G) = 0.$$

La borne inférieure de $r(G)$ est donc nulle et correspond à un graphe unique : le graphe-clique (Cl).

$$r(\text{Cl}) = \min r(G) = 0.$$

Dans le graphe-clique, graphe complet, chaque sommet est adjacent à tous les autres : c'est le graphe le plus compact possible. La somme des distances de chaque sommet est de $(n - 1)$ et la somme des distances du graphe $S(\text{Cl})$ vaut donc $(n - 1)n$.

Le graphe-clique, graphe sans relais, représente donc la borne supérieure de compacité.

2. Borne inférieure

Par définition, la compacité d'un graphe est minimum quand la somme des relais du graphe est maximum.

Nous allons tenter d'aborder le concept de relais à partir de la notion d'intermédiaire telle que l'ont rappelée et précisée Marc Barbut (« Interédiarité ») et G. Th. Guilbaud (« Esquisses mésologiques ») [7]. Telle que l'ont présentée ces auteurs, la relation d'interédiarité semble en effet pouvoir éclairer notre problème des relais.

Le sommet x est appelé *relais* par rapport aux sommets y et z si, et seulement si une piste reliant y et z passe par x . Nous dirons encore que x est entre y et z ou que x appartient à l'intervalle ouvert] y, z [; cette propriété pourra s'écrire :

$$(y, x, z) \in I.$$

On a toujours :

$$d(y, x) + d(x, z) = d(y, z).$$

Nous sommes exclusivement dans le cas de l'égalité triangulaire. On retrouve ici la relation d'interédiarité telle qu'elle est définie de façon classique dans les espaces munis d'une distance [8].

La relation-support étant symétrique, la relation d'interédiarité I l'est également : si x est relais par rapport à y et z , x est aussi relais par rapport à z et y .

$$(y, x, z) \in I \Rightarrow (z, x, y) \in I,$$

d'autre part, on a :

$$(y, x, z) \in I \Rightarrow (x, y, z) \notin I. \quad [8]$$

Pour trois sommets quelconques d'un graphe vérifiant la relation I , il existe donc deux des six arrangements de ces trois éléments qui satisfont cette relation. Dans un tel cas, à un sous-ensemble de trois sommets, correspond un décompte de *deux* relais.

La notion de relais n'intervient qu'à partir de la présence d'au moins trois éléments. Une telle relation appelée « médiation » par G. Th. Guilbaud [7] est une relation ternaire qui impose d'envisager les sommets d'un graphe selon une composition par triplets (nous entendons par triplet, un sous-ensemble quelconque de trois éléments).

Quelle est la valeur théorique maximum que peut atteindre la somme des relais d'un graphe ?

Dans un graphe G , si tout sous-ensemble de trois sommets admet un relais effectif, alors le nombre maximum théorique de relais sera obtenu. Nous avons vu qu'en raison de la symétrie de la relation, il convient de compter deux relais à chaque triplet.

Proposition

La somme des relais maximum que peut posséder un graphe G connexe et symétrique est égale au double du nombre total de triplets possibles dus aux combinaisons des n sommets de ce graphe.

Il vient :

$$\max r(G) = 2 \binom{n}{3}, \quad G \in \mathcal{G}, \quad |G| = n.$$

Soit :

$$\max r(G) = \frac{n(n-1)(n-2)}{3}.$$

Si le graphe correspondant existe, quelle serait la valeur de la somme des écarts $S(G)$?

On a :

$$r(G) = S(G) - n(n-1)$$

$$\max S(G) = \max r(G) + n(n-1) = \frac{n(n-1)(n-2)}{3} + n(n-1)$$

$$\max S(G) = \frac{n(n^2-1)}{3}.$$

La borne inférieure théorique de compacité étant acquise, une question se pose : à cette borne, peut-on associer un graphe réel ?

B. Leclerc donne dans ce numéro, une démonstration directe de ce résultat ; ici cependant, nous ferons un détour en utilisant la relation d'intermédialité afin de garder l'unité de l'étude qui tente d'explorer la notion de relais.

À quelles conditions devrait répondre le graphe correspondant à la borne inférieure ? Pour aller plus avant, il convient de préciser quelques notions.

Dans un graphe G , est réputé *intermédialisable* tout triplet dont les trois éléments sont empruntés par une même piste. Dans ce cas, un des sommets est *entre* les deux autres. Il y correspond la relation d'intermédialité *simple* I_S et la notion de relais simple ; le triplet sera dit *simplement relayé* :

$$(y, x, z) \in I_S \Leftrightarrow \exists [p(y, z)] \text{ et } x \in \{ \text{relais simples de } p(y, z) \}.$$

Dans un graphe G est réputé *intermédiarisé* tout triplet (intermédiarisable) dont l'un des éléments est emprunté par la piste *unique* qui relie les deux autres. Dans ce cas, le relais du triplet est effectivement pris en compte dans le « nombre des relais » correspondant à la distance séparant les deux sommets terminaux du triplet. Un triplet intermédiarisable peut ne pas être intermédiarisé: c'est le cas d'une triade dont les deux sommets d'extrémité seraient reliés par plus d'une piste; par définition même de la somme des relais, le relais d'une seule des pistes reliant ces deux sommets serait alors pris en compte.

Un triplet n'est donc intermédiarisé que s'il admet une piste unique reliant ses deux sommets d'extrémité. Il y correspond la relation d'intermédiarité *forte* I_F et la notion de relais fort; le triplet sera dit *fortement relayé*:

$$(y, x, z) \in I_F \Leftrightarrow \exists [p(y, z)] \text{ unique et } x \in \{ \text{relais fort de } p(y, z) \}.$$

La relation d'intermédiarité permet de distinguer trois situations différentes:

— *Un triplet T_0 est non intermédiarisable*: ce triplet non relayé sera appelé *triangle* selon la terminologie de Guilbaud [7]:

$$\forall x, \forall y, \forall z \in T_0: (x, y, z) \notin I_S.$$

— *Un triplet T_2 est intermédiarisé*: ce triplet fortement relayé sera désigné par le terme de *trio*, terme proposé par Guilbaud, mais que nous employons ici dans un sens plus fort:

$$(x, y, z) \in I_F \Rightarrow y: \text{relais fort de } T_2.$$

— *Un triplet T_1 est intermédiarisable*: ce triplet simplement relayé sera appelé une *triade*:

$$(x, y, z) \in I_S \Rightarrow y: \text{relais simple de } T_1.$$

Ces trois types de triplets qui recouvrent le champ des possibles en le différenciant, semblent permettre une étude opérationnelle des notions d'intermédiarité et de relais.

La propriété de forte (f) intermédiarité pour tout triplet d'un graphe est condition nécessaire et suffisante de la compacité minimum de ce graphe; elle implique la propriété de simple (s) intermédiarité qui n'est que condition nécessaire. Le graphe qui répondra à la borne inférieure de compacité sera un graphe sans triangle et dont toutes les triades seront des trios: chaque triplet possèdera un relais fort.

Il est aisé de caractériser un tel graphe:

a) *Ce graphe-borne est un graphe sans cycle*: en effet, tout graphe possédant un cycle pair ou impair contient au moins un triplet qui n'est pas un trio. Le résultat reste valable pour un cycle d'ordre 3 (qui est un triangle).

Le graphe-borne est donc un graphe connexe sans cycle: *c'est un arbre*.

Remarquons que dans un cycle pair minimal où $n = 2k$, un triplet dont les trois éléments déterminent une piste de longueur k forme une triade. C'est par exemple, le cas de tous les triplets d'un graphe-cycle d'ordre 4 (une « gamme » dans la terminologie de Guilbaud).

b) *Ce graphe-borne est un arbre qui ne possède que deux sommets pendants* (trois de ceux-ci formeraient en effet un triangle).

Un tel graphe existe et est unique: c'est le *graphe-chaîne* (Ch)¹. Celui-ci correspond bien aux conditions qui ont été dégagées: il est sans triangle et chacune de ses triades est un trio. Chaque triplet étant fortement relayé, c'est un graphe de forte intermédiarité *totale*.

Vérification

La valeur de la somme des relais du graphe-chaîne calculée à partir de la somme des distances coïncide-t-elle avec la borne théorique précédemment mise en évidence ?

En s'appuyant sur la matrice des distances dont les deux demi-matrices sont identiques, on peut écrire:

$$S(\text{Ch}) = 2 [1(n-1) + 2(n-2) + 3(n-3) + \dots + (n-1)[n-(n-1)]]$$

$$S(\text{Ch}) = 2 \left[n \sum_{i=1}^{n-1} i - \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \right]$$

$$S(\text{Ch}) = \frac{n(n^2-1)}{3}.$$

D'autre part:

$$r(\text{Ch}) = \frac{n(n^2-1)}{3} - n(n-1) = \frac{n(n-1)(n-2)}{3}.$$

La somme des relais ainsi obtenue est bien égale à la somme des relais théorique maximum: le graphe-chaîne représente donc bien la borne inférieure de compacité.

III. INTERVALLE ET INDICE DE COMPACITÉ

La relation d'intermédiarité permet de caractériser les bornes de compacité qui apparaissent comme deux cas triviaux de cette relation:

- *La borne supérieure*: la relation de s-intermédiarité est vide, il y correspond un graphe dont tous les triplets sont des triangles. C'est le cas du graphe-clique dont tout triplet, qui est un cycle d'ordre 3, est non relayé.
- *La borne inférieure*: la relation de f-intermédiarité est totale; tous les triplets sont des trios. C'est le cas du graphe-chaîne.

Tous les autres graphes présentent au moins un triplet qui n'est pas un triangle et/ou au moins un triplet qui n'est pas un trio. Certains de ceux-ci peuvent d'ailleurs être des graphes de s-intermédiarité totale (*gamme*) (Fig. 10).

Les deux graphes-bornes représentent respectivement les limites inférieure et supérieure de la somme des relais. Ils encadrent un intervalle de compacité variant de zéro à $\frac{n(n-1)(n-2)}{3}$ qui renferme tout l'éventail des possibles.

1. Ce résultat est équivalent à un résultat classique (Choquet-Sheppard): un ensemble muni d'une relation d'intermédiaire I symétrique, totale et vérifiant $(x, y, z) \in I, (x, z, t) \in I$ impliquent $(y, z, t) \in I$ est un cycle d'ordre quatre ou peut être totalement ordonné (B.M.).

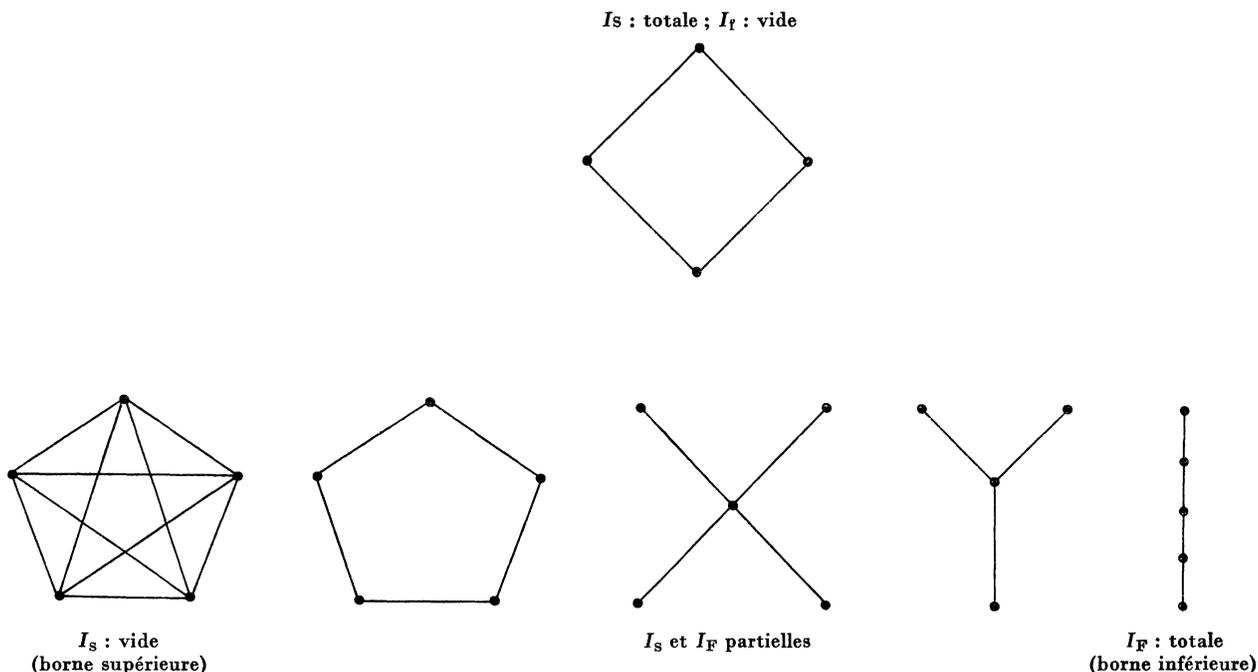


Figure 10
Types de graphes selon la relation d'intermédiation

En associant à chaque réseau la somme des relais qui lui correspond, on peut projeter tous les graphes sur une dimension de compacité bornée selon l'intervalle $[0,1]$.

L'indice brut de compacité d'un graphe donné G sera calculé en rapportant la somme des relais $r(G)$ au minimum possible de cette somme.

Indice brut de compacité :

$$\frac{r(G)}{\max r(G)} = \frac{r(G)}{r(\text{Ch})} \quad \text{Ch, } G \in \mathcal{G}.$$

— *Borne supérieure* : compacité minimum; c'est le graphe-chaîne:

$$\frac{r(\text{Ch})}{r(\text{Ch})} = 1 \quad \text{Ch} \in \mathcal{G}.$$

— *Borne inférieure* : compacité maximum; c'est le graphe-clique:

$$\frac{r(\text{Cl})}{r(\text{Ch})} = 0 \quad \text{Cl} \in \mathcal{G}.$$

Pour obtenir un indice normalisé correspondant à une échelle de compacité croissante valuée de 0 à 1, il suffit de retrancher ce rapport de la valeur-unité.

Soit $\gamma(G)$ cet indice de compacité:

$$\gamma(G) = 1 - \frac{r(G)}{r(\text{Ch})}.$$

Il vient :

$$\frac{0 \text{ Dimension de compacité}}{\text{(Ch)}} \quad \frac{1}{\text{(Cl)}}$$

$$0 \leq \gamma(G) \leq 1.$$

Cet indice peut être facilement calculé. En effet, le numérateur $r(G)$ est égal à $S(G) - n(n-1)$ et le dénominateur est aisément obtenu pour toute valeur de n (Fig. 11).

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	20
$r_{\text{ch}} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3}$	2	8	20	40	70	112	168	240	330	440	572	728	910	2 280

Figure 11

Valeur de la somme des relais du graphe-chaîne en fonction de n

Si nous revenons aux formules complètes, il vient :

$$\gamma(G) = 1 - \frac{S(G) - n(n-1)}{\frac{n(n-1)(n-2)}{3}}$$

Et le développement de ce calcul redonne la formule suivante que nous avons proposée par ailleurs, en utilisant directement la somme des distances sans recourir à la notion de relais (« Effet Condorcet et dynamique sociométrique »):

$$\gamma(G) = \frac{n(n^2 - 1) - 3S(G)}{n(n-1)(n-2)}$$

Il est tout à fait cohérent que nous aboutissions à deux formules équivalentes, puisque dans les deux cas nous sommes parti de la somme des distances et puisque nous avons adopté les mêmes bornes d'intervalle.

Les différents indices et caractéristiques des types de graphes que nous avons étudiés ici ont été reportés et détaillés dans le tableau 12.

C. CONCLUSION

Il serait sans doute illusoire de vouloir épuiser toutes les caractéristiques d'un réseau en recourant à un seul indice, quel qu'il soit. C'est vraisemblablement une batterie d'indices judicieusement choisis qui fournira le résumé le plus pertinent et par là le plus opérationnel d'un graphe.

Le choix de ces indices se fera en fonction de l'objectif poursuivi; il semble souhaitable d'utiliser des approches complémentaires. Ainsi, l'étude de la *vulnérabilité* (ou connectivité) d'un graphe peut

compléter avec profit l'étude de la compacité. Soit un graphe-étoile avec $n = 10$ par exemple. L'indice de compacité de ce graphe est égal à $\frac{n-3}{n}$, c'est-à-dire à 0,70 ce qui est relativement important. Or le point central de ce graphe est un *sommet d'articulation* de puissance $(n-1)$: si l'on supprime celui-ci, le graphe des 9 sommets restants est totalement disconnecté ! Dans ce cas extrême, la grande vulnérabilité de ce graphe montre combien est fragile sa forte compacité; il va sans dire que cette dernière information est d'une importance majeure pour le psycho-sociologue (réseau de communication, réseau socio-affectif). Ces constatations incitent à replacer ces indices dans le cadre plus large de la *cohésivité* qui prend plus particulièrement en compte catégorie de connexité, vulnérabilité et compacité.

Le concept de relais permet peut-être de mieux cerner la notion de compacité. L'interprétation de l'indice d'un réseau en est facilitée. Dans un groupe par exemple, cet indice de compacité traduit la « proximité » fonctionnelle ou affective des sujets les uns vis-à-vis des autres, l'importance relative des obstacles, des intermédiaires, bref des relais à franchir pour que chaque élément communique avec tous les autres. Dans un réseau de communication cet indice traduira *l'accessibilité à l'échange*, à l'information; dans un sociogramme, ce sera une approche de la *cohésion socio-affective* du groupe concerné.

Tableau 12

C A R A C T E R I S T I Q U E S D E Q U E L Q U E S G R A P H E S D E R E F E R E N C E

CARACTERISTIQUES DU GRAPHE	T Y P E S D E G R A P H E S					
	graphe-cycle		graphe-clique	graphe-chaîne		graphe-étoile
Nombre de sommets du graphe	$n=2k+1$	$n=2k$	n	$n=2k+1$	$n=2k$	n
Nombre de points centraux	n	n	n	1	2	1
Somme des distances du point central	$\frac{n^2-1}{4}$	$\frac{n^2}{4}$	$n-1$	$\frac{n^2-1}{4}$	$\frac{n^2}{4}$	$n-1$
Somme des distances du graphe	$\frac{n(n^2-1)}{4}$	$\frac{n^3}{4}$	$n(n-1)$	$\frac{n(n^2-1)}{3}$	$\frac{n(n^2-1)}{3}$	$2(n-1)^2$
Centralité du point central	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{3}{4n}$	$\frac{3n}{4(n^2-1)}$	$\frac{1}{2(n-1)}$
Centralité du graphe	0	0	0	$\frac{n-1}{2(n-2)}$	$\frac{n+2}{2(n+1)}$	1
Somme des relais du graphe	$\frac{n(n-1)(n-3)}{4}$	$\frac{n(n^2-4)(n-1)}{4}$	0	$\frac{n(n-1)(n-2)}{3}$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{3}$	$(n-1)(n-2)$
Compacité du graphe	$\frac{n+1}{4(n-2)}$	$\frac{n+2}{4(n-1)}$	1	0	0	$\frac{n-3}{n}$

Une nouvelle approche de la centralité peut être réalisée à partir de la notion de relais. On peut ainsi définir le graphe de centralité maximum (graphe-étoile) comme *l'arbre dont l'un des sommets est relais de tous les triplets intermédiarisables de ce graphe*. Un arbre ne renfermant aucun cycle, tout relais simple d'un triplet est ipso facto relais fort de ce triplet.

De même, le *point central* d'un arbre, c'est celui qui de tous les sommets est relais du plus grand nombre de triplets. C'est « le plus » intermédiaire de tous les éléments, ce qui est tout à fait cohérent avec sa propriété de médiane.

Revenons à la propriété de vulnérabilité: un sommet d'articulation x est un élément dont la suppression disconnecte le graphe en plusieurs (au moins deux) sous-ensembles connexes disjoints ou « isolats » (par rapport à x). Ce point d'articulation x est *un relais fort de tout triplet dont les deux autres sommets appartiennent à deux isolats (de x) différents*. Cette définition peut être étendue aux sous-ensembles d'articulation.

On pourra formuler en termes de relais, des problèmes concrets posés par les réseaux. On devine que les relais « simples » pourront dans certains cas, être interprétés comme des éléments de double emploi: relais redondants, de suppléance, de désaturation, voire des relais inutiles. Les relais « forts » qui intermédiarisent un grand nombre de triplets seront souvent des points-clefs: pivots affectifs d'un sociogramme, sommets-carrefours d'un réseau de communication. Des phénomènes concernant la circulation de l'information, l'utilisation de chaînes préférentielles, la saturation des sommets-charnières pourront sans doute être associés à la distribution des relais forts. Paradoxalement du fait même de la désorganisation entraînée par leur éventuelle suppression, ces relais forts sont souvent les points faibles, les points de fragilité du réseau.

On s'aperçoit ainsi que la notion de relais joue un rôle fondamental dans l'interprétation des réseaux; elle est sous-jacente aux propriétés majeures de connexité et de connectivité des graphes. Par là même, elle est au cœur de nombreux problèmes des sciences humaines centrés sur les phénomènes de relation et de communication.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BERGE, C., *Graphes et hypergraphes*, Paris, Dunod, 1970, 502 p.
- [2] BAVELAS, A., "Réseaux de communications au sein de groupes placés dans des conditions expérimentales de travail", *Les sciences de la politique aux États-Unis*, Paris, Armand Colin, 1951, 305 p.
- [3] LEAVITT, H. J., "Quelques effets de divers réseaux de communications sur la performance d'un groupe", in : A. Levy (ed.), *Psychologie sociale : Textes fondamentaux*, Paris, Dunod, 1965, 565 p.
- [4] FLAMENT, C., *Théorie des graphes et structures sociales*, Paris, Gauthier-Villars/Mouton, 1965, 166 p.
- [5] FLAMENT, C., *Réseaux de communication et structures de groupe*, Paris, Dunod, 1965, 196 p.
- [6] BARBUT, M., "Intermédiarité", *Math. Sci. hum.*, n° 28, Paris, 1969.
- [7] GUILBAUD, G. Th., "Esquisses mésologiques", *Math. Sci. hum.*, n° 28, Paris, 1969.
- [8] BARBUT, M. et MONJARDET, B., *Ordre et classification : Algèbre et combinatoire*, t. 1, t. 2, Paris, Hachette, 1970, 176 p., 173 p.
- [9] BOULAYE, G., *Contribution à la théorie des treillis*, Thèse, Faculté des Sciences de Grenoble, 1971.
- [10] HARARY, F., "Status and contrastatus", *Sociometry*, n° 22, 1959, pp. 23-43.
- [11] HARARY, F., NORMAN, R. Z. et CARTWRIGHT, D., *Structural models*, New York, Wiley, 1965.