MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

E. COUMET

Mersenne : dénombrements, répertoires, numérotations de permutations

Mathématiques et sciences humaines, tome 38 (1972), p. 5-37

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1972__38__5_0>

Math. Sci. hum. (10e année, nº 38, 1972, p. 5-37)

MERSENNE: DÉNOMBREMENTS, RÉPERTOIRES, NUMÉROTATIONS DE PERMUTATIONS

par
E. COUMET [1]

L'intérêt soutenu que porta le Père Mersenne [2] aux « combinaisons» n'a guère retenu jusqu'ici les historiens des mathématiques. On trouve pourtant, dispersés dans différentes de ses œuvres, plusieurs exposés où sont détaillés, et illustrés par de nombreuses applications numériques, les principaux théorèmes de l'analyse combinatoire élémentaire [3].

Nous n'y prélèverons ici que ce qui touche aux *permutations*. Thème pauvre à première vue, mais qui nous permettra tout d'abord de faire un sort à une entreprise apparemment aberrante (ainsi put-elle être jugée d'ailleurs par certains de ses contemporains): Mersenne a procédé à l'énumération *effective* de 40 320« chants» de 8 notes [4] (permutations de 8 notes données); invité ainsi à nous interroger sur des travaux qui débordent en plusieurs directions la seule recherche de règles arithmétiques simples, nous serons à même, en second lieu, malgré les limites choisies, de faire émerger quelques-uns des projets qui sous-tendent la constitution d'un *art de combiner*.

Sons ou lettres: tels sont les matériaux des exemples favoris de Mersenne; aussi les règles de dénombrement qu'il connaissait (A) trouvent-elles une application immédiate dans l'art des anagrammes (B); mais la Musique offre en l'occurrence plus qu'un simple champ d'illustration; soucieux d'aider les musiciens à « faire de bons chants», Mersenne montrera quels secours peuvent offrir des répertoires de chants (C) à propos desquels il aura à résoudre des problèmes de rangement (D) et de numérotation (E) [5].

---

1. Maître assistant à l'Université Paris I (UER de Philosophie).

2. Sur la vie et les œuvres de Marin Mersenne (1588-1648), *cf.* R. Lenoble, *Mersenne ou la naissance du mécanisme*, Paris, Vrin, 1943.

3. Nous leur avons consacré une étude d'ensemble dont l'article présent extrait certains résultats (*Mersenne, Frenicle, et l'élaboration de l'analyse combinatoire dans la première moitié du XVIIe siècle*, exemplaires dactylographiés, 590 p., thèse de 3e cycle dirigée par M. P. Costabel, Directeur de Recherche à l'EPHE).

4. Pour Mersenne, un « chant » est une suite de notes, définie différemment suivant les circonstances ; dans le cadre de cet article, « un chant de n notes » sera en général une permutation de n notes, avec ou sans répétition, selon les cas.

5. Nous faisons référence plus bas aux ouvrages suivants de Mersenne : *Quaestiones in Genesim*, Paris, 1623 ; *La vérité des sciences contre les septiques ou Pyrrhoniens*, Paris, 1625 ; *Harmonie universelle*, Paris, 1636 (nous citons en précisant le numéro du tome, d'après la reproduction en 3 tomes qu'en a donnée récemment le CNRS); *Harmonicorum Libri*, Paris, 1636; *Suite manuscrite des Quaestiones in Genesim*, Bibl. Nat., fonds latin, 17261 et 17262. Nous utilisons l'abrévation *Corr. Mers.* pour désigner la *Correspondance du P. Marin Mersenne Religieux Minime*, en cours de publication, éd. du CNRS, 11 volumes parus, 1933-1970.

A. DÉNOMBREMENTS

1. Permutations simples

La règle donnant le nombre de permutations de n objets était bien connue au temps de Mersenne [1]. D'où le qualificatif d'« ordinaire» par lequel il la situe dans sa classification des « combinaisons». Dans *La vérité des sciences* où son savoir ne dépassait guère ce qu'il avait repris, sans le citer, d'un texte de Clavius [2], il énonçait ce Théorème:

« *Theoresme III*. On sçaura combien de fois chaque nombre de choses proposées peut receuoir de dispositions, & de conionctions differentes, si [...] on prend autant de nombres selon leur ordre naturel, comme il y aura de choses, car le nombre produit par leur addition [lire: multiplication] nous donnera le nombre des susdites dispositions» [3].

« La disposition de ce theoresme nous donne le nombre de toutes les *conionctions* qui peuuent se treuuer en chaque nombre de choses absolûment parlant, & sans aucune restriction, pourueu qu'on prenne le nombre total à chaque conionction» [3].

Aussi bien dans *La vérité des sciences* que dans l'*Harmonie universelle*, Mersenne, pour justifier ce théorème, ne fait que décrire les opérations à effectuer dans des cas déterminés:

« Or il est si aisé de trouuer le nombre de ces chants, qu'il n'est pas quasi besoin d'en expliquer la maniere, car il faut seulement escrire autant de nombres selon leur ordre naturel, comme il y a de notes dont on veut vser; par exemple, si l'on veut sçavoir combien l'on peut faire de chants differents avec les huicts sons, ou les 8 notes de l'octave, *vt*, *ré*, *mi*, *fa*, *sol*, *re*, *mi*, *fa*, il faut escrire 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 & multiplier tellement ces 8 nombres, que le produit des deux soit toujours multiplié par le nombre naturel en cette maniere; vne fois deux font deux; car il faut laisser l'vnité, parce qu'elle ne multiplie nullement, & dire deux fois trois font six, quatre fois six font vingt-quatre, cinq fois 24 font 120, six fois 120 font 720, à sçavoir le nombre de tous les chants de six notes [...]: sept fois 720 font 5 040, & huit fois 5 040 font 40 320, qui monstre le nombre des chants qui sont contenus dans 8 sons differens, par exemple dans les 8 notes de la premiere espece d'Octave» [4].

Par contre, dans les *Harmonicorum Libri*, nous avons affaire à une véritable règle générale:
« Facilè vero reperitur ista varietas, si totidem ab vnitate numeri serie continuâ, & naturali scribantur, quot notae vel aliae res coniungendae variandaeque proponuntur; illi siquidem seipsos multiplicantes dant numerum varietatum» [5].

Il convient par ailleurs de le signaler: Mersenne avait, dans *La vérité des sciences*, donné la table des factorielles jusqu'à 22 ! [6]. Tout en glosant à nouveau, dans l'*Harmonie universelle*, sur l'amplitude considérable de ce nombre [7], il aura l'intrépidité de prolonger ses calcul bien au delà, et d'ajouter à la

1. *Cf.* par exemple, D. E. Smith, *History of mathematics* ,vol. 2, rééd. Dover Publications, 1958, pp. 524-527. Les lecteurs de cette revue ont pu lire, sur ce sujet, un texte tiré de la *Logistica*, 1559, de Jean Borrel, plus connu sous le nom de Butéo (E. Coumet, « Un texte du XVIe siècle sur les cadenas à combinaison », *Math. Sci. hum.*, 6e année, no 22, 1968, pp. 33-37).

2. Nous avons en effet établi que dans les pages de *La vérité des sciences* qui ont été considérées comme une de ses premières contributions à l'analyse combinatoire (*cf.* Pascal, *Œuvres*, ed. Léon Brunschvicg et Pierre Boutroux, Paris, 1908, t. 3, p. 442), Mersenne suit d'assez près une curieuse digression relative à l'analyse combinatoire que Clavius avait glissée dans un ouvrage d'astronomie et de géographie, *In Sphaeram Ioannis de Sacro Bosco commentarius*.

3. *La vérité des sciences*, pp. 539-540.

4. *Harmonie universelle, Livre Second des Chants*, p. 107.

5. *Harmonicorum Libri*, VII, p. 116.

6. *La vérité des sciences*, pp. 549-550.

7. « Car il faudrait beaucoup plus de rames de papier pour noter tous les chants qui se trouuent dans 22 notes, encore que l'on n'en repete iamais aucune deux fois, qu'il n'en faudroit les vnes sur les autres depuis la terre iusques au firmament », *Harmonie universelle, Livre Second des Chants*, p. 108.

Table de la Combination depuis 23 iusques à 64.

23	25852016738884976640000
24	620448401733239439360000
25	15511210043330985984000000
26	403291461126605635584000000
27	10888869450418352160768000000
28	304888344611713860501504000000
29	8841761993739701954543616000000
30	265252859812191058636308480000000
31	8222838654177922817725562880000000
32	263130836933693530167218012160000000
33	8683317618811886495518194401280000000
34	295232799039604140847618609643520000000
35	10333147966386144929666651337523200000000
36	371993326789901217467999448150835200000000
37	13763753091226345046315979581580902400000000
38	523022617466601111760007224100074291200000000
39	2039788208119744335587402817399028973468000000000
40	815915283247897734349611269596115893872000000000
41	33452526613163807108334022053440751647352000000000
42	1405006117752879898550028926244511569188784000000000
43	60415263063373835637651243828513997475117712000000000
44	2658271574788448768056654728454615888905179328000000000
45	107659998778932174106294516512411943500659762784000000000
46	4952359943830880008889547759570949401030349088064000000000
47	232760917360051360417808744699834621848426407139008000000000
48	11172524033282465300054819745592061848724467542672384000000000
49	547453677630840799702686167534011030587498909590946816000000000
50	127372683881542039985134308376700551529374945479547340800000000000
51	13960068579586440392418497272117281279981222194569143808000000000000

«Table de tous les chants qui peuvent se rencontrer dans 22 sons, c'est-à-dire dans trois octaves» [1, 2 !, 3 !, ..., 22 !], une « Table de la combination depuis 23 iusques à 64» [23 !, ..., 64 !] [1].

2. Permutations avec répétitions

« Combien l'on peut faire de chants de tel nombre de notes que l'on voudra, lorsqu'il est permis d'vser de deux, 3, 4 notes semblables, &c. & que l'on retient tousiours le mesme nombre total des notes dont on fait les chants» [2].

Par rapport à la « combinaison ordinaire», la situation devient ainsi un peu plus difficile [3], lorsque dans un chant (ou un mot) donné, plusieurs notes (ou lettres) sont semblables:

« Negotium tamen paulo videtur difficilius, cùm ex notis duae vel plures similes occurrunt; quod similiter in varietatibus dictionum contingit, quando vocabulum propositum plures litteras similes habet, quod saepenumero contingit» [4].

Tout à l'heure la règle se formulait simplement; mais ici la difficulté vient du grand nombre de cas qui peuvent se présenter:

1. *Ibid.* p. 109.

2. Énoncé de la Proposition X du *Livre Second des Chants*, *Harmonie universelle*, II, p. 129. *Cf.* la Proposition VIII, *Harmonicorum Libri*, VII, p. 135, « Cantilenarum varietatem explicare, cum in dato notarum numero duae vel plures similes occurrunt ».

3. Mersenne n'a pas travaillé seul à ce problème ; c'est ce qu'atteste un des rares passages de sa *Correspondance* où sont évoquées des questions d'analyse combinatoire. Jean Beaugrand écrit en effet à Mersenne le 20 février 1632, « Comme je me voulois mettre à resoudre vos deux questions j'ay trouvé en regardant ma lettre que Vous me rendistes dernierement que ce n'est pas celle, où est la *Reigle de connoistre les changemens differens de plusieurs lettres, lorsqu'une mesme lettre est repetée 2,3, ou plusieurs fois.* Je Vous la renvoye donc, afin que Vous m'envoyiez l'autre » (*Corr. Mers.*, t. 3, lettre n° 213, p. 254).

4. *Harmonicorum Libri*, VII, p. 116.

« Cùm autem haec regula multos casus patiatur, quandoquidem vel unica littera bis, ter, etc. repetatur, vel duae, aut plures itaut una bis, altera etiam bis, et ita deinceps, vel una bis, altera ter, alia quater, aut quinquies etc. repetatur » [1].

Aussi Mersenne ne se risque-t-il à énoncer une règle que pour le cas où *une* note se répète 2, 3, 4, ... fois :

« Cum igitur aliqua nota, bis, ter, quater, &c. repetitur in proposita Cantilena, combinatio numeri notarum quae sunt in Cantilena, diuidenda est per combinationem notarum repetitarum » [2].

Si le nombre de notes est n, et qu'une note se répète n_1 fois, le nombre des chants N sera obtenu en divisant la « combinaison ordinaire » de n par la « combinaison ordinaire » de n_1 :

$$N = \frac{n!}{n_1!}$$

Pour les autres cas, Mersenne va illustrer la méthode à suivre par des exemples, en essayant parfois, mais non sans mal, de s'élever à des propositions plus générales. Nous allons citer les exemples qui sont donnés dans l'*Harmonie universelle* [3] et qui rendent manifeste la maîtrise qu'avait Mersenne des règles qu'il voulait exprimer. Mais, faute d'un symbolisme tout à fait élémentaire, quelle gêne, quels embarras de style pour formuler le moindre calcul !

« Par exemple, le chant *Ut, re, mi, ut, fa,* a cinq notes, dont la combination precedente est 120 ; mais parce qu'il y a deux notes semblables, à sçavoir deux ut, il faut diviser 120 par 2, c'est à dire par la combination de deux notes, le quotient donnera 60 pour le nombre des chants qui se peuvent faire des cinq notes precedentes. »

$$n = 5, \qquad n_1 = 2$$

$$N = \frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60$$

De même si on a :

$$n = 7, \qquad n_1 = 3$$

le nombre des chants sera :

$$N = \frac{7!}{3!}$$

« Et s'il arrive que le chant ait deux notes semblables de deux sortes, comme en ce chant *Vt, re, mi, re, vt,* où il y a deux *vt,* & deux *re,* il faut quarrer la combination de 2 qui font 4, par lequel 120, qui est le nombre de la combination de 5 notes, estant divisé monstre qu'il n'y a que 30 chants dans ces 5 notes. »

$$n = 5, \qquad n_1 = 2, \qquad n_2 = 2.$$

$$N = \frac{5!}{(2!)^2} = \frac{120}{4} = 30$$

« S'il y avoit 3 binaires de notes semblables, il faudroit cuber 2, &c. suivant les dignitez de l'Algebre. Il faut dire le mesme chose de 2, de 3, & de 4, ternaires, quaternaires, &c. iusques à l'infiny. »

$$n_1 = k, \qquad n_2 = k, \qquad \dots, \qquad n_{i-1} = k, \qquad n_i = k$$

$$N = \frac{n!}{(k!)^i}$$

« S'il y avoit 2 binaires, & vn ternaire, il faudroit multiplier la combination du ternaire par le quarré de la combination de deux. »

$$n_1 = 2, \qquad n_2 = 2, \qquad n_3 = 3$$

$$N = \frac{n!}{(2!)^2\, 3!}$$

---

1. *Suite manuscrite aux Quaestiones in Genesim*, 2, p. 227.
2. *Harmonicorum Libri*, VII, p. 133.
3. *Livre Second des Chants*, pp. 129-130.

« Et si l'vne des notes se repetoit quatre fois, & l'autre 5 fois, il faudroit multiplier la combination de 5 par celle de 4 pour avoir le diviseur. »

$$n_1 = 4, \qquad n_2 = 5$$

$$N = \frac{n!}{4!\,5!}$$

« Finalement, si l'on veut sçavoir combien l'on peut faire de chants differens de 22 notes, dont il y en ait deux qui se repetent chacune deux fois, vne qui se repete 3, & deux autres qui se repetent quatre fois, il faut quarrer la combination de 2 pour avoir quatre, par lequel il faut multiplier la combination de 3 pour avoir 24, qu'il faut multiplier par le quarré de la combination de 4, qui est 576. »

$$n = 22$$

$$n_1 = 2, \qquad n_2 = 2, \qquad n_3 = 3, \qquad n_4 = 4, \qquad n_5 = 4$$

$$N = \frac{n!}{(2!)^2\,(3!)\,(4!)^2}.$$

B. ANAGRAMMES

« Or la mesme industrie sert pour faire les Anagrammes des noms qui ont deux ou plusieurs lettres semblables comme les deux autres propositions precedentes [relatives aux permutations simples] servent pour sçavoir le nombre des Anagrammes de tous les noms dont les lettres sont toutes differentes » [1].

Ce n'est pas fortuitement, ni même à titre d'exemple particulièrement commode que surgit ici cet usage de l' « industrie » précédemment exposée.

Les anagrammes sont « inuersions de lettres, tellement transposees, que sans aucune adjonction, repetition, ou diminution d'autres que celles qui sont au nom & surnom d'vne personne on en fait quelque deuise ou periode accomplie d'un sens parfaict » [2]. Elles furent en très grande vogue au 16e et au 17e siècle. On s'en amusait, certes, en y prenant ce même plaisir que peuvent donner de nos jours les mots croisés; mais elles offraient surtout une manière d'hommage très prisée dans le commerce des cours. Une glorieuse anagramme où les titres d'un Grand se laissaient magnifier par quelque rapprochement mythologique valaient tous les dithyrambes. C'est que les anagrammes tiraient prestige de leur Antiquité [3] et passaient pour être sources de profondes révélations, au regard de certaines doctrines cabalistiques ou astrologiques [4].

Il n'est pas trop difficile de faire des anagrammes sur un nom donné, car le nombre des choix possibles se trouve étroitement limité par l'obligation de retomber sur un mot qui a lui-même un sens. Mais au 16e siècle, on s'était plu à étendre la recherche d'anagrammes à des phrases entières ou à des devises assez longues, et à prescrire des contraintes beaucoup plus rigoureuses, en particulier dans le domaine poétique :

« Apres les Anagrammatismes, nous parlerons des vers Retrogrades par lettres & mots: parce qu'au lieu qu'es Anagrammes il faut transporter les lettres sans ordre certain, en ces vers Retrogrades par lettres il faut Anagrammatiser d'ordre, prenant la derniere lettre pour venir à la premiere » [5].

---

1. *Ibid.*, p. 130.

2. E. Tabourot, seigneur des Accords, *Les Bigarrures et Touches du seigneur Des Accords*, Paris, J. Richer, 1614, p. 80.

3. Mersenne, suivant sans doute Duret, rappelle le souvenir du poète Lycophron qui excella grandement en cette subtilité des anagrammes (*cf.* Mersenne, *Suite manuscrite des Quaestiones in Genesim*, 2, p. 528 ; C. Duret, *Thresor de l'Histoire des Langues*, p. 162).

4. Mersenne rapporte, dans la *Première préface générale au lecteur de l'Harmonie universelle* « la gentille remarque » que lui avait envoyée Peiresc, des noms de deux religieux dont chacun a dans l'Anagramme de son nom, « les six syllabes *ut*, *re*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*, sans changer, aioûter ny oster aucune lettre ». Mersenne se refuse à croire pour sa part que de telles Anagrammes « signifient aucune chose en la vie des hommes ».

5. E. Tabourot, *op. cit.*, p. 89.

Et la Cabale elle-même, si l'on envisage d'un point de vue formel les plus familiers de ses procédés que fait-elle, sinon « anagrammatiser » ? C'est ce qu'avait bien vu Jean-Pierre Camus: envisageant « les 3 especes de changemens appellez par les Cabalistes *Ziruphs* ou Combinations, *Ethbas* ou transpositions, & *Themurah* ou commutations materielles des lettres», il les rassemble « soubs ce nom general d'Anagrammatisme, c'est à dire artifice caché soubs le remuëment des lettres» [1].

Pour reprendre cette dernière expression, on voit qu'il y eut au 16e siècle, un immense « remuëment de lettres». Un« remuëment» que beaucoup menèrent sans doute aveuglément, se fiant à leur seule sagacité ou à la chance. Mais il est très probable aussi que ce domaine d'exercices particulièrement fructueux, conduisit certains esprits à se préoccuper d'analyse combinatoire, et à chercher des méthodes d'énumération méthodique; ainsi Vigenère après avoir donné la règle des Permutations, envisagea-t-il la constitution de tables analogues à celles dont se servent les chiffreurs:

« Cecy ay-ie bien voulu toucher icy en passant des anagrammes & transpositions de lettres, ou renuersemens de mots, comme on les appelle; soit pour les noms propres, soit pour les deuises, & autres vsages à quoy on les voudroit appliquer; parce que c'est comme vne manière de chiffre: & se pourroient aisément dresser sur cecy des tables rondes & carrees, qui abbregeroient grandement le labeur extreme, que prennent ceux qui cherchent de cest artifice quelque gloire & reputation; non en vain, car cela est en fort grand'vogue pour le iourd'huy; si ie ne craignois qu'on m'imputast de vouloir entreprendre sur leur marche» [2].

Sans être sûr que Vigenère y pense ici précisément, on songe à ce dispositif qu'affectionnaient les chiffreurs: des bandes circulaires concentriques mobiles sur lesquelles étaient portées des lettres, et qu'ils faisaient mouvoir les unes par rapport aux autres.

L'Anagrammatisme, dès lors qu'on s'interroge sur toutes les anagrammes possibles sur un sujet donné, mène naturellement à l'art de combiner. Et cet art ne manquera pas, en retour, de revendiquer comme un de ses domaines privilégiés d'application, les anagrammes. Dès les *Quaestiones in Genesim*, Mersenne y fit allusion:

« Modus hic anagrammatismus dici potest, quo omnia possibilia anagrammata certissimè reperias» [3].

Il y revient dans *La vérité des sciences :*

« Or auant que de mettre fin au discours des *combinations* nous pouuons facilement conclurre que toutes les anagrammes qui sont possibles peuuent estre treuuées par ces *combinations*, car on treuue par leur moyen combien toutes les lettres de chaque diction, & de chaque période peuuent estre changées & transposées diuersement» [4].

Il reparlera de l'*Anagrammatismus* dans les *Harmonicorum Libri* [5] et tiendra à préciser dans sa *Préface au Lecteur des Traitez de la Voix et des Chants* que la proposition X du *Livre Second des Chants* « monstre l'Art de faire des Anagrammes» [6].

Plus encore que les règles générales, ce qui pouvait intéresser le faiseur d'anagrammes, c'était de voir rassemblés sous ses yeux des résultats relatifs à des cas particuliers; ainsi, un mot quelconque étant donné, serait-il à même de connaître directement le nombre de ses anagrammes,

1. J. P. Camus, *Les Diversitez*, Paris, Claude Chappellet, 1609, fol. 225 v.
2. Blaise de Vigenère, *Traicté des Chiffres*, Paris, Abel l'Angelier, 1587, fol. 190 v-191 r.
3. Mersenne, *Quaestiones in Genesim* col. 702.
4. *La vérité des sciences*, p. 579.
5. *Harmonicorum Libri*, VII, p. 133.
6. *Cf.* également *Harmonie universelle*, II, *Livre Second des Chants*, p. 110.

sans avoir à refaire chaque fois le calcul. Mersenne satisfait à un tel désir dans un « Corollarium pro Anagrammatibus » :

« Ut vero quis absque ullo labore sciat quot Anagrammata sint in dictionibus quae non excedunt numerum 9 litterarum, sequentes tabulas subiungo, quae incipiunt à dictione 5 litterarum, quia dictiones 1, 2, 3, 4 litterarum sunt nimium faciles » [1].

Mersenne donne 4 tables dont voici la première:

Dictiones 5	Litterarum 120
2	60
2 et 2	30
3	20
2 et 3	10
4	5
5	1

On voit qu'il établit la liste exhaustive de tous les cas qui peuvent se produire pour $n = 5$, lorsque des lettres se répètent.

Il donne des tables analogues pour $n = 6, 7, 9$.

Il ne s'attache pas toutefois à écrire *effectivement* toutes les anagrammes d'un mot donné, sinon pour des cas très simples; par contre, dans le domaine qui lui est cher de la Musique, il aura grand souci d'effectuer des listes exhaustives fort impressionnantes de « chants ».

C. RÉPERTOIRES DE « CHANTS » A L'USAGE DES MUSICIENS

Relevons tout d'abord les différentes listes de ce genre établies par Mersenne:

a) Liste des permutations de 5 notes : dans *La vérité des sciences* (Livre III, chap. 10, pp. 546-547), à propos des « airs » par lesquels on peut chanter des vers de cinq syllabes, comme « Dieu ne la gardant », « ce qu'a pratiqué le sieur Caignet dans le chant qu'il a donné depuis peu à ce vers par cette *quinte*, *sol . fa . mi . re . ut .* », Mersenne énumère les cent vingt chants « qui se peuvent faire dans l'étendue d'une quinte ».

b) Liste des permutations de 6 notes :

— *Harmonicorum Libri*, VII, « Varietas cantuum hexachordi minoris vel maioris »

— *Harmonie universelle*, II *(Livre Second des Chants) :* pp. 111-115 : « Table des 720 chants d'Ut, re, mi, fa, sol, la » ; pp. 117-128 : « Sept cens vingt chants de l'Hexachorde mineur » (Re, mi, fa, sol, la, fa; ici les notes sont inscrites sur des portées, et non désignées par leur nom, comme dans la table précédente, et les chants sont numérotés).

c) Liste des permutations de 8 notes : on concèdera volontiers à Mersenne qu'il s'agit là d'une « œuvre immense et prodigieuse » ! 40 320 chants consignés dans le « grand et immense volume de la musique ou combination des tons », intitulé par nous *Manuscrit des chants de 8 notes*.

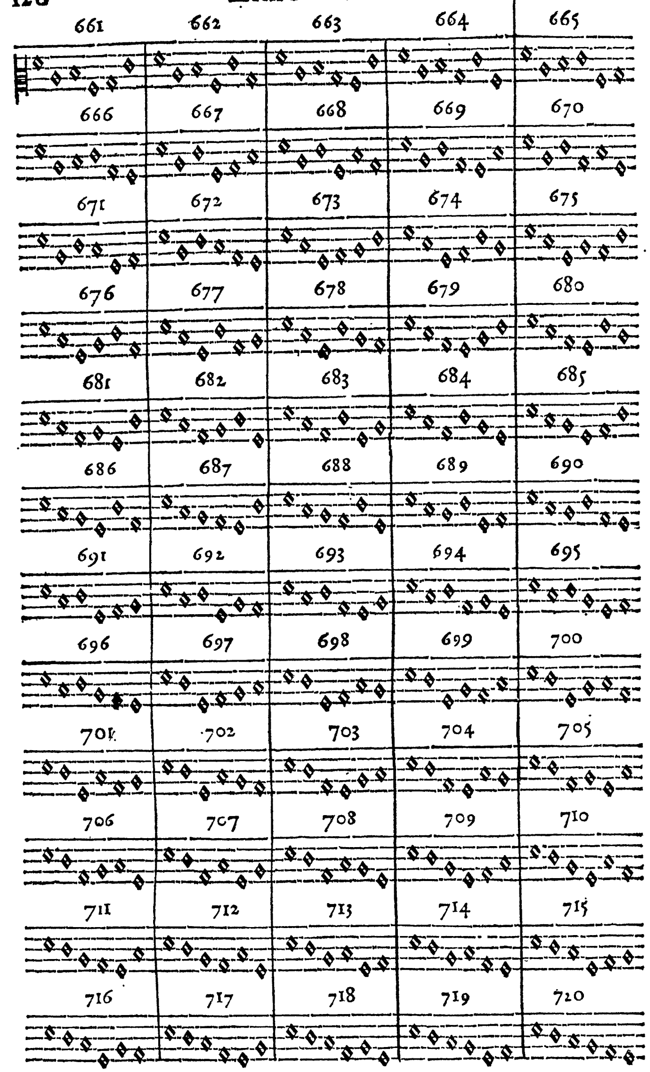
Pourquoi, à dresser et à reproduire ces listes, ce soin et cette minutie ? L'intérêt peut nous échapper de ces fastidieux redoublements de règles simples. Gardons-nous tout d'abord de renverser ici

3. *Suite manuscrite aux Quaestiones in Genesim*, 2, p. 228.

RE,vt,mi,fa,ſol,la. Re,vt,mi,fa,la,ſol. Re,vt,mi,ſol,fa,la. Re,vt,mi,ſol,la,fa. Re,vt,mi,la,fa,ſol. Re,vt,mi,la,ſol,fa. Re,vt,fa,mi,ſol,la. Re,vt,fa,mi,la,ſol. Re,vt,fa,ſol,mi,la. Re,vt,fa,ſol,la,mi. Re,vt,fa,la,mi,ſol. Re,vt,fa,la,ſol,mi. Re,vt,ſol,mi,fa,la. Re,vt,ſol,mi,la,fa. Re,vt,ſol,fa,mi,la. Re,vt,ſol,fa,la,mi. Re,vt,ſol,la,mi,fa. Re,vt,ſol,la,fa,mi. Re,vt,la,mi,fa,ſol. Re,vt,la,mi,ſol,fa. Re,vt,la,fa,mi,ſol. Re,vt,la,fa,ſol,mi. Re,vt,la,ſol,mi,fa. Re,vt,la,ſol,fa,mi. Re,mi,vt,fa,ſol,la. Re,mi,vt,fa,la,ſol. Re,mi,vt,ſol,fa,la. Re,mi,vt,ſol,la,fa. Re,mi,vt,la,fa,ſol. Re,mi,vt,la,ſol,fa. Re,mi,fa,vt,ſol,la. Re,mi,fa,vt,la,ſol. Re,mi,fa,ſol,vt,la. Re,mi,fa,ſol,la,vt. Re,mi,fa,la,vt,ſol. Re,mi,fa,la,ſol,vt. Re,mi,ſol,vt,fa,la. Re,mi,ſol,vt,la,fa. Re,mi,ſol,fa,vt,la. Re,mi,ſol,fa,la,vt. Re,mi,ſol,la,vt,fa. Re,mi,ſol,la,fa,vt. Re,mi,la,vt,fa,ſol. Re,mi,la,vt,ſol,fa. Re,mi,la,fa,vt,ſol. Re,mi,la,fa,ſol,vt. Re,mi,la,ſol,vt,fa. Re,mi,la,ſol,fa,vt. Re,fa,vt,mi,ſol,la. Re,fa,vt,mi,la,ſol. Re,fa,vt,ſol,mi,la. Re,fa,vt,ſol,la,mi. Re,fa,vt,la,mi,ſol. Re,fa,vt,la,ſol,mi. Re,fa,mi,vt,ſol,la. Re,fa,mi,vt,la,ſol. Re,fa,mi,ſol,vt,la. Re,fa,mi,ſol,la,vt. Re,fa,mi,la,vt,ſol. Re,fa,mi,la,ſol,vt. Re,fa,ſol,vt,mi,la. Re,fa,ſol,vt,la,mi. Re,fa,ſol,mi,vt,la. Re,fa,ſol,mi,la,vt. Re,fa,ſol,la,vt,mi. Re,fa,ſol,la,mi,vt. Re,fa,la,vt,mi,ſol. Re,fa,la,vt,ſol,mi. Re,fa,la,mi,vt,ſol. Re,fa,la,mi,ſol,vt. Re,fa,la,ſol,vt,mi. Re,fa,la,ſol,mi,vt. Re,ſol,vt,mi,fa,la. Re,ſol,vt,mi,la,fa. Re,ſol,vt,fa,mi,la. Re,ſol,vt,fa,la,mi. Re,ſol,vt,la,mi,fa. Re,ſol,vt,la,fa,mi. Re,ſol,mi,vt,fa,la. Re,ſol,mi,vt,la,fa. Re,ſol,mi,fa,vt,la. Re,ſol,mi,fa,la,vt. Re,ſol,mi,la,vt,fa. Re,ſol,mi,la,fa,vt. Re,ſol,fa,vt,mi,la. Re,ſol,fa,vt,la,mi. Re,ſol,fa,mi,vt,la. Re,ſol,fa,mi,la,vt. Re,ſol,fa,la,vt,mi. Re,ſol,fa,la,mi,vt. Re,ſol,la,vt,mi,fa. Re,ſol,la,vt,fa,mi. Re,ſol,la,mi,vt,fa. Re,ſol,la,mi,fa,vt. Re,ſol,la,fa,vt,mi. Re,ſol,la,fa,mi,vt. Re,la,vt,mi,fa,ſol. Re,la,vt,mi,ſol,fa. Re,la,vt,fa,mi,ſol. Re,la,vt,fa,ſol,mi. Re,la,vt,ſol,mi,fa. Re,la,vt,ſol,fa,mi. Re,la,mi,vt,fa,ſol. Re,la,mi,vt,ſol,fa. Re,la,mi,fa,vt,ſol. Re,la,mi,fa,ſol,vt. Re,la,mi,ſol,vt,fa. Re,la,mi,ſol,fa,vt. Re,la,fa,vt,mi,ſol. Re,la,fa,vt,ſol,mi. Re,la,fa,mi,vt,ſol. Re,la,fa,mi,ſol,vt. Re,la,fa,ſol,vt,mi. Re,la,fa,ſol,mi,vt. Re,la,ſol,vt,mi,fa. Re,la,ſol,vt,fa,mi. Re,la,ſol,mi,vt,fa. Re,la,ſol,mi,fa,vt. Re,la,ſol,fa,vt,mi. Re,la,ſol,fa,mi,vt.

MI,vt,re,fa,ſol,la. Mi,vt,re,fa,la,ſol. Mi,vt,re,ſol,fa,la. Mi,vt,re,ſol,la,fa. Mi,vt,re,la,fa,ſol. Mi,vt,re,la,ſol,fa. Mi,vt,fa,re,ſol,la. Mi,vt,fa,re,la,ſol. Mi,vt,fa,ſol,re,la. Mi,vt,fa,ſol,la,re. Mi,vt,fa,la,re,ſol. Mi,vt,fa,la,ſol,re. Mi,vt,ſol,re,fa,la. Mi,vt,ſol,re,la,fa. Mi,vt,ſol,fa,re,la. Mi,vt,ſol,fa,la,re. Mi,vt,ſol,la,re,fa. Mi,vt,ſol,la,fa,re. Mi,vt,la,re,fa,la. Mi,vt,la,re,ſol,fa. Mi,vt,la,fa,re,ſol. Mi,vt,la,fa,ſol,re. Mi,vt,la,ſol,re,fa. Mi,vt,la,ſol,fa,re. Mi,re,vt,fa,ſol,la. Mi,re,vt,fa,la,ſol. Mi,re,vt,ſol,fa,la. Mi,re,vt,ſol,la,fa. Mi,re,vt,la,fa,ſol. Mi,re,vt,la,ſol,fa. Mi,re,fa,vt,ſol,la. Mi,re,fa,vt,la,ſol. Mi,re,fa,ſol,vt,la. Mi,re,fa,ſol,la,vt. Mi,re,fa,la,vt,ſol. Mi,re,fa,la,ſol,vt. Mi,re,ſol,vt,fa,la. Mi,re,ſol,vt,la,fa. Mi,re,ſol,fa,vt,la. Mi,re,ſol,fa,la,vt. Mi,re,ſol,la,vt,fa. Mi,re,ſol,la,fa,vt. Mi,re,la,vt,fa,ſol. Mi,re,la,vt,ſol,fa. Mi,re,la,fa,vt,ſol. Mi,re,la,fa,ſol,vt. Mi,re,la,ſol,vt,fa. Mi,re,la,ſol,fa,vt. Mi,fa,vt,re,ſol,la. Mi,fa,vt,re,la,ſol. Mi,fa,vt,ſol,re,la. Mi,fa,vt,ſol,la,re. Mi,fa,vt,la,re,ſol. Mi,fa,vt,la,ſol,re. Mi,fa,re,vt,ſol,la. Mi,fa,re,vt,la,ſol. Mi,fa,re,ſol,vt,la. Mi,fa,re,ſol,la,vt. Mi,fa,re,la,vt,ſol. Mi,fa,re,la,ſol,vt. Mi,fa,ſol,vt,re,la. Mi,fa,ſol,vt,la,re. Mi,fa,ſol,re,vt,la. Mi,fa,ſol,re,la,vt. Mi,fa,ſol,la,vt,re. Mi,fa,ſol,la,re,vt. Mi,fa,la,vt,re,ſol. Mi,fa,la,vt,ſol,re. Mi,fa,la,re,vt,ſol. Mi,fa,la,re,ſol,vt. Mi,fa,la,ſol,vt,re. Mi,fa,la,ſol,re,vt.

Mi,ſol,



ADVERTISSEMENT.

Il faut tirer des lignes perpendiculaires de haut en bas pour diuiſer ces notes de ſix en ſix, parce qu'elles ne doiuent pas eſtre priſes de ſuite.

PROPOSITION

les rapports: très probablement, à chaque fois que furent redécouvertes de telles règles, ce fut par le biais de semblables tabulations exploratoires; et même quand les règles sont suffisamment dégagées pour qu'en soit possible une formulation verbale, leur signification, faute d'un langage symbolique, n'est saisissable que réfractée par des exemples complaisamment étalés. Les tables de toutes sortes tenaient, par ailleurs, une place privilégiée dans la pratique mathématicienne. Pourquoi négliger enfin le goût de la comptabilité bien faite, le charme des rangements préservés de tout écart ?

Après ces raisons supputées et générales, des motifs explicites et spécifiques qui méritent selon nous considération, car ils engagent l'intimité des rapports que Mersenne eut l'originalité de marquer entre Musique et Art Combinatoire. Voici trois thèmes que nous allons examiner successivement: prodigieuses possibilités combinatoires des sons, nécessité de déterminer la totalité de « chants » analogues pour pouvoir juger de leur beauté, utilité de telles déterminations pour l'imagination musicienne.

1. « Tous les chants possibles n'ont pas été tous faits. »

Une table achevée de tous les « chants » qu'on peut établir avec un nombre donné de notes coupe court à tous les doutes; elle étale sous les yeux du moins confiant un résultat irrécusable; elle a, pour première fonction, de « faire voir » tous les chants possibles (« Je me contenterai de vous faire voir, dit Mersenne dans *La vérité des sciences*, tous ceus qui se peuvent faire dans l'étenduë d'une quinte » [1].) Les sceptiques ne devaient pas manquer parmi les Musiciens que Mersenne imagine rétifs aux jongleries numériques par lesquelles il essaie de rendre palpables les grands nombres auxquels conduit le calcul du nombre de permutations de douze, ou treize sons. Si des « Praticiens ne veulent pas croire qu'il y ait une si grande diversité de chants dans 8, 10, ou douze notes, & qu'ils désirent qu'on les escrive tous afin de les convaincre par l'experience », il les met au défi: qu'ils fournissent donc le papier ! « Car s'ils promettent de donner le papier, & que l'on gage le contraire contre eux, il est tres-certain qu'ils perdront », et de calculer (étant donnés la largeur des rames de papier et le nombre des chants qu'on note sur chacune d'elles), la hauteur prodigieuse qu'atteindraient, empilées les unes sur les autres, les rames contenant « tous les chants de 22 notes ». Et d'évaluer ensuite le prix de ces rames ! [2]

Les musiciens une fois confondus, et convaincus par l'expérience, il conviendra de stimuler chez eux le sentiment de leurs propres richesses, leur révéler l'étendue des domaines qui leur restent à explorer. Que Mersenne mette quelque candeur à ressasser et entasser de grands nombres de chants possibles, sans doute. Mais c'est « qu'il y en a qui croyent que l'on ne peut plus faire de chants qui n'ayent déjà esté faits » ! [3] Aussi fallait-il de toute nécessité convaincre de leur erreur ceux pour qui il n'est pas de chants neufs sous le soleil. « Tous les chants possibles n'ont pas été tous faits » [4], c'est ce qu'il fallait démontrer, et que fait toucher du doigt le moindre calcul de « combinations »:

« Par ou tous les Musiciens peuuent conclurre qu'il y a beaucoup de chants lesquels n'ont iamais été faits, entre lesquels plusieurs sont peut estre meilleurs, & plus agreables que tous ceus desquels on s'est serui iusques à present » [5].

Déjà manifeste lorsqu'on modifie simplement la disposition des notes, cette vérité l'est bien davantage encore lorsqu'on varie « les temps »:

« Il est certain que les Compositeurs d'Airs, de Branles, & de Balets n'ont pas vn moindre nombre de varietez dans les temps de leurs mesures, que dans la modulation dont i'ay parlé dans le liure des

1. *La vérité des sciences*, p. 544.
2. *Harmonie universelle*, II, *Livre Second des Chants*, pp. 108-109.
3. *Harmonie universelle*, II, *Livre Second des Chants*, p. 107.
4. *La vérité des sciences*, p. 553, dans la marge.
5. *Ibid.*, p. 552.

Chants, & par consequent qu'ils n'ont pas encore employé toutes les especes de mouuemens, & qu'il en restera tousiours assez pour les exercer toute leur vie»[1].

2. Le problème du plus beau des chants

L'avis vient de nous être donné: si tous les chants possibles n'ont pas été tous faits, les meilleurs restent peut-être à découvrir. Ainsi Mersenne est-il conduit à éclairer sous un nouveau jour une question traditionnelle de l'esthétique musicale, en associant ce problème d'*optimum* qu'est la recherche des beaux chants aux nouvelles possibilités de *totalisation* qu'offrent les recherches combinatoires.

a) Dès les *Quaestiones in Genesim*, Mersenne avait lancé cette objurgation aux musiciens: jamais ils ne parviendront à atteindre la perfection en leur art, s'ils ne soumettent tous les intervalles, pris séparément ou rassemblés, à un examen attentif, et s'ils ne les comparent tous entre eux; sinon comment en connaîtraient-ils les effets ?

« Hîc autem musicos omnes advertere velim se nunquam ad musicae perfectionem perventuros esse, donec in monochordo accuratissimè diviso omnia intervalla tam seorsim, quàm coniunctim perpenderint, adeout nullum supersit, quod cum omnibus aliis divisivè, & collectivè non contulerint. Alioquin quomodo scient quos effectus haec, aut illa consonantia cum his, vel aliis productura sit ? Viderint igitur quot sint intervalla, imo quot esse queant, sive consona, sive dissona, & omnia modis omnibus coniungant» [2].

Pas de perfection en musique sans comparaisons complètes, et point de comparaisons complètes sans énumérations complètes. On voit pourquoi le musicien devra demander secours aux « combinaisons»: avant de comparer entre eux les intervalles, il faudra savoir en combien de manières ils peuvent se conjoindre entre eux.

Cet appel, toutefois, n'était jeté qu'en passant: Mersenne n'avait encore, de son côté, que peu de choses à offrir aux musiciens. Par contre, c'est avant tout « en faveur des musiciens» qu'il s'étendra sur les « combinaisons» dans *La vérité des sciences*, et il y érigera en « Theoresme» cet avertissement:

« Il faut sçauoir combien il peut y auoir de chants, ou d'airs sur un suiet donné pour pouuoir iuger quel est le plus beau chant de tous ceus qui se peuuent faire dans le nombre des sons qu'on ne ueut pas outre-passer» [3].

Pour un nombre de notes donné, on peut faire la liste de tous les chants possibles; le Musicien se devra de les examiner l'un après l'autre, pour choisir le plus beau:

« Il semble que ce theorême n'a pas besoin d'estre preuué, puis qu'on ne peut pas iuger quelle chose est la plus excellente de toutes celles qui sont proposées, si premierement on ne les cognoist toutes; or nous auons donné la maniere de treuuer tous les chants possibles, c'est pourquoi il faut que le Musicien les considere tous l'un apres l'autre, auant qu'il iuge en dernier ressort que celui-ci, ou celui-là est le plus beau, & le plus excellent, ou le plus desagreable, ou le plus deplaisant, & le plus mal fait de tous» [4].

Pour aussi évident et raisonnable que soit ce « Theoresme», ne jettera-t-il pas en fait le Musicien dans une tâche sans fin ?

---

1. *Harmonie universelle*, II, *Livre sixiesme de l'art de bien chanter*, p. 396.
2. *Quaestiones in Genesim*, col. 1692 b.
3. *La vérité des sciences*, p. 557.
4. *Ibid.*, pp. 557-558.

« Quelqu'un me dira peut-estre, que s'il étoit necessaire de sçauoir, & de considerer toutes les manieres par lesquelles on peut conioindre les mesmes notes, ou les mesmes sons qui se treuuent dans chaque air, qu'il seroit impossible de faire le plus beau, & le plus excellent de tous les chants sur un suiet donné; qu'il n'y a pas d'apparence que la perfection des airs soit hors de l'art, & de l'industrie des hommes: or il est ce semble facile de montrer qu'il seroit impossible, d'autant que le nombre des chans ou des airs qui peuuent se rencontrer dans 50 sons, ou 50 chordes, est si grand, qu'on ne sçauroit les considérer tous, encore qu'on fust 10 mil ans entiers à ne faire autre chose » [1].

Ainsi Mersenne se heurte-t-il à l'antinomie du plus beau des chants: on ne peut le distinguer sans avoir trouvé au préalable tous les chants possibles, mais il est pratiquement impossible de connaître ces derniers. Mersenne laissait espérer que la perfection de la musique passait par les combinaisons, et voilà maintenant que celles-ci démontrent, par les grands nombres auxquels elles conduisent, combien cet espoir était déraisonnable.

L'attitude de Mersenne face à cette difficulté est bien ambiguë; il tient, semble-t-il, à ne pas renoncer à sa première affirmation, mais d'un autre côté, il place toute sa foi dans la perfection d'un art qui dispenserait précisément le Musicien de recourir au dénombrement des chants:

« Neantmoins il faut se tenir à notre conclusion, nonobstant que tous les hommes du monde ne peussent trouver ce chant, ni considerer tous ceux qui peuvent estre faits de 24, de 30, de 40, ou de 50 sons, plus ou moins: ce qui n'empesche pourtant pas que cette perfection ne soit dans l'art, & dans la science de la Musique, si on en avoit une parfaite cognoissance telle que les Anges la peuvent avoir.

« I'espere avec l'aide de Dieu que nous arriverons à cette perfection, lors que nous traiterons de la Musique, ou du moins que nous en approcherons de fort pres, particulierement si ie peux retablir ce que pratiquoient les anciens en leurs chants » [2].

Ce n'est pas de ses correspondants [3] que Mersenne pouvait attendre de sortir d'embarras: leurs opinions sur ce sujet sont bien divergentes.

b) Claude Bredeau estime qu'« il se peut faire le plus bel air ou motet que l'on puisse penser »:

« Mes raisons sont que toutes disciplines tendent à un degré de perfection, auquel ceux qui les exercent taschent à parvenir, et suivant leur labeur et la bonté de leur entendement approchent à ce degré tant qu'il leur est possible. Si aucun ne parvient au sommet, ce n'est de la faute de l'art ains de l'artisan » [4].

Le Père Jean Chastellier est d'un avis tout opposé. Par une sorte de récurrence décevante, la recherche du plus beau des chants se mue en course à l'infini, car un chant étant donné, on en trouvera toujours un qui sera encore plus beau:

« Quinta [5] est an demonstrari possit quisnam sit cantus seu harmonia perfectissima inter plures quae ab arte et artificibus fieri possunt.

« Existimo certe demonstrari non posse, cùm probabile admodum sit, in infinitum progressus fieri posse in his perfectionibus. Non dubito tamen quin demonstrari possit quisnam cantus sit perfectior

1. *Ibid.*, p. 558.

2. *Ibid.*, pp. 558-559.

3. Notons que Mersenne avait posé la question du plus beau des chants à Galilée ; mais nous ne connaissons pas la réponse de ce dernier (*cf. Corr. Mers.*, t. 2, lettre n° 124, 1er février 1629, p. 174).

4. *Corr. Mers.*, t. 1, Claude Bredeau à Mersenne, 12 décembre 1625, lettre n° 41, p. 317. Bredeau essaie de préciser les conditions que devrait remplir cet air, mais il pose auparavant qu' « il est possible de trouver un grand musicien », ayant une grande aptitude naturelle, et « auquel on donnera un excellent sujet » ! (*Ibid.*, p. 318 ; *cf.* également *ibid.*, p. 218 et p. 383.)

5. Il s'agit de la cinquième question traitée par le P. J. Chastellier dans cette lettre.

aliquo certo ac determinato, et quid cuicumque dato adjiciendum sit ut reddatur perfectior. Sed sentio non posse assignari tam perfectum cantum quo perfectior dari nequeat» [1].

Rejeté ainsi hors de toute atteinte, ce plus beau des chants est même, pour d'autres correspondants de Mersenne, radicalement inaccessible, puisque, par principe, il n'existe pas:

« Quant est de beaux chants, dont vous demandés mon advis, parce que peut estre je ne scay pas jusques oû va la force des regles de la Musique, j'y trouve une très grande difficulté, d'autant qu'il me semble que la Musique, aussi bien que le goust est respective aux personnes qui l'escoutent et par consequence sera diversement jugée bonne, suivant les affections des auditeurs» [2].

Prise de position relativiste qui dissout le problème posé par Mersenne, et qu'il rencontrera également dans des lettres que lui adresse Descartes au cours des années 1630 et 1631:

« Vous m'empeschez autant de me demander de combien vne consonance est plus agreable qu'vne autre, que si vous me demandiez de combien les fruits ne sont plus agreables à manger que les poissons» [3]. « Tout ce que vos Musiciens disent que les dissonances sont agreables, c'est comme qui diroit que les olives quoy qu'elles ayent de l'amertume, sont quelquesfois plus agreables au goust que le sucre, ainsi que ie croy vous avoir desia mandé» [4]. Il en va ici comme des « compartimens d'vn parterre»; on ne peut « nommer absolument l'vn plus beau que l'autre [...]. Mais ce qui plaira à plus de gens pourra estre nommé simplement le plus *beau*, ce qui ne sçauroit estre determiné» [5].

c) A ce feu roulant d'objections, Mersenne ne fit pas face en choisissant un parti bien déterminé, ou en creusant plus avant une des thèses en présence. Sur ce point, il n'alla pas très au delà des positions incertaines qu'il avait esquissées dans *La vérité des sciences*; dans les œuvres ultérieures, l'art de combiner, même doté de moyens plus étendus, ne lui permettra pas de trancher ce problème qui lui tenait tant à cœur.

Avec quelque obstination, il persistera à poser le problème sous sa forme la plus élémentaire, sans qu'on sache d'ailleurs si c'est pour mieux montrer qu'il est insoluble, ou pour susciter des réponses plus assurées que la sienne: « à sçavoir si l'on peut déterminer quel est le chant le meilleur et le plus doux de plusieurs chants proposez, par exemple des 24 chants dont chacun a 4 sons ou 4 notes» [6]. Le nombre des notes étant petit, on peut écrire aisément ces 24 chants, les examiner un par un, ou les comparer entre eux. Mersenne ne se fait pas faute d'aligner toutes les bonnes raisons qu'on pourrait avoir d'accorder la palme à tel chant, puis à tel autre, et encore à tel autre [7]. Aucun chant ne sortant vainqueur de cette confrontation, faut-il en conclure qu'aucun canon esthétique ne permet de distinguer le chant qui en soi, serait supérieur aux autres ? Cet échec ne ferait que multiplier les questions: car à supposer qu'on admette la variété irréductible des goûts et des sentiments, encore pourrait-on s'interroger sur les correspondances qui font que tel chant s'accorde avec tel tempérament [8]. Mais peut-être aussi le problème reste-t-il en suspens parce qu'il est trop difficile, et qu'il faut en attendre la solution d'esprits plus ingénieux ? [9].

1. *Ibid.* le P. Jean Chastellier à Mersenne, 12 avril 1625, lettre n° 27, p. 201.
2. *Ibid.* Cornier à Mersenne, 18 août 1625, lettre n° 35, pp. 263-264.
3. Descartes, *Œuvres*, A. T., t. 1, 4 mars 1630, p. 126.
4. *Ibid.* octobre ou novembre 1631, p. 227.
5. *Ibid.* 18 mars 1630, p. 133.
6. *Harmonie universelle*, II, *Livre Second des Chants*, Proposition XXI, p. 154 (*Cf. Harmonicorum Libri*, VII, Propositio VII, p. 123 : « Investigare quis sit Cantus omnium optimus, atque gratissimus ex omnibus Cantibus propositis. »)
7. *Ibid.*, pp. 154-156 (*cf.* H. Ludwig, *Marin Mersenne und seine Musiklehre*, Halle-Saale, Buchhandlung des Waisenhauses, 1935, pp. 81-3).
8. *Ibid.* p. 156.
9. *Harmonicorum Libri*, VII, p. 123. « Cum autem hanc difficultatem potiùs attulerim, vt audiam ab ingeniosis solutionem, quam vt ei faciam satis, pauca haec aduertisse sufficit. »

Entre temps, Mersenne ne laisse rien perdre des remarques qu'il avait sollicitées de ses correspondants: avec un éclectisme d'une souplesse sans égale, il les met tout simplement bout à bout dans une Proposition de l'*Harmonie universelle*, en les reprenant parfois mot à mot! Cette juxtaposition forme bien sûr, une rhapsodie d'idées assez étonnante. Mais voici que Mersenne poursuit par un *Corollaire* qui nous ramène aux « combinations »:

« Puis que la beauté des airs consiste particulierement dans leur varieté, & qu'il y en a qui croyent que l'on ne peut plus faire de chants qui n'ayant déja esté faits, il faut considerer cette diuersité, & monstrer que tous les hommes du monde n'ont pû faire tous les airs contenus dans la main Harmonique, ou dans le systeme, & l'échele ordinaire de Musique, encore qu'ils eussent fait tous les iours mille chants differens depuis la creation du monde iusques à present, comme il sera aisé de conclure par les propositions qui suiuent, dans lesquelles l'on apprendra toutes les especes de combination conternation, &c. & plusieurs autres choses qui sont tres remarquables » [1].

Ainsi Mersenne introduit-il le long exposé d'analyse combinatoire qu'il donnera dans l'*Harmonie universelle*. Ce *Corollaire* n'est-il qu'une transition plus ou moins arbitraire entre deux sujets tout à fait distincts ?

Tel serait le cas si Mersenne ne faisait que réaffirmer comme une idée générale sans portée effective, une conviction ancienne, et s'il protestait une fois de plus, mais sans préciser davantage, de l'utilité des « combinations » pour les musiciens. Mais il nous paraît en fait que, selon une tendance déjà perceptible dans *La vérité des sciences*, préoccupations proprement musicales et recherches arithmétiques s'étaient liées de manière beaucoup plus intime. Qu'il faille passer par des énumérations complètes pour découvrir le plus beau des chants, c'est somme toute une affirmation abstraite que pourra admettre ou discuter le théoricien de la musique, mais qui risque de laisser de glace le compositeur. A supposer par contre que, sans plus se soucier de définir rigoureusement la beauté, on se donne pour but de *parfaire* des chants et non d'isoler *le plus parfait* d'entre eux, à supposer même qu'on veuille tout simplement chercher ceux qui sonnent le plus agréablement pour chacun, c'est alors précisément que la considération des « combinaisons » se révèle la plus fructueuse.

3. Un secours pour « faire de bons chants »

Pour commencer, il faut, par les vertus des grands nombres évoquées plus haut, réveiller les musiciens de leur sommeil dogmatique. Non, « tous les chants possibles n'ont pas été tous faits »; non, « les Compositeurs [...] n'ont pas encore employé toutes les espèces de mouvemens, & il en restera tousiours assez pour les exercer toute leur vie. »

Toute leur vie, certes, et des milliers et des milliers de vies ... Mais à trop vouloir stimuler les musiciens, ne leur donnera-t-on pas plutôt le vertige ? Ne reculeront-ils pas devant le labyrinthe des possibilités ? Qu'ils se souviennent alors que l'Arithméticien est toujours là qui peut les guider, et leur ménager quelques sûrs chemins: son rôle, en effet, ne s'arrête pas à calculer le nombre des « combinations » d'un ensemble donné de notes, et à circonscrire ainsi les limites du possible; sa tâche la plus féconde commence lorsqu'il écrit lui-même des listes méthodiques de chants, et met ainsi à la disposition des musiciens de véritables *répertoires où ils pourront puiser à leur gré*. Ainsi Mersenne dira-t-il à propos d'un tel répertoire, constitué par ses soins, l'« immense volume » que par des offres réitérées, il mettra à la disposition de qui voudra le consulter:

« Or l'une des utilitez que l'on peut tirer de ces varietez consiste en l'invention des differentes modulations, ou dans les idees que le compositeur conçoit en voyant plusieurs chants qu'il ne s'estoit

---

1. *Harmonie universelle*, II, *Livre Second des Chants*, p. 107.

iamais imaginez; car il n'importe qu'il ne les approuve pas en tous leurs intervalles, pourveu qu'il y rencontre quelque chose de particulier, dont il puisse tirer de la lumière pour l'employer aux differens suiets qu'il traicte, et dont il puisse enrichir ses inventions et ses fantaisies» [1].

Des chants « qu'il ne s'estoit iamais imaginez». Tel est le plus fructueux apport des « combinations»: un surplus d'imagination. En effet, « l'vne des grandes peines qu'ont les Compositeurs d'Airs, consiste à éuiter les redites, & a trouuer des Chants qui n'ayent pas encore esté faits» [2]; or, l'une des choses qui peuvent « aider à faire de bons Chants, & particulierement à les varier, & à fuir les redites, dépend de la consideration de tous les Chants possibles qui se peuuent faire dans l'estenduë des sons, des chordes, ou des notes que l'on se propose» [3]. Au fond, l'imagination individuelle, livrée à ses seules ressources, est bien courte; elle tâtonne et ne trouve que par rencontre; aussi a-t-elle tout à gagner si elle accepte de prendre appui sur des dénombrements méthodiques. Les musiciens habiles à user de ces derniers « pourront surmonter tous les autres Praticiens qui n'auront pas cette connaissance, quelque genie, ou bon naturel qu'ils puissent avoir, toutes et quantes fois qu'il sera question de varier tel chant que l'on voudra» [4].

Bref, ce sera la victoire de la méthode sur le génie. Et puisque la méthode donne tout pouvoir au musicien pour « enrichir ses inventions et fantaisies», on voit comment on pourrait dire que, pour Mersenne, l' « ars combinandi» ouvre naturellement la voie à l' « ars inveniendi».

D. PRINCIPES D'ORDINATION

1. Vers l'ordre lexicographique

Quant à l'ordonnancement interne de ces listes de permutations dont les intentions nous sont maintenant connues, tout semble dit si on précise que Mersenne a fini par suivre pour les établir, l'*ordre lexicographique*.

Rien en effet ne paraît plus « naturel». Pourtant l'exemple même de Mersenne montre que cet ordre peut n'être qu'imparfaitement maîtrisé, tant que les conditions n'en ont pas été codifiées jusque dans le détail. Ainsi la liste des 120 permutations de cinq sons que dresse Mersenne, dans *La vérité des sciences*, n'est pour ainsi parler, qu'à demi ordonnée. Voici en effet, comment il s'y est pris:

— Sa liste est divisée en 5 sections comportant chacune 24 chants : on trouve d'abord les 24 chants commençant par ut, puis ceux commençant respectivement par ré, mi, fa, sol. A l'intérieur de chacune de ces sections, Mersenne respecte également l'ordre alphabétique pour le choix de la seconde note des chants : ainsi, par exemple dans la troisième section, on aura les 6 chants ayant ut pour seconde note, puis ceux ayant respectivement pour seconde note : ré, fa, sol.

— Mais ensuite, pour ce qui est des trois autres notes, de chaque chant, *Mersenne ne suit apparemment aucun ordre déterminé.*

Plus curieusement, Mersenne se laisse aller à des écarts semblables, dans les *Harmonicorum Libri*, alors même qu'il venait de définir « l'ordre qu'il convient de tenir» en pareille circonstance. Il amorce ainsi sa liste:

Ut	ré	mi	fa	sol	la
Ut	ré	fa	mi	sol	la
Ut	ré	sol	mi	fa	la
Ut	ré	la	mi	fa	sol

1. *Manuscrit des chants de 8 notes*, fol. 347 r. *Cf.* ci-dessous, le début de notre appendice.

2. *Harmonie universelle*, II, *livre sixiesme de l'art de bien chanter*, p. 362.

3. *Ibid.* p. 363.

4. *Manuscrit des chants de 8 notes*, fol. 347 r. *Cf.* également une semblable promesse dans cette phrase des *Harmonicorum Libri* (VII, p. 125) où il s'agit de ce même genre de musiciens : « Quandoquidem apparebunt plurimi cantus, de quibus necdum cogitarunt, qui ad variandas cantilenas non parum conferunt ; aliosque propterea musurgos, quibus alioqui vel inferiores, aut ad summam aequales fuerint, longe superabunt. »

Il a dû se rendre compte de sa faute, au cours même de l'impression; il la signale en bas de page, en précisant qu'« il n'y a là aucune erreur, puisqu'aucun chant n'est répété deux fois», et que dans la suite de la liste, « l'ordre véritable sera respecté» [1].

Dans l'*Harmonie universelle*, il suit par contre, avec scrupule ce qu'il appelle lui-même une « méthode de combiner & de trouver toutes les varietez de chaque nombre de choses proposees» [2]. Méthode qu'il nous dit avoir exposée en deux lieux: « dans la 5 proposition du 7 livre Latin des Chants» *(Propositio* V du *Liber* VII des *Harmonicorum Libri)*, et par ailleurs, « dans le livre des varietez de l'Octave, qui fait 40 320 chants tous differens» (à savoir l'ouvrage dénommé par nous *Manuscrit des chants de 8 notes*).

Dans la *Propositio* V susmentionnée, Mersenne avait reproduit un livret sur l' « ars combinandi», dû à un certain Matan [2]. Usant d'un terme de Rhétorique, Matan définit avec justesse ce qu'il entend par une « combinatio» de lettres, de chiffres, de tous autres caractères, ou des choses elles-mêmes: «omnimoda per iteratas metatheses commixtio» [3]. Il va ensuite exposer selon quelles « opérations» on peut effectuer concrètement de telles « metatheses», de manière à donner, dans chaque cas des énumérations exhaustives.

Dans un mot, comme TU, les lettres sont comme des extrémités qui ne sont séparées par aucun milieu ; avec ces deux mêmes lettres, on ne pourra former qu'un autre mot distinct de TU, ce sera UT.

Considérons maintenant 3 lettres :

« Litterae tres combinari sexies valent, veluti sum, smu : usm, ums : msu, mus.

« Ista operatio praecedentem [4] supponit : nam vbi scripseris tres litteras, quales s, u, m. Primo duas litteras combina, quâ iam dictum methodo, & hinc primae duae voces fient, siue combinationes, quibus est subducenda linea [5]. Secundo, praepono secundam, u, adde primam s, posteaque tertiam m, tum commisce postremas, erunt nouae duae voces, & lineâ quidem sustinendae [6]. Tertio, ante alias appinge tertiam proximè priman, vltimó tertiam [7] & has compone duas simul, prodibunt vltimae duae combinationes » [8].

Cet ordre, ajoute Matan, est nécessaire. En effet, on peut trouver à la première place, ou s, ou u, ou m.

Si c'est s, on aura à la seconde place, ou u ou m

Si c'est u, on aura à la seconde place, ou s ou m

Si c'est m, on aura à la seconde place, ou s ou u.

Le texte précédent laisse clairement apparaître que Matan se propose d'exposer une méthode uniforme d'énumération. C'est ce que confirme la manière dont il traite en détail les cas de 4 lettres (exemple: A, M, O, R) et de 5 lettres (exemple: R, A, T, I, O) en donnant chaque fois la suite ordonnée de toutes les permutations possibles. Il cherche nettement à faire ressortir que lorsqu'on a n lettres, il faut se ramener au cas de (n — 1) lettres, puis à celui de (n — 1) lettres, etc., jusqu'à ce qu'on parvienne à l'opération élémentaire qui consiste à permuter deux lettres seulement.

---

1. « Notandum est autem 240 paginae præcedentis Cantus non eum ordinem sequi, qui tenendus est, quemque anteà præscripsimus, quanquam nullus est error, quandoquidem nullus cantus bis repetitur : hac autem paginâ, & sequente versus ordo seruabitur ; sed & notæ Practicæ sequentis propositionis præcedentem errorem corrigent, & singulos cantus in genuinum ordinem restituent » (*Harmonicorum Libri*, p. 121).

2. Dans les *Harmonicorum Libri*, l'auteur du livret n'était désigné, de façon assez mystérieuse, que par ses initiales : « Quod quidem præstabo tractatu sequente quem audio prodiisse absque alio quam ab his litteris I.M.D.M.I. designato nomine : quem cum manuscriptum ex impresso Trichetus [Pierre Trichet, avocat au Parlement de Bordeaux], vir in optimis litteraris et libris versatissimus, ad me transmiserit, hîc insero ne pereat iterum » (p. 118). Il a échappé aux éditeurs des *Œuvres* de Pascal (Ed. Léon Brunschvicg et Pierre Boutroux, Paris, 1908), t. 3, pp. 442-443, et à ceux de la *Correspondance* de Mersenne, t. 5, p. 139, que Mersenne lui-même avait pris soin de donner la clef de l'énigme : cette clef était cachée dans un court erratum (portant sur le passage cité ci-dessus) perdu dans les *Reflexiones physico-mathematicae* (*Animadversiones utilissimae in XII. Harmonicorum Libris maiores, & in minores Hydraulicis Phaenomenis subiunctos*, p. 168) : « iam nuper didici ab ipso auctore nomen illius esse Ioannem Matan, virum pietate, ac scientiâ ornatissimum». De toute manière, la remarque suivante de F. N. David (*Games, gods and gambling*, London, Charles Griffin, 1962, p. 81), à propos de l'interprétation des lettres I.M.D.M.I., ne semble due qu'à une confusion avec le problème d'identification posé par la mention M..., qu'on trouve dans une lettre de Pascal à Fermat du 29 juillet 1654 (Pascal, *op. cit.*, p. 388) : « it has been suggested that M.D.M. stand for Monsieur de Méré, but this is unlikely ».

3. Mersenne, *Harmonicorum Libri*, VII, p. 118.

4. A savoir l'opération portant sur deux lettres.

5. Matan avait dû disposer les différentes permutations selon une liste verticale, en les plaçant les unes sous les autres, et en séparant par une ligne horizontale les permutations commençant par la même lettre.

6. Même remarque.

7. Il faudrait ici « secundam » et non « tertiam ».

8. *Op. cit.*, *ibid.*

Que Mersenne ait pris ou non directement dans ces remarques une leçon de méthode, toujours est-il qu'il a approfondi le procédé ainsi défini par des réflexions personnelles. Pour mieux cerner l'originalité de celles-ci, invoquons au préalable le témoignage de deux contemporains de Mersenne.

2. Une remarque de Descartes sur les anagrammes

Comment rechercher la meilleure anagramme qu'on peut faire à partir des permutations *(transpositiones)* des lettres d'un nom donné ? Tel est l'exercice (tout à fait analogue à la recherche du plus beau des chants parmi les chants d'un nombre de notes donné), qu'évoque Descartes dans la Regula VII des *Regulae ad directionem ingenii.* Bien que la vaste entreprise cartésienne et le propos limité de Mersenne ne puissent évidemment être mis sur le même plan, la comparaison méritait d'être faite pour la lumière qu'elle jette sur deux attitudes très différentes à l'égard des dénombrements méthodiques.

Descartes mentionne les anagrammes comme exemple des cas (de moindre importance au point de vue philosophique et scientifique) où on n'a plus à se soucier des distinctions entre « absolu» et « relatif», « facile» et « difficile», distinctions capitales qui commandent la méthode dont il vient d'illustrer les préceptes. Ayant dit ce que devait être l' « énumération», il précise que l'*ordre* d'énumération des choses peut d'ordinaire varier et dépend de l'arbitre de chacun. Après quoi, il ajoute la remarque suivante:

« Parmi les activités plutôt futiles auxquelles s'amusent les hommes, il en est aussi beaucoup dont toute la méthode de résolution tient dans l'établissement de cet ordre: par exemple, si l'on veut faire la meilleure anagramme en transposant les lettres d'un mot quelconque [« ex litterarum alicujus nominis transpositione»], il n'est pas nécessaire de s'élever du plus facile au plus difficile, ni de distinguer l'absolu du relatif, car ce n'est pas le lieu de faire tout cela; il suffira de se proposer, pour examiner les transpositions [« transpositiones»] de lettres, un ordre tel que les mêmes combinaisons ne se présentent jamais deux fois [« ut nunquam bis eaedem percurrantur»], et que leur nombre soit par exemple réparti en un certain nombre de classes, de telle manière que sautent aussitôt aux yeux celles dans lesquelles il y a le plus d'espoir de trouver ce que l'on cherche; de cette manière en effet, le travail ne sera souvent pas bien long, il ne sera que puéril [« sed tantum puerilis labor»]» [1].

S'ajoutant aux multiples limitations qu'a imposées le « modèle géométrique» à l'algèbre cartésienne, « c'est encore le géométrisme qui fait manquer à cette algèbre une autre voie de généralisation, à savoir la combinatoire qui est d'essence arithmétique» [2]; bien que, comme le montre sa règle des signes, Descartes eût été capable d'aborder et de faire progresser la combinatoire, sa première réflexion, lorsqu'il y touche dans les *Regulae*, « est nettement hostile aux recherches d'un art combinatoire. N'apercevant pas comment les combinaisons peuvent se précéder naturellement les unes les autres, Descartes n'y rencontre qu'un ordre arbitraire qui, quoique susceptible d'investigation méthodique, ne permet pas de distinguer entre absolu et relatif. Une telle investigation garde donc quelque chose de puéril quand elle s'applique à des lettres ou à des chiffres» [3].

En toute rigueur, Descartes n'a pas tort de penser qu'il n'existe pas un ordre vraiment « naturel» selon lequel les permutations des lettres du nom donné [« transpositiones»] se précéderaient et se suivraient les unes les autres; l'ordre lexicographique lui-même n'est qu'un des ordres possibles; on peut par ailleurs choisir à sa fantaisie la permutation que l'on considère comme la première de la liste; n'oublions pas enfin que Descartes songe à la recherche de la *meilleure* anagramme possible: il y aura

1. Traduction des *Regulae* par Jacques Brunschwig (Descartes, *Œuvres philosophiques*, éd. par F. Alquié, Paris, Garnier, t. 1, 1963, pp. 113-114).

2. Y. Belaval, *Leibniz critique de Descartes*, Paris, Gallimard, 1960, p. 289.

3. *Ibid.* pp. 289-290.

dans le parcours des permutations des embranchements qu'on jugera, d'un coup d'œil, sans intérêt. La présence de l'arbitraire fait-elle disparaître toute possibilité d'« ordre» en la matière ? Tout au contraire. Comme précisément cet arbitraire fait qu'aucun partage ne distingue ici ce qui est « absolu» et ce qui est « relatif», tous les préceptes se réduisent à l'obligation de respecter *un* ordre: « toute la méthode consiste à établir cet ordre»; puisqu'on n'a pas à répartir les objets considérés selon la hiérarchie du « plus facile» et du « plus difficile», puisqu'ils se présentent en quelque sorte sur le même plan, la méthode revient à suivre un chemin tout uni. Il y a bien une nuance péjorative dans l'expression « puerilis labor»: mais elle n'est pas, selon nous, dans la condamnation que porterait Descartes contre de futiles « puérilités»; Descartes ne rejette pas comme sans intérêt de tels exercices combinatoires, il en souligne la *facilité*; la méthode pour les résoudre est si aisée qu'*un enfant même* peut la suivre sans mal.

Que Descartes ait bien fait leur place aux domaines où tout revient à effectuer de tels dénombrements méthodiques, nous en trouvons également témoignage dans le célèbre passage de la Règle X où il nous convie à tirer exemple des artisans qui tissent des toiles et des tapis, et de ces femmes qui brodent à l'aiguille, ou tricotent des fils pour en faire des tissus de structures infiniment variées. Ce qui nous est dit ici de ces exercices pourrait parfaitement s'appliquer à l'énumération des anagrammes d'un même mot:

« Comme en effet rien n'y reste caché, et qu'ils s'ajustent parfaitement à la capacité de la connaissance humaine, ils nous présentent de la façon la plus distincte des types d'ordre en nombre infini, tous différents les uns des autres, et cependant tous réguliers; or c'est à les observer minutieusement que se réduit presque toute la sagacité humaine.

«C'est pourquoi nous avons prévenu qu'il fallait étudier ces problèmes avec méthode; et la méthode, dans ces questions d'assez peu d'importance, n'est le plus souvent rien d'autre que l'observation scrupuleuse d'un ordre, que cet ordre existe dans la chose même, ou bien qu'on l'ait ingénieusement introduit par la pensée» [1].

Toutefois ces exercices ne sont qu'exercices: ils cultivent l'esprit, mais à condition que chacun aille seul à leur découverte [2]; ils ne s'organisent pas en une discipline mathématique. Descartes s'est laissé abuser ici par la facilité des petits problèmes auxquels il songeait; il a négligé le fait que les dénombrements méthodiques exigent très vite, lorsque le nombre des objets augmente, le secours de l'analyse combinatoire; aussi n'a-t-il pas considéré qu'il convenait d'en codifier de plus près les règles [3]. Sans doute aussi son anti-arithmétisme l'a-t-il détourné d'exemples où intervenaient de plus grands nombres, et ne lui a pas permis de croire l'arithmétique capable de maîtriser les différents types de variétés possibles, et d'ouvrir la voie à une science de l'ordre en tant qu'ordre.

Travail aisé qu'on pourrait confier à un enfant ? Mersenne doute au contraire que le Musicien, le Praticien soient capables de l'accomplir sans faute. Respect d'un ordre, mais d'un ordre arbitraire ? Mersenne va montrer, lui, qu'on peut rapporter l'énumération considérée à « l'ordre naturel» des nombres.

« Votre conseil est bon, aurait pu dire Mersenne à Descartes, mais qu'est un précepte sans des critères palpables ?»

---

1. *Regulae...*, trad. cit. ci-dessus, p. 127.

2. « C'est merveille comme tous ces exercices développent l'esprit, pourvu seulement que nous n'en recevions pas d'autrui la solution, mais que nous la trouvions nous-mêmes » *(ibid.)*.

3. Ce que lui reproche Leibniz pour qui les deux derniers préceptes du *Discours de la méthode* ne sauraient effectivement s'appliquer sans utiliser l'art combinatoire (*cf.* Y. Belaval, *op. cit.*, pp. 196-198).

3. Énumérations récréatives du Père Dobert

Pour mieux situer l'ordre que Mersenne jugera « naturel », évoquons tout d'abord d'autres méthodes de rangement. Pour illustrer celles-ci, rien ne nous paraît mieux convenir qu'un ouvrage fort curieux, aussi peu connu que sont célèbres les *Regulae* de Descartes, et dont l'auteur est non seulement un contemporain de Mersenne, mais, comme lui, Père Minime: les *Recreations literales et mysterieuses* [1] du Père Antoine Dobert. S'exerçant à ce qu'il appelle joliment l' « anatomie anagrammatique » des mots, il s'intéresse, non seulement au nombre des anagrammes possibles, mais surtout aux différentes manières de « changer les lettres ».

Avec deux voyelles A et E, on aura deux changements.

« Dans ces deux changements par le moyen de l'I vous en ferez six, le logeant en trois divers endroits, à savoir au commencement, au milieu, & à la fin de AE et de EA, qui seront trois fois deux, et par conséquent six : parmi lesquels si vous venez à faire rouler l'O, l'arrêtant par tout où il peut loger, comme cette pause se pourra faire quatre fois en chacun, à savoir au commencement une fois, à la fin une fois, & deux fois au milieu, vous en ferez quatre fois six, ou six fois quatre qui feront 24 sur lesquels par le moyen de l'U vous en ferez six vingt, et pour vous faire voir avec plus de satisfaction la pratique de cette théorie, je veux accompagner les Voyelles de la première des Consonantes, d'une manière qui babillera de soi-même, sans qu'il soit besoin d'en interrompre l'ordre, ou entrecouper la suite pour y entremêler aucun avertissement » [2].

Ba	Be		
Be	Ba		
	BI		
Bi	ba	be	
ba	bi	be	
ba	be	bi	
Bi	be	be	
be	bi	ba	
be	ba	bi	
	BO		
Bo	bi	ba	be
bi	bo	ba	be
....			

« Voilà la gradation des changements, selon laquelle par les moindres on entre dans les plus grands avec assurance de n'en manquer aucun, et c'est le grand chemin des transpositions facile à tenir, et bien assuré.

« Toutefois, comme l'assurance des grands chemins, quoique battus et faciles, est accompagnée de longueur, ceux qui en sont ennuyés sont bien aises de savoir des voies plus courtes, que l'on appelle *dressiéres*, pour arriver plus tôt là où ils prétendent. Que si vous en désirez une pour le sujet que nous traitons, et savoir la manière de changer d'abord cinq lettres en leurs six vingt façons diverses, sans passer par les changements de trois et de quatre ; vous avez un point à observer, qui est de mettre par ensemble tous les changements, qui peuvent commencer par *a* ou *ba*, prenant garde de les ranger régulièrement, & observer l'ordre des Voyelles » [3].

Cette nouvelle énumération commencera ainsi :

Ba	be	bi	bo	bu
ba	be	bi	bu	bo
ba	be	bo	bi	bu
....				

« Cet ordre comme vous voyez est tout différent du précédent, et vous le pouvez encore changer : car au lieu que j'ai mis ensemble tous les changements qui commencent de même façon, vous pouvez au contraire loger ensemble tous ceux qui finissent de même manière, ou bien accoupler de deux à deux ceux qui sont opposés diamétralement comme *ba be bi bo bu*, et *bu bo bi be ba*, ou bien encore faire suivre le *ba be bi* du haut à bas en commençant ou en finissant comme ceci :

Ba	be	bi	bo	bu	Bu	bo	be	bi	ba
ba	ba	bi	bo	bu	bu	bo	bi	ba	be
bi	ba	be	bo	bu	bu	bo	ba	be	bi
bo	ba	be	bo	bu	bu	ba	be	bi	bo
bu	ba	be	bi	bo	ba	be	bi	bo	bu

1. *Recreations literales et mysterieuses: ou sont curieusement estalez les Principes & l'importance de la nouvelle Orthographe: avec un acheminement à la connoissance de la Poësie, & des Anagrames*, Lyon, François de Masso, 1650. L'ouvrage avait connu déjà une première édition, où l'auteur n'était désigné que comme *Ecclesiastique Dauphinois.* Dobert mourut avant que fut achevée l'impression de la seconde édition. Il ne semble pas que, pour les textes que nous allons citer, il se soit inspiré de Mersenne. Signalons cependant que ce dernier est nommé à un autre propos: « Le savamment universel Mersenne des nôtres, en ses doctes Commentaires sur le premier livre des sacrés cayers, anime les lettres d'un autre esprit » (p. 165).

2. *Ibid.*, pp. 283-284.

3. *Ibid.*, p. 287.

«Plusieurs autres ordres, s'y peuvent observer ayant une fois le résultat des changements, mais le vrai moyen de l'avoir est celui que j'ai observé tant pour le grand chemin que pour les sentiers : et le plus régulier que tous n'observent pas, car les uns se plaisent à commencer par le *ba bi* qu'ils aiment tant, & finir par le *bi be*, d'autres aiment mieux le *bi bo*, pour après venir au *ba bi* plus gaillardement, si ce n'est que l'excès les en empêche, les logeant dedans l'é *bo bi*, qui leur fait *ba bo* faute de tempérance »[1].

Pour « découvrir les transpositions de six », on prendra les six notes de Musique, dont l'énumération commence ainsi :

Ut	re	mi	fa	sol	la
ré	ut	mi	fa	sol	la
ré	mi	ut	fa	sol	la
ré	mi	fa	ut	sol	la
ré	mi	fa	sol	ut	la
ré	mi	fa	sol	la	ut
Ut	ré	mi	fa	la	sol
ré	ut	mi	fa	la	sol

....

« Cet ordre pour être différent de ceux des Voyelles n'en est pas moins régulier, puisqu'il tient des deux, à savoir du grand chemin, et de la dressière : du premier, en ce que la note *ut* va roulant de biais de six en six changements, de même que *Bu* parmi les Voyelles de cinq en cinq ; et du second, en ce que pour le faire courir de la sorte sans passer par trois ni par quatre, j'ai seulement changé *ré mi fa sol la* de même que les cinq Voyelles, assemblant de 24 en 24 les changements qui commencent de même façon. Je pouvais tout d'une venue vous donner tous les *ut* ensemble, tous les *ré*, tous les *sol*, et ainsi des autres de six vingt en six vingt, puisque chacune des six notes, en commence tout autant, mais j'ai été bien aise de diversifier » [2].

Enfin, « une diversité bien divertissante serait de disposer les susdits changements de telle sorte que les six notes se suivissent toujours du haut à bas de part & d'autre, d'une manière diamétralement opposée comme ceci :

ut	ré	mi	fa	sol	la
ré	ut	mi	fa	la	sol
mi	ut	ré	la	sol	fa
fa	ut	ré	la	sol	mi
sol	ut	fa	mi	la	ré
la	sol	fa	mi	ré	ut

« Cette méthode serait bien agréable, mais comme l'on ne le peut continuer jusques à la fin, & ne peut durer que durant ces vingt et quatre changements, cela ma dégoûté de vous la commencer autrement que par l'exemple que je vous en donne » [3].

E. NUMÉROTATION DES PERMUTATIONS

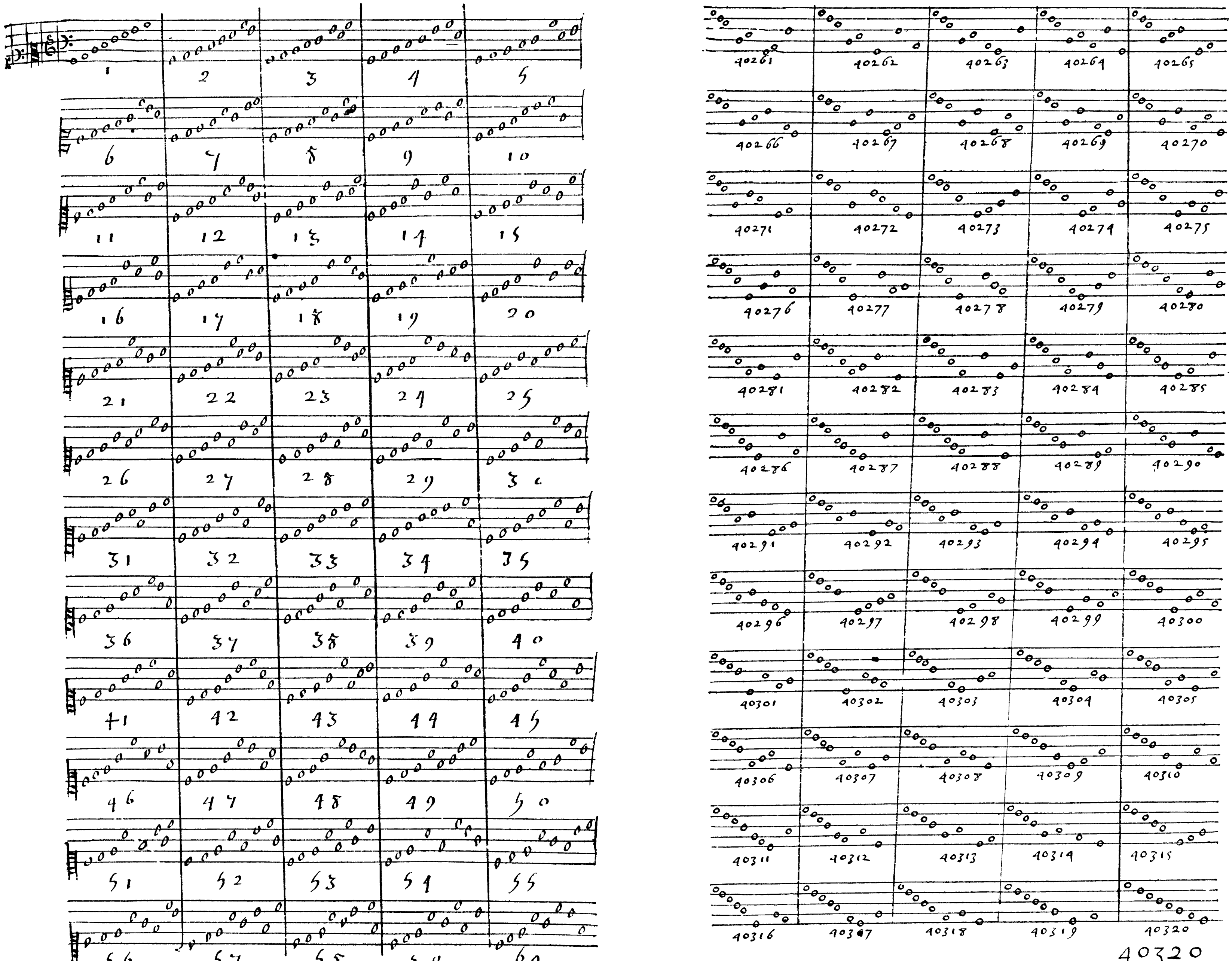
Mersenne ne s'est pas contenté — comme d'autres avant lui — de privilégier l'ordre lexicographique pour tabuler des permutations. Il s'est attaqué — le premier à notre connaissance — à une question arithmétique un peu plus complexe. Considérons la liste, établie selon l'ordre lexicographique, des $n!$ mots obtenus par permutation de n lettres données; en prenant les mots dans l'ordre où on les trouve ainsi rangés, on leur assigne les numéros « 1 », « 2 », ..., « $n!$ ». Une première question se pose alors: *soit un mot déterminé, comment calculer directement son numéro ?* La réponse demande réflexion; mais l'interrogation avait pu être suggérée à Mersenne par l'habitude qu'il avait prise, lorsqu'il transcrivait une suite de permutations, d'indiquer au-dessus de chacune d'elles son numéro.

Par contre, la seconde question relève sans doute bien plus d'un souci théorique que pratique; elle est d'un mathématicien qui, ayant traité d'une difficulté, pose l'interrogation inverse: *un numéro étant donné, comment déterminer le mot auquel il correspond ?*

Nous nous proposons d'analyser ci-dessous les *Propositions* du *Manuscrit des chants de 8 notes* (dont on trouvera le texte retranscrit dans l'*Appendice*) où Mersenne a posé et résolu ces deux problèmes.

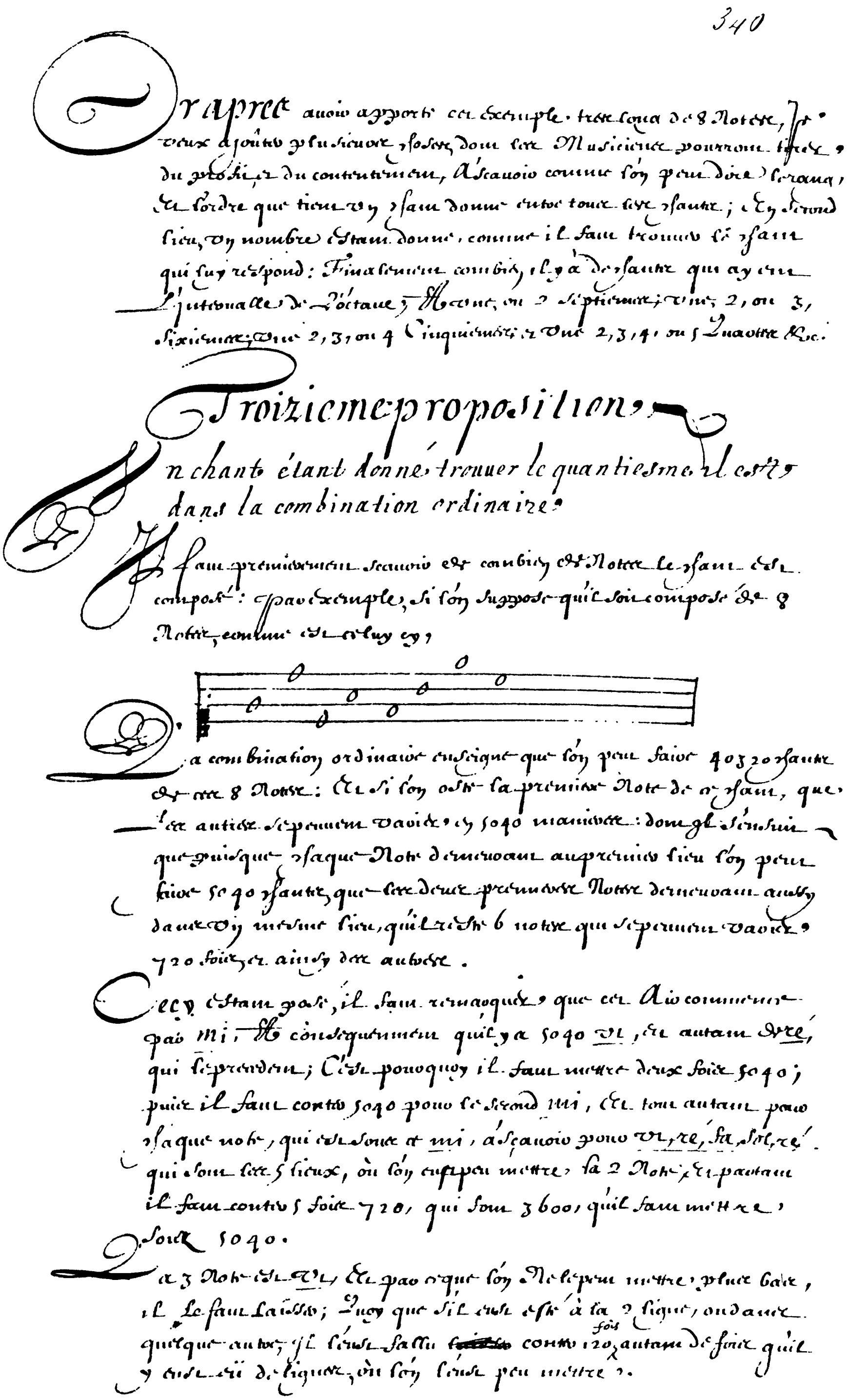
---

1. *Ibid.* pp. 289-290.
2. *Ibid.* p. 304.
3. *Ibid.* pp. 304-305.



Première et dernière pages de l'énumération des 40 320 chants de huit notes.

(Bibl. nat. Paris)


340

Apres avoir apporté cet exemple tiré de 8 Notes, je veux adjouster plusieurs choses dont les Musiciens pourront tirer du profit, et du contentement, à sçavoir comme l'on peut dire l'ordre que tient un chant donné entre tous les chants ; et en second lieu, un nombre estant donné, comme il faut trouver le chant qui luy respond : Finalement combien il y a de chants qui ayent l'intervalle de l'octave, ou 2 septiemes, une, 2, ou 3, sixiemes, une 2, 3, ou 4 cinquiesmes, et une 2, 3, 4, ou 5 quartes &c.

Troiziesme proposition.

Un chant étant donné trouver le quantiesme il est dans la combination ordinaire.

Il faut premierement sçavoir de combien de Notes le chant est composé : par exemple, si l'on suppose qu'il soit composé de 8 Notes, comme est celuy cy,

La combination ordinaire enseigne que l'on peut faire 40320 chants de ces 8 Notes : et si l'on oste la premiere Note de ce chant, que les autres se peuvent varier en 5040 manieres : dont il s'ensuit que puisque chaque Note demeurant au premier lieu l'on peut faire 5040 chants, que les deux premieres Notes demeurant aussi dans un mesme lieu, que les 6 notes qui se peuvent varier 720 fois, et ainsy des autres.

Cecy estant posé, il faut remarquer que cet Air commence par mi, et consequemment qu'il y a 5040 ut, et autant de re, qui le precedent ; c'est pourquoy il faut mettre deux fois 5040 ; puis il faut contir 5040 pour le second mi, et tout autant pour chaque note qui est devant ce mi, à sçavoir pour ut, re, fa, sol, re, qui sont les 5 lieux, où l'on eust peu mettre la 2 Note, et partant il faut contir 5 fois 720, qui font 3600, qu'il faut mettre sous 5040.

La 3 Note est ut, et parce que l'on ne le peut mettre plus bas, il le faut laisser ; Mais que s'il eust esté à la 2 figure, ou dans quelqu'autre, il l'eust fallu contir 120 fois autant de fois qu'il y eust eu de figures, où l'on l'eust peu mettre.

(Bibl. nat. Paris)

1. Analyse préalable d'un exemple

Afin d'éclairer le processus utilisé par Mersenne, et de préparer en même temps, le commentaire d'un texte passablement embarrassé, considérons tout d'abord l'exemple suivant.

Soient les 8 lettres *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, prises dans l'ordre alphabétique; supposons établie selon l'*ordre lexicographique* la liste de tous les mots obtenus par permutation de ces 8 lettres; à chaque mot est ainsi assigné un numéro compris entre 1 et 40 320.

Soit le mot *CGADBEHF : quel est son numéro ?*

Pour déterminer ce numéro, il suffit de dénombrer tous les mots qui précèdent le mot donné $\mathscr{M}$ dans la liste: le dénombrement se fera simplement en considérant lettre après lettre toutes les lettres du mot $\mathscr{M}$.

Mots qui précèdent CGADBEHF

— Mots qui précèdent ceux commençant par *C*:	$2 \times 7!$
— Parmi les mots commençant par *C*, ceux qui précèdent les mots commençant par *CG*:	$5 \times 6!$
— Parmi les mots commençant par *CG*, ceux qui précèdent les mots commençant par *CGA* :	$0 \times 5!$
— Parmi les mots commençant par *CGA*, ceux qui précèdent les mots commençant par *CGAD* :	$1 \times 4!$
— Parmi les mots commençant par *CGAD*, ceux qui précèdent les mots commençant par *CGADB* :	$1 \times 3!$
— Parmi les mots commençant par *CGADB*, ceux qui précèdent les mots commençant par *CGADBE* :	$1 \times 2!$
— Parmi les mots commençant par *CGADBE*, ceux qui précèdent les mots commençant par *CGADBEH* :	$1 \times 1!$

Le numéro de CGADBEHF sera donc :

$$(2 \times 7!) + (5 \times 6!) + (0 \times 5!) + (1 \times 4!) + (0 \times 3!) + (0 \times 2!) + (1 \times 1!) + 1 = 13\,705.$$

Les coefficients respectifs de $7!$, $6!$, ..., $1!$, sont obtenus simplement à partir de ce que nous appellerons le *rang relatif* de chacune des lettres du mot $\mathscr{M}$: à savoir son rang par rapport aux lettres qui la suivent dans le mot $\mathscr{M}$.

Ainsi, le rang relatif de *D* est 2, et pour obtenir le coefficient de $4!$, on retranche une unité de 2.

Règle générale

Soient n lettres ordonnées alphabétiquement; supposons ordonnés selon l'ordre lexicographique tous les mots obtenus par permutation de ces n lettres.

Soit le mot $\mathscr{M}$: $a_1\, a_2 \ldots a_n$.

A a_i on fait correspondre α_i qui est son rang relatif (rang parmi les lettres $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n$).

Le numéro $\mathscr{N}$ du mot $\mathscr{M}$ sera égal à:

$$(\alpha_1 - 1)\,(n - 1)! + \ldots + (\alpha_i - 1)\,(n - i)! + \ldots + (\alpha_{n-1} - 1)\; 1! + 1$$

Cas particuliers

Supposons que, dans $\mathscr{M}$, les lettres qui suivent a_p :

— Se succèdent selon l'ordre alphabétique: parmi les mots qui commencent par $a_1 \ldots a_p$, il n'en est aucun qui précède $\mathscr{M}$:

$$\mathscr{N} = [(\alpha_1 - 1)\,(n - 1)! + \ldots + (\alpha_p - 1)\,(n - p)!] + 1.$$

— Se succèdent selon l'ordre inverse de l'ordre alphabétique: $\mathscr{M}$ est le dernier mot de la sous-section composée des mots commençant par: $a_1 \ldots a_p$; ces mots sont au nombre de $(n - p)!$:

$$\begin{aligned} \mathscr{N} &= (\alpha_1 - 1)(n - 1)! + \ldots + (\alpha_p - 1)(n - p)! + (n - p)! \\ &= (\alpha_1 - 1)(n - 1)! + \ldots + (\alpha_{p-1} - 1)(n - p + 1)!] + \alpha_p \,.\, (n - p)! \end{aligned}$$

2. Un chant étant donné, déterminer son numéro

Nous sommes maintenant en mesure d'entreprendre l'étude d'un exemple donné par Mersenne. La notation musicale qui donne un même nom à des notes différentes n'étant pas pour faciliter la compréhension d'un texte déjà bien embrouillé, nous allons tout d'abord établir une table de correspondance entre lettres et notes (nous affectons d'un indice les notes qui ont un même nom, mais sont distinctes):

A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
ut	ré_1	mi_1	fa_1	sol	ré_2	mi_2	fa_2

Le chant donné dont il s'agira de trouver le numéro est:

mi_1	mi_2	ut	fa_1	ré_1	sol	fa_2	ré_2
C	*G*	*A*	*D*	*B*	*E*	*H*	*F*

On remarquera que, dans notre transcription, il s'agit précisément du mot qu'à dessein nous avons pris plus haut comme exemple.

Mersenne, qui parle de notes inscrites sur des portées, et qui les ordonne selon l'ordre ascendant, exprimera la situation respective de deux d'entre elles, en disant que l'une est « en un plus bas lieu» que l'autre. Supposant dressée la liste complète de tous les chants de 8 notes, il va examiner note à note le chant donné, en s'interrogeant sur les chants qui le précèdent dans cette liste: devant chacune de ses notes, il se demandera *quelles notes plus basses on aurait pu mettre à sa place* (ces notes plus basses étant seulement celles qui n'ont pas encore été utilisées dans le chant donné); il détermine donc ainsi le rang relatif de chaque note.

« Cecy estant posé, il faut remarquer que cet Air commence par mi_1 [C], et consequemment qu'il y a 5 040 ut [A] et autant de ré_1 [B] qui le précédent ; c'est pourquoy il faut mettre deux fois 5 040. »

La 2e note est mi_2 [G]. « Ut, ré_1, fa_1, sol, ré_2 [A, B, D, E, F] sont les 5 lieux, où l'on peut mettre la seconde note, et partant il faut conter 5 fois 720, qui sont 3 600, qu'il faut mettre sous 5 040 ».

« La 3e note est ut [A], et parce que l'on ne le peut mettre plus bas, il faut le laisser ; quoy que s'il eust été à la 2 ligne, ou dans quelque autre, il l'eust fallu conter 120 fois, autant de fois qu'il y eust eü de lignes, où l'on eust peu mettre » [Autrement dit, il faut prendre ici : $0 \times 5!$].

La 4e note est fa_1 [D], « et parce qu'au lieu dudict fa l'on eust peu mettre la dite 4 note au ré_2 [B], il faut conter 24 pour le dit lieu, [c'est à dire : $1 \times 4!$] qu'il faut mettre souz 3 600. »

La 5e note est ré_1 [B] « qu'il faut obmettre, parce qu'elle ne peut estre mise plus bas ; et sy l'on l'eust peu faire, il eust fallu conter 6, autant de fois » [Il faut donc prendre ici : $0 \times 3!$].

La 6e note est sol [E], « qui ne peut aussy estre mise plus bas, et si l'on l'eust peu faire, l'on l'eust conté 2 » [Il faut donc prendre ici : $0 \times 2!$].

« Les 2 autres notes sont fa_2 [H], ré_2 [F] : Et parce que l'on eust peu mettre ré_2 [F] fa_2 [H], il faut conter 2, à scavoir un pour ré_2, fa_2, et un pour fa_2, ré_2. »

« Or si l'on assemble tous ces nombres, l'on trouvera que le chant proposé est le 13 706 chant des 40 320 qui se peuvent faire de 8 notes. »

On a donc :

$$(2 \times 7!) + (5 \times 6!) + (0 \times 5!) + (1 \times 4!) + (0 \times 3!) + (0 \times 2!) + 2 = 13\,706$$

Mersenne décrit ainsi minutieusement les étapes d'un calcul dont notre retranscription a rendu manifestes le bien-fondé et les motivations, mais il n'en formule pas le principe conducteur. Toutefois, désireux de montrer qu'il met bien en œuvre une Règle, et que cette Règle est générale (« affin que la Reigle soit generale»), il donne un autre exemple, concernant cette fois les « chants de 10 notes», et à ce propos, il esquisse, bien allusivement il est vrai, une formulation condensée:

« Et parce que la première note de ce chant est au 4 lieu, il faut multiplier la combination de 9, qui est 362 880, par 3, car *il faut tousjours multiplier par un moins que le nombre de la note*, si ce n'est lors que tout le reste des notes va de suite de haut en bas».

« Car il faut tousjours multiplier par un moins que le nombre de la note»: entendons qu'il faut ôter une unité à ce que nous avons appelé le rang relatif de la note.

« Si ce n'est [...] en bas»: il s'agit du *second cas particulier* que nous avons relevé plus haut pour notre compte; précisément dans l'exemple du « chant de 10 notes», Mersenne a l'occasion de tirer profit de cette simplification de la procédure générale; après avoir calculé les coefficients de $9!$, $8!$, ..., $4!$, il déclare, lorsqu'il en vient à la 7ᵉ note dont le rang relatif est 2: « et parce que les 3 qui suivent vont de suite de haut en bas, il faut seulement multiplier 6 par 2, pour avoir 12».

3. Un numéro étant donné, déterminer le chant auquel il correspond [1]

Un nombre étant donné, trouver le chant auquel il respond entre tous les chants qui se peuvent faire d'un nombre donné de notes.

« Cette proposition est l'inverse de la précédente.» Encore faut-il préciser les conditions du problème. La procédure définie au paragraphe 1 permet de construire une infinité de listes numérotées, celles des permutations de 1, 2, 3, ..., n, ... notes. Si maintenant je considère un nombre p comme un numéro de chant, je dois préciser de plus les listes de chants que je prends en considération; si je me limite à *la liste des chants de n notes*, p ne pourra être le numéro d'un chant appartenant à cette liste que si:

$$p \leqslant n!$$

« Cette proposition est l'inverse de la precedente, c'est pourquoy l'on peut trouver le chant qui respond au nombre donné, pourveu qu'il ne soit pas plus grand que le nombre entier de la combination [n!]; par exemple pourveu qu'il ne surpasse pas 40 320 [8!] pour la combination de 8 notes, ou 3 628 800 [10!] pour celle de 10 notes.»

Exemple 1

« Je suppose donc maintenant que l'on veuille sçavoir le chant de 8 notes, qui respond à 2 166, c'est à dire le deux mille cent soixante et sixieme chant des 40 320 que l'on peut faire de 8 notes.»

Mersenne va procéder à une série de *divisions successives* par $7!$, $6!$, ..., dont nous allons noter dans son texte les différentes étapes, et que nous schématiserons ensuite dans un tableau, en reprenant les notations et le vocabulaire que nous avons utilisés plus haut.

— « Or il faut prendre la combination de 7 choses, à scavoir 5 040 par laquelle il faut diviser 2 166 : mais parce que cette division ne se peut faire », il faut « mettre la premiere note au lieu le plus bas » : la division étant impossible, le rang relatif de la note est 1 ; son rang absolu est également 1.

— Il faut maintenant diviser 2 166 « par la combination de 6, qui est 720, ... le quotient est 3, le reste 6. C'est pourquoy il faut mettre la 2 note 4 rangs plus haut que la premiere, c'est à dire au 5 lieu et laisser trois rangs entre les 2 ». Le quotient étant 3, le rang relatif de la deuxième note est : $3 + 1 = 4$; et puisqu'on a déjà mis en place la première note, son rang absolu est : 5.

— « Il faudroit encore diviser le reste, à scavoir 6 par 120, puis par 24. » Ces divisions ne sont pas possibles : par conséquent le rang relatif de la 3ᵉ note sera 1, son rang absolu sera 2 ; de même le rang relatif de la 4ᵉ note sera 1, son rang absolu sera 3.

1. Proposition 6.

— Il faut finalement diviser le reste 6 par 6 : « la division estant faite par 6, il ne reste rien », on met la 5[e] note au plus bas lieu qui soit possible : son rang relatif est 1, son rang absolu est 4.

« Et pour les 6 qui restent de la division ie mets les 3 dernieres notes de haut en bas, d'autant que ces 3 notes ne se peuvent changer que de 6 façons : Et consequemment la 6 note sera au B, et dernier lieu, la 7 au 7, et la 8 ou derniere au 6 lieu. »

Premier exemple

Divisions successives	Résultats	Rang relatif	Rang absolu	
2 166 : 7 !	impossible	$\alpha_1 = 1$	1	*A*
2 166 : 6 !	$q_2 = 3$ $r_1 = 6$	$\alpha_2 = q_2 + 1$ $= 4$	5	*E*
6 : 5 !	impossible	$\alpha_3 = 1$	2	*B*
6 : 4 !	impossible	$\alpha_4 = 1$	3	*C*
6 : 3 !	$q_5 = 1$ $r_5 = 0$	$\alpha_5 = q_5 = 1$	4	*D*
Les notes restantes sont dans l'ordre inverse de l'ordre naturel			8 7 6	*H* *G* *F*

Vérification :

$$\begin{array}{cccccc} A & E & B & C & D & \underline{H \quad G \quad F} \\ \alpha_1 = 1 & \alpha_2 = 4 & \alpha_3 = 1 & \alpha_4 = 1 & \alpha_5 = 1 & \text{ordre naturel inversé} \end{array}$$

$$(0 \times 7\,!) + (3 \times 6\,!) + (0 \times 5\,!) + (0 \times 4\,!) + (1 + 3\,!)$$
$$= 2\,160 + 6 = 2\,166.$$

Second exemple

(Mersenne cherche parmi les chants de 10 notes, le chant qui a pour numéro 1 203 481.)

Divisions successives	Résultats	Rang relatif	Rang absolu	
1 203 481 : 9 !	$q_1 = 3$ $r_1 = 114\,841$	$\alpha_1 = 4$	4	*D*
114 841 : 8 !	$q_2 = 2$ $r_2 = 34\,201$	$\alpha_2 = 3$	3	*C*
34 201 : 7 !	$q_3 = 6$ $r_3 = 3\,961$	$\alpha_3 = 7$	9	*I*
3 961 : 6 !	$q_4 = 5$ $r_4 = 361$	$\alpha_4 = 6$	8	*H*
361 : 5 !	$q_5 = 3$ $r_5 = 1$	$\alpha_5 = 4$	6	*F*
Les autres notes se succèdent selon l'ordre naturel			1 2 5 7 10	*A* *B* *E* *G* *J*

Vérification:

$$\begin{array}{cccccc} D & C & I & H & F & \underline{A\ B\ E\ G\ J} \\ \alpha_1 = 4 & \alpha_2 = 3 & \alpha_3 = 7 & \alpha_4 = 6 & \alpha_5 = 4 & \text{ordre naturel} \end{array}$$

$$(3 \times 9!) + (2 \times 8!) + (6 \times 7!) + (5 \times 6!) + (3 \times 5!) + 1$$
$$= 1\,088\,640 + 80\,640 + 30\,240 + 3\,600 + 360 + 1 = 1\,203\,481.$$

4. Une méthode « naturelle » d'énumération [1]

Revenons maintenant comme le fait Mersenne, à titre de complément, au premier problème:

« Expliquer la maniere dont il faut user en variant les notes d'un chant donné pour éviter la confusion, et pour n'obmettre aucune sorte de combination, ou de conionction. »

Les règles qui permettent d'établir des listes de chants sont simples; mais lorsque le nombre des notes augmente, elles deviennent malaisées à appliquer sans risque d'erreur. Aussi Mersenne (qui, au surplus, n'en avait pas rendu compte explicitement) va-t-il en faciliter la mise en pratique, et mieux se garantir contre les dangers d'omission ou de répétition, en exposant une méthode à la fois plus intuitive et plus naturelle:

« Encore que l'exemple precedent de la combination et des varietez de 8 notes fasse voir la maniere dont il faut proceder pour rencontrer toutes les varietez possibles, neantmoins ie l'explicque icy par discours, affin que ceux qui voudront prendre la peine de trouver et d'escrire les viarietez des chants composez de 10, 12, et 15, ou autre plus grand nombre de notes, suivent l'ordre naturel, qui est le plus facile, et qu'ils n'obmettent nulle varieté. »

Ainsi, contrairement à Descartes qui s'en remettait en l'occurrence au pur caprice de chacun, pourvu qu'un ordre déterminé fût suivi, il est possible d'articuler l'énumération suivant un *ordre naturel*, et cet ordre naturel sera celui qui est considéré comme le plus évident par les mathématiciens: celui selon lequel se succèdent les nombres:

« Or il n'y a point de meilleur moyen pour éviter l'embarras, la confusion et la difficulté de ces varietez, que de s'imaginer que l'on arrange des nombres qui se suivent d'un ordre naturel, comme font 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. »

Imaginons en effet que les 8 objets pour lesquels nous avons à établir la liste de toutes les permutations soient ces 8 chiffres. La première permutation sera *lue comme s'il s'agissait du nombre :* 12 345 678. Si je permute les deux derniers chiffres de ce nombre: 7, 8, j'obtiens le nombres 12 345 687 qui est le plus petit des nombres qu'on peut obtenir en permutant des chiffres dans le nombre 12 345 678.

Ainsi les nombres 1, 2, 3, ..., 8 nous « monstrent que cette disposition est la premiere des varietez, ou des combinations, parce que l'on ne peut les disposer autrement que la somme de ces nombres ne soit plus grande que la precedente, le second rang de nombres doit seulement changer l'ordre des 2 derniers en cette maniere 12 345 687 : Les 2 derniers nombres à sçavoir 678, peuvent estre variez 6 fois, c'est à dire 4 fois, oûtre les 2 precedentes varietez, comme l'on voit icy 768, 786, 867, et a rebours, de sorte que la sixieme, ou la derniere varieté 876, est le plus grand nombre de tous ; par où l'on void que cet ordre commence par le moindre nombre et finit par le plus grand. »

Nous en sommes à : 12 345 876. Il faut maintenant mettre au 5e rang le chiffre 6, à la place du 5. Le nombre suivant sera : 12 346 578, « puis il faut varier 578 en 6 façons. »

Viendront ensuite successivement au 5e rang les chiffres 7, 8 ; et on variera de même respectivement en 6 façons : 568, puis 567.

« Si l'on suit tousiours cet ordre, l'on ne se troublera nullement, et l'on n'obmettra nulle des varietez possibles. »

---

1. Proposition 7.

Et, autre avantage, il sera facile de trouver, un chant étant donné, ceux qui le précèdent et le suivent immédiatement: « Or il faut remarquer qu'il est aysé de trouver le nombre qui doibt suivre quand le precedent est donné, parce que c'est le plus grand qui suit immédiatement [...]. Mais pour avoir le precedent, il faut prendre celuy qui est immediatement moindre que celuy qui est donné.»

L'ordre proposé n'est pas « naturel» au sens des *Regulae*, mais il l'est aux yeux de Mersenne, parce qu'il ramène le problème à la consultation de l'ordre qui nous est le plus familier, et qui assure une garantie palpable contre l'erreur: l'ordre de succession des nombres.

***

Le seul examen des permutations n'autoriserait que des conclusions partielles; précisons plutôt, pour finir, comment, là même où, selon des démarches semble-t-il originales, Mersenne a conduit ses efforts au delà de calculs, beaucoup moins neufs par leur intention, de simples dénombrements, un contact se retrouve, malgré la modestie de ses acquis proprement mathématiques, entre ses travaux et espoirs, et des préoccupations toutes d'aujourd'hui.

Mersenne a traité, à propos des *arrangements avec répétitions de 22 lettres* des problèmes analogues à ceux que, nous l'avons vu plus haut, il avait résolu à propos des permutations: procédé de numérotation de ces arrangements disposés selon l'ordre lexicographique; procédé de détermination d'un mot dont seul le numéro est connu [1]. Sans pouvoir insister sur ce point (qui a par lui-même un certain intérêt historique), signalons que ces procédés sont proches de ceux qui régissent un système de numération de base 22 [2]. Rétrospectivement, en une période où la nécessité s'est faite sentir de définir des méthodes de parcours des permutations plus économiques que la méthode lexicographique [3], les algorithmes mis en place par Mersenne prennent figure de chaînon intéressant dans une histoire des méthodes de rangement qui reste à faire.

« Quelles ne furent pas les espérances suscitées par le calcul combinatoire ! N'est-ce point lui qui inspire au Père Mersenne ce rêve insensé de déterminer mathématiquement les plus belles mélodies ?» [4].

Si rêve il y eut, ce ne fut pas, une lecture plus attentive nous l'a montré, de confier aux mathématiciens la détermination des « beaux chants». Bien plus, le « rêve» véritable — porter secours aux musiciens — est tenu aujourd'hui pour un projet en chemin de réalisation. « Développer chez l'artiste la conscience des possibles», élaborer des « méthodes d'exploration du champ des possibles», évoquer les « cribles» permettant de trier parmi ces derniers, tels sont certains traits de « *l'art permutationnel*» [5] auquel, en Musique, avant Kircher, Mersenne voulait concourir effectivement avec ses répertoires. Ainsi se justifie encore mieux la citation que fait d'une de ses pages P. Barbaud à la fin de « La musique, discipline scientifique» [6].

---

1. Mersenne insiste avec précision sur l'usage de ces procédés en cryptographie ; d'où l'allusion qu'on pourra lire, ci-dessous, à la fin de la troisième proposition du *Manuscrit des chants de 8 notes*.

2. Nous ignorons pour notre part si le problème traité par Mersenne à propos des *permutations* a été abordé par quelque autre mathématicien au 17e et au 18e siècle ; nous en avons rencontré une solution dans une communication faite par C. A. Laisant à la Société mathématique de France, et qui a pour objet, il importe de le souligner, un système de numération particulier, que l'auteur dénomma *numération factorielle* (« Sur la numération factorielle, application aux permutations», *Bull. Soc. math. Fr.*, Paris, 1888, t. 16, 1887-8, séance du 21 novembre 1888, pp. 176-183).

3. *Cf.* M. E. Wells, « Generation of permutations by transposition», *Math. of Comput*, t. 15, 1961, pp. 192-5.

4. P. Boutroux, *Les principes de l'analyse mathématique*, Paris, Hermann, 1914, t. 1, p. 260.

5. A. Moles, *Art et ordinateur*, Paris, Casterman, 1971, chap. 3 : « L'art permutationnel et les multiples».

6. Paris, Dunod, 1968.

APPENDICE

Le manuscrit des chants de 8 notes

A

L'ouvrage manuscrit que nous désignons par le titre conventionnel de *Manuscrit des chants de 8 notes*, se trouve au Département des manuscrits de la Bibliothèque Nationale (fonds français, n° 24 256). Il provient du Couvent des Minimes. Il ne comprend pas seulement, comme pourrait le faire penser la description du Catalogue des manuscrits [1], la seule « *table* » *des chants de 8 notes.* Celle-ci s'intercale en effet dans une suite de 8 « propositions » où Mersenne situe dans un cadre plus général l'énumération à laquelle il procède, et en précise l'intérêt pratique. Il s'agissait donc d'une sorte de traité autonome qui devait faire suite, comme le laisse penser la première phrase, à une étude générale de l'analyse combinatoire:

> « Encore que j'aye desia montré combien l'on peut faire de chants differents de tel nombre de notes que l'on voudra, ie veux aioûter l'exemple de 8 notes, d'autant qu'elles contiennent toute la musique, affin que ceux qui ont souvent besoin de composer des airs, et de chanter, puissent en faire tel nombre qu'ils voudront sans se peiner et sans user de redites comme ils font ordinairement. »

Mais il semble bien que Mersenne l'ait composé avant d'avoir écrit les textes qui traitent des « combinaisons » dans l'*Harmonie universelle* et dans les *Harmonicorum Libri*, puisque lorsqu'il y donne, à la fin, la table des factorielles de 1 à 64 !, il cite seulement *La vérité des sciences.*

En tout cas, aussi téméraire qu'en fût le projet, Mersenne songea à publier ce traité, ainsi que nous en avons trouvé le témoignage dans une lettre de Peiresc qui, quelque peu effaré par une publication si peu commune aussi bien par son objet que par ses dimensions, ne la croit pas toutefois impossible:

> « Je pense comme vous que vostre grand et immense volume de la musique ou combination de tons pourroit estre de grand usaige et soulagement aux bons maistres de musique. Mais je ne sçay si gueres d'aultres s'en pourroient servir. C'est pourquoy difficilement se trouveroit-il non seulement des imprimeurs, mais quasi des achepteurs d'un tel ouvraige, et ne pense pas que celuy à qui vous en destinez la dedicace, voulust avoir fourny pour cela 100 pistoles. Toutesfois il ne faut rien negliger et puisque vous avez le volume tout faict, je vous conseille de le faire porter à vostre voyage, afin que nous le voyons icy en passant, et possible qu'en Italie on l'imprimera aultant et plus volontiers qu'en France, principalement à Venise, où la debite d'Allemagne pourroit estre considéré. Il y fauldroit adjouster quelque petite observation curieuse, capable de compenser un peu de l'ennuy que de tels labeurs ingrats causent [à] ceux qui ne s'en peuvent ou ne s'en sçavent pas bien servir & ayder » [2].

Et Peiresc de suggérer à Mersenne des ajouts sur ses « observations des lunettes », ou sur « celles de l'aimant » ! Mersenne ne semble pas surpris par cette demi-rebuffade: résigné à ne pas espérer de publication, il doute même qu'on puisse dénicher un copiste d'assez bonne volonté pour accepter une gigantesque recopie:

« Quant à mon gros volume n'y pensez point, car c'est une piece de cabinet qui ne verra jamais le jour. Si vous en voulez une copie, je vous l'envoyray quand il vous plaira, mais il est si laborieux que je ne croy pas que vous trouviez aucun qui le veuille faire » [3].

---

1. « 24 256. Table de « tous les chants qui se peuvent faire de 8 notes (octave) par la combinaison ordinaire, à açavoir 48 320 ». Chansons notées, à la fin du volume (fol. 351-353), sur des feuillets ajoutés. 17e siècle. Papier. 353 feuillets. 355 sur 215 millimètres. Rel. parchemin. (Minimes 19) » (*Catalogue général des manuscrits français. Anciens petits fonds français*, t. 2, p. 295).

2. *Corr. Mers.*, t. 5, Nicolas-Claude Fabri de Peiresc à Mersenne, 20 août 1635, lettre n° 472, p. 357. Il ne fait pas de doute pour nous que ce « grand et immense volume de la musique ou combination des tons » soit le « gros volume manuscrit » où était consignée la combinaison des 8 notes ; pour aussi brèves qu'elles soient, les indications de Peiresc qui répond ici à une lettre, aujourd'hui perdue, de Mersenne, suffisent à l'assurer. (Dans une note relative à ce passage, *ibid.*, p. 357, n. 2, C. de Waard renvoie, sans autre précision, à une lettre de Mersenne, et à des éclaircissements dont l'objet général est l'analyse combinatoire.)

3. *Corr. Mers.*, t. 5, Mersenne à Nicolas-Claude Fabri de Peiresc (vers le 1er septembre 1635), p. 372.

« Œuvre immense et prodigieuse» [1] pourtant que « cette pièce de cabinet» condamnée à rester pièce unique: aussi, faute de pouvoir lui donner la diffusion d'un imprimé, Mersenne offrira-t-il généreusement, à plusieurs reprises, d'en faire profiter tous ceux qui devraient prendre intérêt à sa consultation:

« Et si l'on veut user de l'estenduë de l'Octave, tous les Chants possibles qui se trouvent dans l'estenduë des 8. Chordes du Diapason, lesquels ie communiqueray à ceux qui le désireront, peuvent servir à la mesme chose» [2].

Extraits

B

Nous allons tout d'abord donner les titres de toutes les Propositions; nous avons ensuite retranscrit les passages relatifs à la méthode de numérotation des permutations, et ceux où Mersenne dit l'« utilité» que les Praticiens peuvent tirer de son répertoire.

[Titres des propositions]

Premiere proposition
Expliquer et déscrire, tous les chants qui peuvent estre faicts des huit notes de l'octave et consequemment tous les airs qui se peuvent rencontrer dans les 7 especes d'octaves, et dans les 12 notes, fol. 1 r.-2 v.

Seconde proposition
Descrire tous les chants qui se peuvent faire des 8 notes de l'octave, lors que l'on les prend toutes 8 dans chaque chant, et qu'il n'est pas permis de repeter 2, ou plusieurs fois une note ; c'est à dire donner tous les chants qui se peuvent faire de 8 notes par la combination ordinaire, à scavoir 40 320.

[C'est ici que se place sous le titre de « Chants de huit notes », *l'énumération des 40 320 chants*], fol. 3 v.-339 v.

Troizieme proposition
Un chant étant donné trouver le quantiesme il est dans la combination ordinaire, fol. 340 r.-341 r.

Quatrieme proposition
Un nombre étant donné trouver le chant auquel il respond entre tous les chants qui se peuvent faire d'un nombre donné de notes, fol. 341 v.-343 r.

Cinquiesme proposition
Determiner combien il y a de chants dans les 8 notes de l'octave, qui ayent l'intervalle de l'octave, ou celui de la septieme, de la sexte, de la quinte, &c. une, deux, trois, ou plusieurs fois, et combien de fois chaque intervalle se repete dans les chants qui se font de 8 notes, fol. 344 r.-344 v.

Sixieme proposition
Expliquer la maniere dont il faut user en variant les notes d'un chant donné pour éviter la confusion, et pour n'obmettre aucune sorte de combination ou de conionction, fol. 345 r.-346 v.

Septieme proposition
Explicquer les utilitez que les Praticiens peuvent tirer des 8 notes et de tous leurs chants, fol. 347 v.-348 v.

---

1. « Septimo denique quot Sextae, Quintae, Quartae, vel etiam alia intervalla contineantur in communi sex notarum varietate, quod ostendimus quinta propositione *ingentis, atque prodigiosi operis* quo 40 302 [lire 40 320] octo notarum varietatis notis Practicis exhibuimus : ubi & de Praxi & utilitate combinationum septima propositione actum est & omnis varietas possibilis octo notis tributa, quod reliquorum numerorum possit esse paradigma. » *Harmonicorum Libri*, VII, p. 123.

2. *Harmonie universelle*, II, *Livre Second des Chants*, p. 363. *Cf.* également : « Porro si quis amplius Combinationis exemplum requirat, praedictam octo notarum, quibus omnes species Diapason imo & duodecim Modi comprehenduntur, varietatem, quam 168 papyri foliis complexus sum, a me facilè impetrabit », *Harmonicorum Libri*, VII, p. 123. Dix ans plus tard, dans le dernier ouvrage où Mersenne traite d'analyse combinatoire, il réitère sa proposition: « Porro si quis exemplum 8 notarum 40 320 cantus diversos habens cupierit meum exemplar libenter commodaturus sum», *Reflexiones physico-mathematicae*, p. 206.

Proposition huictiesme

Explicquer la table des combinations et son utilité.

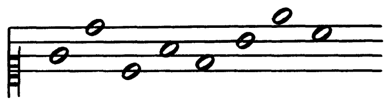
Table des combinations ou varietez de 64 choses, fol. 348 r.-349 r.

[TEXTE DES PROPOSITIONS 3, 4, 6, 7]

Troizieme proposition

Un chant étant donné trouver le quantiesme il est dans la combination ordinaire.

Il faut premierement scavoir de combien de notes le chant est composé : par exemple, si l'on suppose qu'il soit composé de 8 notes, comme est celuy cy,



La combination ordinaire enseigne que l'on peut faire 40 320 chants de ces 8 notes : Et si l'on oste la premiere note de ce chant, que les autres se peuvent varier en 5 040 manieres : donc il s'ensuit que puisque chaque note demeurant au premier lieu l'on peut faire 5 040 chants, que les deux premieres notes demeurant aussy dans un mesme lieu, qu'il reste 6 notes qui se peuvent varier 720 fois, et ainsy des autres.

Cecy estant posé, il faut remarquer que cet Air commence par Mi, et consequemment, qu'il y a 5 040 *ut* et autant de *ré* qui le précédent ; c'est pourquoy il faut mettre deux fois 5 040, puis il faut conter 5 040 pour le second *mi*, et tout autant pour chaque note, qui est sous ce *mi*, à sçavoir pour *ut*, *ré*, *fa*, *sol*, *ré* qui sont les 5 lieux, où l'on eust peu mettre la 2 note, et partant, il faut conter 5 fois 720, qui sont 3 600, qu'il faut mettre sous 5 040.

La 3 note est *ut*, et parce que l'on ne le peut mettre plus bas, il le faut laisser ; quoy que s'il eust été à la 2 ligne, ou dans quelque autre, il l'eust fallu conter 120 fois, autant de fois qu'il y eust eü de lignes, où l'on eust peu mettre.

La 4 note est *fa* ; et parce qu'au lieu dudict *fa* l'on eust peu mettre la dite 4 note au *ré*, il faut conter 24 pour le dit lieu qu'il faut mettre souz 3 600, d'autant qu'apres ce *fa* il y a 4 notes qui se peuvent varier en 24 manieres.

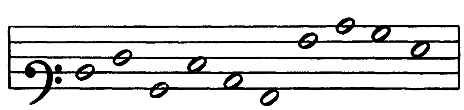
$$\begin{array}{r} 5\,040 \\ 5\,040 \\ 3\,600 \\ 24 \\ 2 \\ \hline 13\,706 \end{array}$$

La 5 note est *ré*, qu'il faut obmettre, parce qu'il ne peut estre mis plus bas ; et sy l'on l'eust peu faire, il eust fallu conter 6, autant de fois.

La 6 note est *sol*, qui ne peut aussy estre mise plus bas, et si l'on l'eust peu faire, l'on eust conté 2.

Les 2 autres notes sont *fa*, *ré* : Et parce que l'on eust peu mette *ré*, *fa*, il faut conter 2, à scavoir un pour *ré*, *fa*, et un pour *fa*, *ré* : or si l'on assemble tous ces nombres, l'on trouvera que le chant proposé est le 13 706 chant des 40 320, qui se peuvent faire de 8 notes.

Mais affin que la Reigle soit generale, et que l'on puisse trouver le lieu de chaque chant pris dans un moindre, ou dans un plus grand nombre de notes que huit, je veux ajoûter cet Exemple d'un chant de 10 notes.



Desquelles l'on peut faire 3 628 800 chants differents : Et parce que la premiere note de chant est au 4 lieu, il faut multiplier la combinaison de 9, qui est 362 880, par 3, car il faut tousjours multiplier par moins un, si ce n'est lors que tout le reste des notes va de suite de haut en bas ; or 362 880 multiplié par 3 donne 1 088 640 : Et parce que la 2 note de ce chant se pouvoit mettre en 4 lieux plus bas, il faut multiplier 40 320 qui est la combination de 8, par 4, dont le produit est 161 280, qu'il faut mettre souz 1 088 640.

$$\begin{array}{r} 1\,088\,640 \\ 161\,280 \\ 5\,040 \\ 1\,440 \\ 120 \\ 12 \\ \hline 1\,256\,532 \end{array}$$

La troizieme note se pouvoit mettre en un lieu plus bas, c'est pourquoy il faut mettre 5 040 souz 161 280 : La 4 note se pouvoit mettre en deux lieux plus bas, il faut donc multiplier 720 par 2, dont le produit est 1 440.

La 5 note se pouvoit mettre en un lieu plus bas, c'est pourquoy il faut mettre 120 ; et parce que la 6, ne peut estre plus bas, il ne faut rien mettre : La 7 note se pouvoit mettre un rang plus bas, et parce que les 3 qui suivent vont de suite de haut en bas, il faut seulement multiplier 6 par 2, pour avoir 12 ; or tous ces nombres estant adioûtés donnent 1 256 53?, comme l'on void à la marge, lequel est le nombre cherché, qui monstre le rang que tient le chant de 10 notes parmy tous les chants qui se peuvent composer de ces 10 notes.

Corollaire

Il est tres aysé de trouver la mesme chose dans tel autre nombre de notes que l'on choisira, par exemple dans 15, 20, et 30 notes ; or ce que ie die icy des chants, peut estre apliqué aux dictions, qui sont faites d'autant de lettres differentes qu'il y a de notes ; ce qui peut encore servir pour escrire par la Musique tout ce que l'on voudra sans que l'on puisse dechifrer les secrets. Mais la proposition qui suit enseigne comme il faut dechifrer les mesmes secrets.

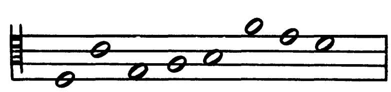
Quatrieme proposition

Un nombre estant donné, trouver le chant auquel il respond entre tous les chants qui se peuvent faire d'un nombre donné de notes.

Cette proposition est l'inverse de la precedente, c'est pourquoy l'on peut trouver le chant qui respond au nombre donné, pourveu qu'il ne soit pas plus grand que le nombre entier de la combination ; par exemple, pourveu qu'il ne surpasse pas 40 320 pour la combinaison de 8 notes, ou 3 628 800 pour celle de 10 notes.

Je suppose donc maintenant que l'on veuille sçavoir le chant de 8 notes, qui respond à 2 166, c'est à dire le deux mille cent soixante et sixieme chant des 40 320 que l'on peut faire de 8 notes ; or il faut prendre la combination de 7 choses, à scavoir 5 040 par laquelle il faut diviser 2 166 : Mais parce que cette division ne se peut faire, il faut le diviser par la combination de 6, qui est 720, et mettre la premiere note au lieu le plus bas. Puis, il faut diviser 2 166 par 720, le quotient est 3, le reste 6. C'est pourquoy il faut mettre la 2 note 4 rangs plus haut que la premiere, c'est à dire au 5 lieu et laisser trois rangs entre les 2.

Il faudroit encore diviser le reste, à scavoir 6 par 120, puis par 24, et finalement par 6 : Mais parce que la division estant faite par 6, il ne reste rien, il faut mettre les 3 notes suivantes de bas en haut, c'est à dire la premiere au plus bas lieu, s'il est possible, (lequel se rencontre icy au 2 lieu, d'autant que la premiere note est au premier lieu) et les autres ensuite : C'est pourquoy la 3 note sera au 2 lieu, la 4 au 3, et la 5 au 4 lieu. Et pour les 6 qui restent de la division ie mets les 3 dernieres notes de haut en bas, d'autant que ces 3 notes ne se peuvent changer que de 6 façons : Et consequemment la 6 note sera au 8, et dernier lieu, la 7 au 7, et la 8, ou derniere au 6 lieu, de sorte que le chant qui respond au nombre 2 166 doit estre escrit comme l'on le void icy.



Soit encore donné le nombre 40 272, si l'on desire sçavoir quel chant lui respond.

Il faut diviser 40 272 par 5 040, le quotient sera 7 et restera 4 992. Or quand il reste quelque chose, il faut tousiours adioûter un au quotient : Et quand il ne reste rien, il n'y faut rien aioûter, mais il faut mettre les notes qui restent de haut en bas. I'adioûte donc un au quotient 7 pour avoir 8, et consequemment la premiere note du chant que nous cherchons est au 8, ou dernier lieu ; il faut par apres diviser le reste 4 992 par 720, le quotient est 6 et reste 672, c'est pourquoy ie mets la 2 note au 7 lieu, parce qu'il faut adioûter un au quotient 6 ; puis ie divise le reste 672 par 120, le quotient est 5, et reste 72, partant ie mets la 3 note au 6 lieu ; ie divise encore 72 par 24, le quotient est 3, et ne reste rien : le mets donc la 4 note au 3 lieu, à cause qu'il ne reste rien, et puis ie mets tout de suite les 4 notes qui restent en commençant en haut et finissant en bas ; Or le plus haut lieu qui n'est point occupé, est le 5, partant ie mets la 5 note au 5 lieu, la 6 au 4, la 7 au 2 lieu parce que le 3 est occupé, et la derniere au premier, de sorte que ie trouve que ce chant est le 40 272 entre ceux qui se peuvent faire de 8 notes.

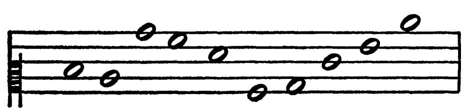
Si l'on veut prendre le chant dans plus de huit notes, il faut faire la mesme chose : par exemple, si l'on demande le quantiesme est ce chant, qui se compose de 10 notes, dans les 3 628 800 chants qui se peuvent faire de 10 notes.

Il faut premierement remarquer que la premiere note est au 4 rang, C'est pourquoy il faut multiplier la combination de 9 qui est 3 628 801, par 3, car il faut tousiours multiplier par un moins que le nombre de la note, si ce n'est quand tout le reste des notes va de suite de haut en bas. Or 362 880 multiplié par 3 produit 1 088 640 ; et parce que la seconde note se pouvoit mettre en 4 lieux plus bas, il faut multiplier 40 320, qui est la combination de 8 par 4, le produit est 161 280 que ie mets souz 1 088 640.

La 3 note se pouvoit mettre un lieu plus bas, et partant ie mets 5 040 souz 161 280. La 4 note pouvoit estre en 2 lieux plus bas; c'est pourquoy ie multiplie 720 par 2, le produit est 1 440, la 5 note se pouvoit mettre un lieu plus bas, et partant ie mets 120; la 6 note ne se peut mettre un lieu plus bas, c'est pourquoy il ne faut rien mettre pour elle. La 7 note se peut mettre en un lieu plus bas, mais les 3 qui suivent vont de suite de haut en bas, c'est pourquoy ie multiplie 6 par 2, pour avoir 12, or tous ces nombres estant adioûtes donnent 1 256 532, qui est le nombre que nous cherchons.

1 088 640
161 280
5 040
1 440
120
12
1 256 532

Mais si l'on demande quel chant pris dans 10 notes respond à 1 203 481, il faut diviser 1 203 481 par la combination de 9, qui est 362 880 ; le quotient est 3, qui monstre qu'il faut laisser 3 lieux au dessouz de la premiere note, et la mettre au 4 lieu : Et la division estant faite, il reste 114 841, que ie divise par 40 320 (qui est la combination de 8). Le quotient est 2, le reste 34 201, ie mets donc la 2 note au 3 lieu, et laisse 2 lieux au dessoux : (Car i'ay dict cy dessuz qu'il faut tousiours adioûter un au quotient, lors qu'il reste quelque note apres la division) et puis je divise 34 201, par 5 040, qui est la combination de 7, le quotient est 6, le reste 3 961, c'est pourquoy je mets la 3 note au 7 lieu de ceux qui restent, qui est la 9^{me} en contant les 2 notes qui sont desia placées ; et puis je divise 3 961 par 720, le quotient est 5, et partant, ie mets la 4 note au 6 lieu de ceux qui restent, qui est la 8^{me}, reste 361, que ie divise par 120, le quotient est 3, et reste 1. Je mets donc la 5 note au 4 lieu de ceux qui restent, qui est le 6^{me}; et parce qu'il ne reste qu'un je mets le reste des notes de bas en haut, à scavoir la 6 note au plus bas, ou premier lieu, qui n'est point occupé, la 7 au 2 lieu, la 8 au 5 lieu, par ce que le 3, ou le 4 sont occupés ; la 9 au 7 lieu, parce que le 6 est occupé, et finalement, la 10 ou derniere note au 10, ou dernier lieu qui n'est point occupé par d'autres notes, et consequemment le nombre 1 207 481 represente le chant qui suit, ou une diction de 10 lettres, si l'on suppose un alphabet composé de 10 characteres, dont on fasse toutes les dictions possibles.



Mais il n'est pas necessaire de parler de ces dictions par ce que i'ay dit ailleurs, tout ce que l'on en peut scavoir.

Sixieme proposition

Expliquer la maniere dont il faut user en variant les notes d'un chant donné pour éviter la confusion, et pour n'obmettre aucune sorte de combination, ou de conionction.

Encore que l'exemple precedent de la combination et des varietez de 8 notes fasse voir la maniere dont il faut proceder pour rencontrer toutes les varietez possibles, neantmoins ie l'explicque icy par discours, affin que ceux qui voudront prendre la peine de trouver et d'escrire les varietez des chants composez de 10, 12 et 15, ou autre plus grand nombre de notes, suivent l'ordre naturel, qui est le plus facile, et qu'ils n'obmettent nulle varieté.

Or, il n'y a point de meilleur moyen pour éviter l'embarras, la confusion et la difficulté de ces varietez, que de s'imaginer que l'on arrange des nombres qui se suivent d'un ordre naturel, comme font 1, 2, 3, 4 ,5, 6, 7, 8, car ils monstrent que cette disposition est la premiere des varietez, ou des combinations, parce que l'on ne peut les disposer autrement que la somme de ces nombres ne soit plus grande que la precedente, le second rang de nombres doit seulement changer l'ordre des 2 derniers en cette maniere 12 345 687 : Les 3 derniers nombres à sçavoir 678, peuvent estre variez 6 fois, c'est à dire 4 fois, oûtre les 2 precedentes varietez, comme l'on voit icy 768, 786, 867, et à rebours, de sorte que la sixieme, ou la derniere varieté 876, est le plus grand nombre de tous ; par où l'on void que cet ordre commence par le moindre nombre et finit par le plus grand.

Apres que l'on a varié les 3 derniers nombres, ou les 3 dernieres notes, il faut changer le 4 nombre, à scavoir 5, et mettre le nombre suivant, c'est à dire 6, en sa place parce qu'il est le moindre des autres ; l'on aura 6 578, puis il faut varier 578 en 6 façons, comme i'ay dit cy dessuz : en apres il faut donner le premier rang au 6 et le mettre au lieu du 4, et faire la mesme chose au sept, et au 8, affin d'avoir 24 varietez ; et puis il faut mettre le 5 au 5 rang au lieu du 4, en cette maniere 54 678, et changer 4 678 en 24 façons comme i'ay dit cy devant : si l'on suit tousiours cet ordre, l'on ne se troublera nullement, et l'on n'obmettra nulle des varietez possibles.

Or il faut remarquer qu'il est aysé de trouver le nombre qui doibt suivre quand le precedent est donné, parce que c'est le plus grand qui suit immédiatement ; par exemple, que le nombre precedent soit 32 415 786, ie dis que 32 415 867 suit immediatement aprés ; car puisque 7 demeurant où il est, il n'y en a point de plus grand, il faut changer, et mettre 8 en sa place ; et celuy d'apres est 32 415 876.

Mais pour avoir le precedent, il faut prendre celuy qui est immediatement moindre que celuy qui est donné, à scavoir 32 415 768 ; et si l'on veut encore avoir celuy qui precede immediatement l'on aura 32 415 687 ; l'autre precedent est 32 415 678, et l'autre est 32 415 678 [sic].

Si l'on prend les 5 derniers nombres, à scavoir 15 678, il ne s'en trouve point de moindre, parce que le moindre se rencontre tout le premier ; c'est pourquoy il faut changer le 4 nombre ; et mettre 1 en sa place pour avoir 32 187 654.

Ce qui suffit pour comprendre la maniere de combiner et de trouver toutes les varietez possibles de chaque multitude de nombres de notes, de lettres, ou d'autres choses données, particulierement si l'on entend ce que i'ay dit dans les autres propositions.

[Dans la suite de la proposition, Mersenne passe à des remarques plus générales sur la quantité de papier considérable qui serait nécessaire si on voulait transcrire les chants de 9, 10, 15 notes, et s'efforce d'expliquer pourquoi « le nombre de leurs variétés s'augmente si fort, quoy que le nombre des choses que l'on varie croisse si peu ».]

Septiesme proposition

Explicquer les utilitez que les Praticiens peuvent tirer des 8 notes, et de tous leurs chants.

Encore que les 40 320 chants qui sont faicts de 8 notes differentes en contiennent beaucoup de mauvais, comme ceux qui ont une, ou deux septiemes, ou une, 2, ou 3 sextes maieures, neantmoins il n'y a nul chant qui ne puisse servir à quelque chose ; par exemple, à representer ou à exciter quelque passion, ou affection d'esprit ; et dont on ne puisse user pour faire de bons chants en adioûtant quelques notes pour remplir les intervalles des septiemes, et des sextes, ou les autres selon le dessein que l'on aura.

Or l'une des utilitez que l'on peut tirer de ces varietez consiste en l'invention des differentes modulations, ou dans les idées que le compositeur conçoit en voyant plusieurs chants qu'il ne s'estoit iamais imaginez ; car il n'importe qu'il ne les approuve pas en tous leurs intervalles, pourveu qu'il y rencontre quelque chose de particulier, dont il puisse tirer de la lumière pour l'employer aux differents suiets qu'il traicte, et dont il puisse enrichir ses inventions et ses fantaisies.

L'autre utilité sert pour varier un subject autant de fois qu'il est possible, sans que personne y puisse adiouster aucune varieté ; ce que le Musicien fera sans confusion, et sans desordre lorsqu'il entendra ce discours, par le moien duquel les praticiens peuvent commencer les varietez d'un nombre donné de sons, ou de notes partout où ils voudront ; par exemple, ils peuvent commencer les chants de 8 notes par le 5 040, et poursuivre iusques à la fin, ou rebrousser, et descendre iusques au commencement, ou garder tel autre ordre qu'ils voudront sans manquer à aucune varieté : Et consequemment ils pourront surmonter tous les autres praticiens qui n'auront pas cette connoissance quelque genie, ou bon naturel qu'ils puissent avoir, toutes et quantes fois qu'il sera question de varier tel chant que l'on voudra.

Quant aux mouvements, et aux temps differents, il est aysé de les aplicquer aux modulations precedentes, affin de donner le mouvement, ou la mesure à chaque chant selon la dignité du sujet. Mais ce discours appartient au livre de la Rythmique, qui contient la science des mouvements, et des temps.

Je laisse plusieurs utilitez que chacun peut retirer de la varieté des 8 notes, au lieu desquelles l'on peut user des 8 premiers nombres, qui peuvent aussy estre variez en 40 320 manieres. Ce que l'on peut encore aplicquer aux 8 premieres lettres de l'alphabet francois, Grec, Hebrieu, et Arabe, qui font 40 320 dictions differentes dont on peut user pour former un idiome entier, particulierement si l'on aioûte toutes les dictions qui se peuvent faire d'une, de 2, de 3, de 4, de 5, de 6 et de 7 lettres.

Mais la principale utilité qui se peut tirer de ces varietez consiste à discerner, et à reconnoistre les meilleurs chants, et les plus agreables de ces 40 320 varietez, dont le premier et le dernier plaisent davantage à plusieurs qu'aucun des autres : Quoy qu'il semble que l'on ne puisse iuger absolument quel est le meilleur, ou le plus agreable, d'autant que ce qui plaist, ou desplait davantage aux uns, plait ou desplait moins aux autres, selon qu'ils sont differemment passionnez, disposez ou preoccupez.

Il peut mesme arriver que ceux que l'on iuge ordinairement les pires seront pris par quelques uns pour les meilleurs, et qu'il n'y a nul chant en tous les 40 320 des 8 notes, qui ne puisse tellement agrééer à quelque oreille, qu'elle le preferera à tous les autres.

Car il est des oreilles comme des gousts, dont les uns se plaisent aux saveurs aigres, et picquantes, et les autres aux douces, et aux fades, puisque l'on experimente que les chants qui usent de grands intervalles plaisent plus à quelques uns que ceux qui vont par degrez conjoincts ; ce que l'on peut aplicquer aux autres sens exterieurs, puisque les yeux differents font choix de differentes couleurs, et que l'odeur qui agree à l'un blesse l'autre.

Si l'on vouloit composer un Idiome de chants au lieu de dictions, il seroit aysé d'user des 40 320 chants pour autant de differentes dictions, ou sentences, et conséquemment d'enseigner, et d'apprendre toutes les sciences sans autre langage que celuy de l'orgue, du luth, ou de tel autre instrument que l'on voudra. Mais je laisse toutes ces considérations, parce qu'il est aysé de se les imaginer, et plusieurs autres semblables selon le dessein, et l'estude de chacun.