MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

J.-C. BERMOND

Ordres à distance minimum d'un tournoi et graphes partiels sans circuits maximaux

Mathématiques et sciences humaines, tome 37 (1972), p. 5-25
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1972__37__5_0>

Math. Sci. hum. (10e année, no 37, 1972, p. 5-25)

ORDRES A DISTANCE MINIMUM D'UN TOURNOI ET GRAPHES PARTIELS SANS CIRCUITS MAXIMAUX

par
J.-C. BERMOND [1]

Cet article a pour origine un problème posé par la méthode des comparaisons par paires ; il s'agit d'évaluer la cohérence « logique» des comparaisons effectuées par le sujet et éventuellement de donner un rangement des objets comparés à l'aide du critère suivant : minimiser le nombre de comparaisons incompatibles avec un tel rangement. Ce problème a déjà été abordé dans cette revue (*cf.* notamment les articles de M. Barbut [2], B. Durand [6], A. Astié [1], et la note bibliographique de B. Monjardet dans ce numéro). Cet article fait le point des articles déjà publiés sur le sujet en essayant de dégager les idées importantes ; plusieurs démonstrations sont originales et certains résultats sont nouveaux.

Si on représente les résultats d'une expérience de comparaisons par paires par un tournoi, le problème posé revient à étudier le nombre minimum d'arcs, dont il faut renverser l'orientation dans un tournoi pour obtenir un tournoi transitif, c'est-à-dire un ordre total, et à chercher les ordres totaux ainsi obtenus ; ce nombre minimum d'arcs est noté $i\ (T_n)$.

Après avoir donné les définitions nécessaires et posé le problème au § 1, nous l'étendons aux graphes au § 2 et montrons qu'il est relié de manière simple à la recherche des graphes partiels sans circuits maximaux d'un graphe (généralisation au cas orienté de la notion d'arbre) : ceci nous permet de relier deux types d'articles qui ont tendance à s'ignorer. Le § 3 est consacré à la détermination de $i\ (T_n)$ et de $f\ (n) = max\ i\ (T_n)$ maximum pris sur tous les tournois à n éléments. Nous montrons que les majorants connus se déduisent tous d'une proposition très simple. Nous établissons qu'un minorant de $i\ (T_n)$ est donné par le nombre maximum de circuits 2 à 2 disjoints du tournoi T_n, ce qui nous permet d'établir un minorant pour $f\ (n)$ et en particulier les valeurs de $f\ (n)$ jusqu'à $n = 9$. Nous avons placé ce résultat (Th. 2.3) dans le cadre de la théorie des hypergraphes qui nous paraît le plus adapté, néanmoins le théorème 2.3 peut se démontrer directement. Après avoir rappelé l'algorithme amélioré de Remage et Thompson qui peut souvent être remplacé par des encadrements, nous déterminons $f\ (n)$ pour $n = 10$ et 11, ainsi que les tournois à distance $f\ (n)$ pour $n \leqslant 7$. Au cours de cet article, on trouvera aussi plusieurs problèmes ouverts qui pourraient servir d'étape pour une détermination de $f\ (n)$.

1. INDICE DE TRANSITIVITÉ D'UN TOURNOI

1.1. Définitions

La méthode de comparaisons par paires s'applique lorsqu'on veut comparer un certain nombre d'objets qui ne sont pas donnés en bloc. On les compare alors « par paires », toutes les paires étant envisagées, et dans chaque paire on choisit un objet.

1. CNRS, Centre de Mathématique Sociale.

Pour représenter les résultats d'une telle méthode on utilise un *tournoi* ou *1-graphe complet antisymétrique* dans la terminologie de Berge [3].

Rappelons qu'un *graphe* $G = (X, U)$ est le couple constitué par :

— Un ensemble X fini ;

— Une famille U d'éléments du produit cartésien $X \times X$.

Les éléments de X sont appelés *sommets ;* ceux de U, *arcs* et notés (x, y) ; x (resp. y) est appelé extrémité initiale (resp. terminale) de l'arc (x, y).

Lorsqu'un élément (x, y) apparaît au plus une fois dans U, G est appelé *1-graphe.*

Un 1-graphe est *antisymétrique* si l'on a :

$$(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in U \Rightarrow (\mathrm{y}, \mathrm{x}) \notin U.$$

Un 1-graphe est *complet* si l'on a :

$$(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \notin U \Rightarrow (\mathrm{y}, \mathrm{x}) \in U.$$

Un *tournoi* est donc encore un 1-graphe dans lequel deux sommets distincts x et y sont joints par un et un seul des arcs (x, y) ou (y, x).

Dans une expérience de comparaisons par paires, les sommets du tournoi associé représentent les objets à comparer et un arc (x, y) signifie que l'objet x est préféré à l'objet y.

Pour une étude plus approfondie des 1-graphes et des tournois on peut se référer à Berge [3], ou Moon [13], ou Ore [15] et pour les comparaisons par paires à David [5], ou Kendall [10].

Dans la suite, $G = (X, U)$ étant un graphe, nous désignerons par $n = |X|$ *la cardinalité de l'ensemble* X et par $m = |U|$ *la cardinalité de l'ensemble U.*

Un tournoi quelconque à n sommets sera noté T_n. Remarquons que pour un tournoi T_n on a :

$$m = \binom{n}{2} = \frac{n\,(n-1)}{2}.$$

On appelle *demi-degré extérieur* ou *score* (cas d'un tournoi) d'un sommet x et on note $d_G^+(x)$ ($d^+(x)$ s'il n'y a pas d'ambiguité) le nombre d'arcs (x, y) du graphe G d'extrémité initiale x. De même, on appelle *demi-degré intérieur* d'un sommet x et on note $d_G^-(x)$ (ou $d^-(\mathrm{x})$) le nombre d'arcs (y, x) d'extrémité terminale x. Dans le cas d'un tournoi la donnée du score d'un sommet x définit aussitôt le demi-degré intérieur : $d^-(\mathrm{x}) = n - 1 - d^+(\mathrm{x})$.

Une suite d'arcs (a, b), (b, c), ..., (o, p), (p, q) détermine un *chemin de a à q.* Nous supposerons que les sommets a, b, c, ..., o, p, q sont tous *différents* (on dit aussi qu'un tel chemin est élémentaire).

Un *circuit* (élémentaire) est une suite d'arcs (a, b), (b, c), ... (p, q), (q, a) où tous les sommets a, b, c, ..., p, q sont différents.

La *longueur d'un chemin (circuit)* est le nombre d'arcs contenu dans le chemin (circuit).

Un chemin (circuit) qui passe par chaque sommet du graphe est un chemin (circuit) *hamiltonien.*

1.2. Tournois transitifs

Un 1-graphe est dit *transitif* si :

$$(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in U \quad \text{et} \quad (\mathrm{y}, \mathrm{z}) \in U \quad \Rightarrow \quad (\mathrm{x}, \mathrm{z}) \in U.$$

Les *tournois transitifs*, qui ne sont autres que les *ordres totaux* sont particulièrement intéressants ; ils correspondent dans une expérience de comparaisons par paires à un juge « parfaitement logique » ou à un critère de jugement « bien approprié ».

Signalons quelques-unes de leurs propriétés immédiates (voir par exemple Moon [13], p. 15) :

Si on suppose les sommets rangés de manière que leurs scores soient non croissants :

$$d^+(x_1) \geqslant d^+(x_2) \dots \geqslant d^+(x_n),$$

on a équivalence entre :

(*i*) T_n est un tournoi transitif.

(*ii*) $(x_i, x_j) \in U \Leftrightarrow i < j$.

(*iii*) La suite des scores : $d^+(x_1), d^+(x_2) \dots d^+(x_n)$ est $n - 1, n - 2 \dots 1, 0$.

(*iv*) T_n ne contient pas de circuits.

En réalité lorsqu'on traduit les résultats d'une expérience de comparaisons par paires, on obtient souvent des tournois non transitifs et on peut chercher à avoir une mesure de la« *logique* » ou« *cohérence* » de l'expérience, c'est-à-dire de la « *transitivité* » du tournoi associé.

1.3. Indice classique de transitivité d'un tournoi

L'indice utilisé le plus souvent, appelé *indice de Kendall-Babington Smith* [11] porte sur le *nombre* $C_3(T_n)$ *de 3-circuits* (circuits de longueur 3) d'un tournoi T_n.

En effet, on peut remarquer que, si un tournoi contient un circuit, il contient un 3-circuit ; donc $C_3(T_n) = 0$, si et seulement si le tournoi T_n est transitif.

Pour un tournoi quelconque T_n on a (Kendall-Babington Smith [11]) :

Proposition

$$C_3(T_n) = \binom{n}{3} - \sum_{i=1}^{n} \binom{d^+(x_i)}{2}$$

$$\text{où : } \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}\,.$$

L'indice de Kendall-Babington Smith est l'indice normalisé :

$$k(T_n) = \frac{C_3(T_n)}{\max\limits_{T_n} C_3(T_n)}$$

$k(T_n)$ varie donc entre 0 et 1.

De la valeur de $C_3(T_n)$ on déduit :

$$\max_{T_n} C_3(T_n) = \begin{cases} 1/24\,(n^3 - n) \text{ si } n \text{ est impair,} \\ 1/24\,(n^3 - 4\,n) \text{ si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

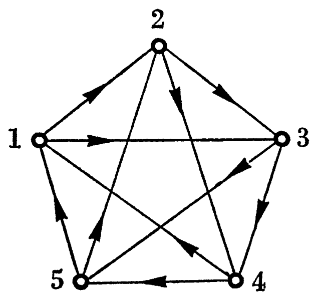
Si n est impair le maximum est atteint pour les tournois T_n dont tous les scores sont égaux $\left(d^+(x) = \dfrac{n-1}{2}\right)$: un tournoi dont tous les scores sont égaux est dit *régulier*.

Si n est pair le maximum est atteint pour les tournois T_n dont $\frac{n}{2}$ sommets ont un score égal à $\frac{n}{2}$ et les $\frac{n}{2}$ autres un score égal à $\frac{n}{2} - 1$: ces tournois sont dits *quasi-réguliers*.

Exemple

On considère le tournoi T_5 (fig. 1) à 5 sommets x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 avec $(x_i, x_j) \in U$ si $j - i \equiv 1$ ou 2 (5).

C'est un tournoi régulier et $C_3(T_5) = 5$: on a les 5 3-circuits :



(x_1, x_2) (x_2, x_4) (x_4, x_1)
(x_1, x_2) (x_2, x_5) (x_5, x_1)
(x_1, x_3) (x_3, x_4) (x_4, x_1)
(x_1, x_3) (x_3, x_5) (x_5, x_1)
(x_2, x_3) (x_3, x_5) (x_5, x_2).

Fig. 1

1.4. Autre indice de transitivité. Fonction $f(n)$

Un autre indice a été proposé entre autres par Slater [20] ; il est basé sur *le nombre minimum d'arcs dont il faut changer l'orientation pour obtenir un tournoi transitif, nombre qu'on notera* $i(T_n)$.

Si on définit sur l'ensemble des tournois à n sommets donnés une distance par :

$$\text{si } T_n = (X, U) \qquad \text{et} \qquad T'_n = (X, U')$$

$d(T_n, T'_n)$ = nombre d'arcs (x, y) tels que $(x, y) \in U$ et $(x, y) \notin U'$
et si on désigne par O_n *un tournoi transitif à n sommets* on a :

$$i(T_n) = \min_{O_n} d(O_n, T_n).$$

La distance précédente n'est autre que la moitié de la distance de la différence symétrique entre deux parties.

Exemple

Pour le tournoi T_5 de la figure 1 on a : $i(T_5) = 3$ les arcs à inverser étant par exemple (x_1, x_4) ; (x_1, x_5) ; (x_2, x_5). (Pour une démonstration voir 3-2.)

On a évidemment $i(T_n) = 0$, si et seulement si T_n est transitif. Pour que cet indice puisse être utilisable, on est amené à chercher deux problèmes :

A) *Déterminer* $i(T_n)$ *pour un tournoi donné :* une réponse sera donnée au 3-4.

B) Pour obtenir un coefficient normalisé *déterminer la fonction :* $f(n) = \max_{T_n} i(T_n)$.

C'est essentiellement le problème B qui fait l'objet de cet article et à défaut de pouvoir donner la valeur de $f(n)$, nous nous proposons de donner des renseignements sur cette fonction.

2. EXTENSION DU PROBLÈME AUX GRAPHES

2.1. Définitions

On peut généraliser les notions précédentes en considérant au lieu d'un tournoi transitif un *graphe sans circuit.* A un tel graphe, on peut associer un ordre partiel sur les sommets $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tel que tous les arcs appartenant à G soient de la forme $x_i\, x_{i+h}$ (et alors $x_i > x_{i+h}$).

Appelons *ensemble W d'arcs* d'un graphe G un ensemble d'arcs tel que, si on renverse leur orientation, on obtienne un graphe sans circuit et soit $i\ (G)$ *la cardinalité des ensembles W minimum* (en cardinalité).

(Remarque : le graphe sans circuit obtenu n'est un 1-graphe que si G est un 1-graphe antisymétrique.)

Appelons *ensemble V d'arcs* d'un graphe $G = (X, U)$, un ensemble d'arcs V tel que le graphe partiel $G - V = (X, U - V)$, obtenu en supprimant les arcs de V, soit un graphe sans circuit ; et soit $\rho\ (G)$ *la cardinalité des ensembles V minimum.* ($\rho\ (G)$ peut être considéré comme la généralisation du nombre cyclomatique défini pour les graphes non orientés.)

On a le théorème suivant, dû à Grindberg et Dambit [8] et aussi à Remage et Thompson [18 et 19].

2.2. Théorème

Les ensembles d'arcs W minimum d'un graphe G sont les ensembles d'arcs V minimum de ce graphe.

Corollaire

$$i\ (G) = \rho\ (G).$$

Démonstration du théorème

a) Soit W_0 un ensemble W; le graphe $G - W_0$ est sans circuit, W_0 est donc un ensemble V et contient un ensemble V_0 minimum soit :

(1) $\forall$ *W_0 ensemble W*, $\exists$ *V_0 ensemble V minimum avec $V_0 \subset W_0$.*

b) Remarquons que si $G = (X, U)$ est un graphe sans circuit, pour tout couple de sommets distincts x, y, il existe au moins un des arcs (x, y) ou (y, x) tel que $G +$ (x, y) $= (X, U \cup$ (x, y)) ou $G +$ (y, x) $= (X, U \cup$ (y, x)) soit sans circuit : en effet, si en rajoutant l'arc (x, y) on obtenait un circuit $C_1 =$ [(x, y),μ_1 (y, x)] où μ_1 (y, x) est un chemin de y à x, et si en rajoutant l'arc (y, x) on obtenait un circuit $C_2 =$ [(y, x), μ_2 (x, y)] où μ_2 (x, y) est un chemin de x à y, alors μ_1 (y, x) $\cup$ μ_2 (x, y) contiendrait un circuit appartenant à G.

Soit V_1 un ensemble V*;* $G - V_1$ est sans circuit ; d'après la remarque ci-dessus, on obtient en rajoutant à $G - V_1$ des arcs appartenant à V_1 ou à l'ensemble des arcs opposés à ceux de V_1 un graphe sans circuit, qui se déduit de G en changeant l'orientation de certains arcs de V_1. V_1 contient donc un ensemble W et par suite un W_1 minimum.

(2) $\forall$ *V_1 ensemble V*, $\exists$ *W_1 ensemble W minimum avec $W_1 \subset V_1$.*

Le théorème se déduit de (1) et (2) : en effet, soit W_0 un ensemble W minimum, d'après (1) il existe V_0 ensemble V minimum avec $V_0 \subset W_0$ et d'après (2) il existe W_1 ensemble W minimum avec $W_1 \subset V_0$. Donc $W_1 \subset W_0$ et comme W_0 et W_1 sont minimums soit $|W_1| = |W_0|$ on a $W_1 = W_0$ et par suite $W_0 = V_0$. Un ensemble W_0 W minimum est donc aussi V minimum. On montre de même qu'un ensemble V minimum est W minimum.

Remarques

1) La démonstration précédente montre que tout ensemble W est ensemble V*;* mais les ensembles V ne sont pas forcément ensembles W*:* ainsi le tournoi transitif à 3 sommets a, b, c et à 3 arcs (a, b), (a, c), (b, c) admet (a, c) comme ensemble V mais pas comme ensemble W.

2) Les ensembles V (ou W) minimum ne coïncident pas avec les ensembles V (ou W) minimal (au sens de l'inclusion) : par exemple, le graphe à 4 sommets : $X = \{$ a, b, c, d $\}$ et à 5 arcs $U = \{$ (a, b), (b, c), (c, d), (d, a), (b, d) $\}$ admet $\{$ (b, c), (b, d) $\}$ comme ensemble V minimal de cardinal 2, alors que (a, b) est un ensemble V minimum (cardinalité 1).

2.3. Graphes partiels sans circuit

L'étude ci-dessus montre l'importance des graphes partiels sans circuit. Nous appellerons « *ensemble S d'arcs* » d'un graphe G, un ensemble d'arcs formant un graphe partiel sans circuit et nous désignerons par $\omega(G)$ *la cardinalité maximum* d'un ensemble S d'arcs. (Les premiers résultats sur $\omega(G)$ apparaissent dans Erdös-Moon [7] qui appellent graphe partiel sans circuit : «set of consistent arcs»). On a la proposition évidente suivante (le corollaire est proposé en exercice dans Moon [13], p. 21, exercice 5).

Proposition

Les ensembles S d'arcs d'un graphe G sont les complémentaires des ensembles V d'arcs de ce graphe.

Corollaire

$$i(G) = m - \omega(G) \qquad (m = |U|).$$

L'intérêt de cette proposition est de relier deux problèmes qui ont été étudiés souvent indépendamment l'un de l'autre.

2.4. Hypergraphe associé aux circuits d'un graphe

Un *hypergraphe* $H = (X, \mathscr{E})$ est le couple constitué par :

— Un ensemble fini X ;

— Une famille $\mathscr{E} = (E_i / i \in I)$ de parties non vides de X appelées arêtes de l'hypergraphe (nous les supposerons de plus 2 à 2 distinctes).

Un *ensemble transversal des arêtes d'un hypergraphe* $H = (X, E_1, \ldots, E_m)$ est un ensemble T de sommets tel que $T \cap E_i \neq \emptyset\,(i = 1, 2, \ldots, m)$. Le nombre minimum de sommets d'un ensemble transversal est appelé le *nombre de transversalité de l'hypergraphe H.*

Un *couplage de l'hypergraphe H* est un ensemble d'arêtes 2 à 2 disjointes. Le nombre maximum d'arêtes d'un couplage sera noté $\nu(H)$.

A un graphe $G = (X, U)$ on peut associer *l'hypergraphe* $H = (U, \mathscr{C})$ où U ensemble des sommets de H est *l'ensemble des arcs de G*, et $\mathscr{C}$ ensemble des arêtes de H est *l'ensemble des circuits de G.*

Les ensembles transversaux d'un tel hypergraphe ne sont autres que les ensembles V d'arcs (définis en 2.1). Le nombre $i(G) = \rho(G)$ défini au 2.1 n'est autre que le nombre de transversalité de l'hypergraphe H. Un couplage de H est une famille de circuits 2 à 2 disjoints au sens des arcs.

Utilisant le résultat immédiat (Berge [3], p. 405, théorème 5) qui dit que dans un hypergraphe la cardinalité d'un couplage maximum est plus petite que le nombre de transversalité, on a :

Théorème

Si $\nu(G)$ désigne le nombre maximum de circuits 2 à 2 disjoints au sens des arcs du graphe G :

$$\nu(G) \leqslant i(G).$$

3. DÉTERMINATION DE $i(G)$ ET ÉTUDE DE $f(n) = \max\limits_{T_n} i(T_n)$

Notation

Dans la suite nous désignerons les n sommets d'un tournoi T_n par les nombres $1, 2, \ldots, n$ et nous noterons l'appartenance de l'arc (i, j) à U par : $i > j$. Si T_n est le tournoi transitif associé à l'ordre total $i_1, i_2, \ldots, i_n$, nous noterons ce tournoi : $i_1 > i_2 \ldots > i_n$.

Exemple

Le tournoi de la figure 1 a pour ensemble de sommets : $X = (1, 2, 3, 4, 5)$ et les arcs sont indiqués par :

$$1 > 2{,}3 \qquad 2 > 3{,}4 \qquad 3 > 4{,}5 \qquad 4 > 5{,}1 \qquad 5 > 1{,}2$$

si on renverse l'orientation des arcs (1,4), (1,5), (2,5), on obtient le tournoi transitif : $1 > 2 > 3 > 4 > 5$.

On désignera par $\left[x \right]$ la partie entière de x.

3.1. Majorants pour $i\,(G)$ et $f\,(n)$

$G = (X, U)$ étant un graphe nous désignerons par $G_1 = (X_1, U_1)$ *le sous-graphe engendré par* $X_1 \subset X$ $(U_1 = U \cap (X_1 \times X_1))$, par G'_1 *le sous-graphe engendré par le complémentaire* $\overline{X}_1$ *de* X_1 et par $m^+(X_1, X_2)$ *le nombre d'arcs* (x, y) *de* U *où* x *appartient à* X_1 *et* y *à* X_2. On a alors :

Proposition

Pour tout graphe G_1 *de* G *engendré par un sous-ensemble* X_1 *de* X *on a :*

$$i\,(G) \leqslant i\,(G_1) + i\,(G'_1) + \min\,(m^+\,(X_1, \overline{X}_1)\,;\, m^+\,(\overline{X}_1, X_1)).$$

Démonstration

Ceci résulte du fait qu'en supprimant les $i\,(G_1)$ arcs d'un ensemble W_1 W-minimal de G_1, les $i\,(G'_1)$ arcs d'un ensemble W_1 W- minimal de G'_1 et les $m^+\,(X_1, \overline{X}_1)$ ou les $m^+\,(\overline{X}_1, X_1)$ arcs allant de X_1 à $\overline{X}_1$ ou de $\overline{X}_1$ à X_1, on obtient un graphe partiel sans circuit de G, $G_1 - W_1$ étant sans circuit ainsi que $G'_1 - W'_1$ et tous les arcs reliant X_1 à $\overline{X}_1$ étant orientés dans le même sens.

Corollaire 1

$G - \{ x_i \}$ *désignant le sous-graphe engendré par* $X - \{ x_i \}$, *pour tout sommet* x_i *de* X *on a :*

$$i\,(G) \leqslant i\,(G - \{ x_i \}) + \min\,(d^+\,(x_i)\,;\, d^-\,(x_i)).$$

Il suffit de prendre $G_1 = \{ x_i \}$.

Corollaire 2 (Erdös-Moon [7])

$$f\,(n) \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right] < \frac{m}{2}.$$

Démonstration

Dans un tournoi T_n à n sommets, il existe au moins un sommet x_i de score (demi-degré extérieur) :

$$d^+\,(x_i) \leqslant \left[\frac{n-1}{2}\right]$$

donc :

$$\forall\; T_n \quad i\,(T_n) \leqslant i\,(T_n - \{ x_i \}) + \left[\frac{n-1}{2}\right] \leqslant f\,(n-1) + \left[\frac{n-1}{2}\right]$$

donc :

$$f\,(n) \leqslant f\,(n-1) + \left[\frac{n-1}{2}\right]$$

et compte tenu de $f\,(1) = f\,(2) = 0$,

$$f\,(n) \leqslant \sum_{k=3}^{n} \left[\frac{k-1}{2}\right] = \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right].$$

Remarque

Si on remarque que $f\,(4) = 1$ et si on commence la récurrence à $k = 4$, on obtient l'inégalité stricte pour $n \geqslant 4$.

Corollaire 3 (Reid [16])

$$f(n) \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-3}{2}\right]$$

La démonstration qui repose sur l'examen de certains ensembles G_1 à deux éléments n'est pas donnée, le majorant étant moins bon que celui du corollaire 4.

Corollaire 4 (Jung [12])
Si n s'écrit :

$$n = n_1 + n_2 \qquad avec \qquad n_1 \leqslant n_2$$

on a : n pair
$$f(n) \leqslant f(n_1) + f(n_2) + \frac{n_1(n_2-1)}{2}$$

n impair
$$f(n) \leqslant f(n_1) + f(n_2) + \frac{n_1 n_2}{2}.$$

Démonstration

Si on considère l'ensemble des points de score supérieur ou égal à $\left[\frac{n}{2}\right]$ et l'ensemble complémentaire des points de score inférieur à $\left[\frac{n}{2}\right]$ l'un au moins est de cardinalité supérieure ou égale à $\frac{n}{2}$. Supposons par exemple que ce soit l'ensemble des points de score supérieur ou égal à $\left[\frac{n}{2}\right]$ et choisissons comme ensemble X_1 un de ses sous-ensembles de cardinalité n_1. On a :

$$m^+(\overline{X}_1, X_1) \leqslant m^+(X_1, \overline{X}_1)$$

or :

$$m^+(\overline{X}_1, X_1) = \sum_{x \in X_1} d^-(x) - \binom{n_1}{2}$$

pour :

$$x \in X_1 \quad d^+(x) \geqslant \left[\frac{n}{2}\right]$$

donc :

$$d^-(x) = n - 1 - d^+(x) \leqslant \left[\frac{n-1}{2}\right]$$

donc :

$$m^+(\overline{X}_1, X_1) \leqslant n_1 \left[\frac{n-1}{2}\right] - \frac{n_1(n_1-1)}{2}$$

n pair, $\quad n = 2p \quad : m^+(\overline{X}_1, X_1) \leqslant \frac{n_1}{2}(2p - 2 - n_1 + 1) = \frac{n_1}{2}(n_2 - 1)$

n impair, $\quad n = 2p + 1 : m^+(\overline{X}_1, X_1) \leqslant \frac{n_1}{2}(2p - n_1 + 1) \quad = \frac{n_1}{2} \cdot n_2$

Le corollaire se déduit alors de la proposition appliquée à X_1.

En utilisant le corollaire 4 nous allons trouver un majorant fonction de n : $\varphi(n)$.

Corollaire 5

$$f(2^p) \leqslant 2^{2p-2} - (p+1)\, 2^{p-2}.$$

Démonstration

En appliquant le corollaire 4 au cas $n_1 = n_2 = 2^{p-1}$ on obtient :

$$f(2^p) \leqslant 2\, f(2^{p-1}) + 2^{p-2}(2^{p-1} - 1).$$

Par récurrence, la propriété étant évidente pour $p = 1$ ou 2, on a :

$$f(2^p) \leqslant 2 \,.\, 2^{2p-4} - 2\, p\, 2^{p-3} + 2^{2p-3} - 2^{p-2} = 2^{2p-2} - (p + 1)\, 2^{p-2}.$$

Utilisant la décomposition d'un nombre pair selon ses puissances de 2, il vient :

Théorème (Jung [12])

Si n est pair : $\qquad n = \sum_{i=1}^{k} 2^{p_i} \qquad$ *avec* $\qquad 0 < p_1 < p_2 \dots < p_k$

$$f(n) \leqslant \frac{1}{4}\, n\,(n - 1) - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{k} (p_i + 2\,k - 2\,i)\, 2^{p_i} = \varphi(n).$$

Si n est impair :

$$f(n) \leqslant f(n - 1) + \frac{1}{2}(n - 1) = \varphi(n).$$

Démonstration

On applique le corollaire 4 avec $n_2 = 2^{p_k}$:

$$f(n) \leqslant f\left(\sum_{i=1}^{k-1} 2^{p_i}\right) + f(2^{p_k}) + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{k-1} 2^{p_i}\right)(2^{p_k} - 1)$$

d'où :

$$f(n) \leqslant \sum_{i=1}^{k} f(2^{p_i}) + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{k} \left(\sum_{j=1}^{i-1} 2^{p_j}\right)(2^{p_i} - 1)$$

et avec le corollaire 5 :

$$f(n) \leqslant \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{k} 2^{2p_i} - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{k} (p_i + 1)\, 2^{p_i} + \frac{1}{2} \prod_{i,j} 2^{p_i}\, 2^{p_j} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} (k - i)\, 2^{p_i}$$

$$f(n) \leqslant \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{k} 2^{p_i}\right)^2 - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{k} 2^{p_i} - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{k} (p_i + 2\,k - 2\,i)\, 2^{p_i}$$

$$f(n) \leqslant \frac{1}{4}(n^2 - n) - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{k} (p_i + 2\,k - 2\,i)\, 2^{p_i}$$

Le cas n impair découle du corollaire 1.

Remarque

Le majorant explicite $\varphi(n)$ obtenu semble le meilleur qu'on puisse obtenir à partir du corollaire 4. Dans certains cas, on peut obtenir de meilleurs majorants en se référant directement à la proposition.

Cas $n = 13$: $\varphi(13) = \varphi(12) + 6$. Comme : $12 = 2^3 + 2^2$

$$\varphi(12) = \frac{1}{4}\, 12 \,.\, 11 - \frac{1}{4}(4 \,.\, 2^2 + 3 \,.\, 2^3) = 23 \quad \text{donc} : \varphi(13) = 29.$$

Or les tournois à 13 éléments sont, soit :

α) *non réguliers*, il existe au moins un sommet x de score $d^+(x) \geqslant 7$ et le corollaire (1) nous donne : $i(T_{13}) \leqslant i(T_{12}) + 5$, soit : $i(T_{13}) \leqslant \varphi(12) + 5 = 28$.

β) réguliers contenant un sous-tournoi à 5 éléments transitif ; la proposition appliquée à ce sous-tournoi pris comme G_1 donne :

$$i(T_{13}) \leqslant i(G_1) + i(G'_1) + \frac{5 \cdot 8}{2} \leqslant f(8) + 20 = 28$$

car : $i(G_1) = 0$.

γ) réguliers et sans sous-tournoi transitif à 5 éléments : un tel tournoi est unique d'après Reid et Parker [17] c'est le tournoi T_0 tel que :

$$(i, j) \in U \qquad \text{si} \qquad j - i \equiv 1, 2, 3, 5, 6 \text{ ou } 9 \pmod{13}.$$

Or ce tournoi est à distance 26 du tournoi transitif $1 > 2 > \dots > 13$, donc on a : $i(T_0) \leqslant 26$.

Donc : $f(13) \leqslant 28$.

Cas $n = 20 : 20 = 2^4 + 2^2$ donc : $\varphi(20) = \frac{1}{4} 20 \cdot 19 - \frac{1}{4}(4 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^4) = 75$.

Comme dans la démonstration du corollaire 4, considérons l'ensemble des points de score supérieur ou égal à 10 et celui des points de score inférieur à 10 : l'un a au moins 10 éléments, supposons que ce soit le premier ; dans cet ensemble, il existe un sous-tournoi transitif à 4 éléments, prenons-le comme sous-tournoi G_1 de la proposition :

$$i(T_{20}) \leqslant i(G_1) + i(G'_1) + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 15 \leqslant f(16) + 30 = 74$$

car : $i(G_1) = 0$.

Donc :

$$f(20) \leqslant 74 \qquad \text{et} \qquad f(21) \leqslant 84.$$

3.2. Minorant pour $i(G)$ et $f(n)$

Le théorème 2.4 nous donne comme minorant de $i(G)$: $\nu(G)$ nombre maximum de circuits 2 à 2 disjoints (au sens des arcs) de G. On peut dans certains cas obtenir un minorant en comparant G à un graphe G' dont on connaît $i(G')$ (ou un minorant) ; par exemple si G se déduit de G' en changeant l'orientation de a arcs, $i(G) \geqslant i(G') - a$.

Pour $f(n)$ la proposition suivante va nous donner un minorant explicite.

Proposition

Si on désigne par $\pi(K_n)$ le nombre de cycles 2 à 2 disjoints (au sens des arêtes) du graphe complet non orienté K_n : $f(n) \geqslant \pi(K_n)$.

Démonstration

D'après le théorème 2.4, on a : $f(n) \geqslant \max\limits_{T_n} \nu(T_n)$. Or les tournois T_n admettent K_n comme graphe non orienté associé ; donc : $\nu(T_n) \leqslant \pi(K_n)$ pour tout tournoi T_n ; soit : $\max\limits_{T_n} \nu(T_n) \leqslant \pi(K_n)$.

D'autre part, en orientant les $\pi(K_n)$ cycles 2 à 2 disjoints de K_n de manière à former des circuits (ce qui est possible car les cycles sont disjoints) et en orientant les arcs n'appartenant pas à ces cycles (s'il y en a) comme on veut, on obtient au moins un tournoi T_n tel que $\nu(T_n) = \pi(K_n)$, donc

$$\max_{T_n} \nu(T_n) = \pi(K_n).$$

Théorème

$$f(n) \geqslant \left[\frac{n}{3}\left[\frac{n-1}{2}\right]\right].$$

Démonstration

Ceci résulte de la valeur de $\pi(K_n)$: $\pi(K_n) = \left[\frac{n}{3}\left[\frac{n-1}{2}\right]\right]$ établie par Chartrand, Geller, Hedetniemi [4].

Remarques

D'après Moon [14], Remage (correspondance non publiée) a montré que pour p premier, $p = 6k + 1$, il existe un tournoi T_p tel que $i(T_p) = \frac{p(p-1)}{6}$ ce qui n'est qu'un cas très particulier du théorème.

La valeur obtenue ci-dessus est la meilleure connue actuellement ; on peut espérer l'améliorer, car la limite de $f(n)$ (3.3) est $\frac{m}{2}$ alors que ce minorant est en $\frac{m}{3}$. Une des méthodes qui semble la meilleure est de trouver une famille de tournois dont on peut calculer le $i(T_n)$, mais une telle famille semble difficile à construire.

Considérons la famille des tournois *parfaitement réguliers ou parfaitement quasi-réguliers*, c'est-à-dire des tournois T_n tels que : $i > j$ $((i, j) \in U)$ si : $j - i \leqslant \frac{n-1}{2}$ (mod. n) si n impair et : $j - i \leqslant \frac{n}{2}$ (mod. $n + 1$) si n pair ; pour ces tournois on a :

$$i(T_n) = \sum_{k=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} k = \frac{1}{2}\left[\frac{n+1}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right] ;$$

les tournois transitifs associés sont de la forme $i > i + 1 > \dots > i + n - 1$ (les nombres étant pris modulo n).

Exemple

Le tournoi T_5 de la figure 1.

Dans le cas où : $n = pq$, on peut considérer le tournoi T_n produit lexicographique des tournois T_p et T_q noté $T_p \otimes T_q$, c'est-à-dire le tournoi dont les n sommets sont $\{i_1 i_2\}$ avec $1 \leqslant i_1 \leqslant p$; $1 \leqslant i_2 \leqslant q$; et où $(i_1 i_2) > (j_1 j_2)$ si $i_1 > j_1$ ou $i_1 = j_1$ et $i_2 > j_2$.

Exemple

$n = 9$ C_3 étant le 3-circuit : $1 > 2$; $2 > 3$; $3 > 1$.

$T_9 = C_3 \otimes C_3$ a pour sommets :

$1 = \{11\}$	$2 = \{12\}$	$3 = \{13\}$	$4 = \{21\}$	$5 = \{22\}$
$6 = \{23\}$	$7 = \{31\}$	$8 = \{32\}$	$9 = \{33\}$	

et pour arcs :

$1 > 2, 4, 5, 6$	$2 > 3, 4, 5, 6$	$3 > 1, 4, 5, 6$	$4 > 5, 7, 8, 9$	$5 > 6, 7, 8, 9$
$6 > 4, 7, 8, 9$	$7 > 1, 2, 3, 8$	$8 > 1, 2, 3, 9$	$9 > 1, 2, 3, 7.$	

En remarquant qu'un tel tournoi se compose de p sections isomorphes à T_q (ou q sections isomorphes à T_p), on obtient un graphe partiel sans circuit en supprimant les $i(T_q)$ arcs nécessaires dans chaque section soit : $p\, i(T_q)$ et les $q^2\, i(T_p)$ arcs nécessaires reliant les sections ; donc :

$$i(T_p \otimes T_q) \leqslant p\, i(T_q) + q^2\, i(T_p),$$

de même :

$$i(T_p \otimes T_q) \leqslant q\, i(T_p) + p^2\, i(T_q).$$

Dans l'exemple ci-dessus, on a : $i(C_3 \otimes C_3) = 12$.

Conjecture

$$i(T_p \otimes T_q) = inf\,(p\, i(T_q) + q^2\, i(T_p)\,;\, q\, i(T_p) + p^2\, i(T_q))$$

cette conjecture, même démontrée, nous fournit un minorant moins bon que $\pi(K_n)$ sauf $n = 9$.

3.3. Limite de $f(n)$ lorsque n tend vers l'infini

On a le théorème suivant dû à Erdös et Moon [7] ; la démonstration donnée est légèrement différente de la leur.

Théorème

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, n \geqslant N \Rightarrow f(n) > \frac{m}{2}(1 - \varepsilon) \quad \text{où :} \quad m = |U| = \binom{n}{2}$$

(ce qui revient à dire que $\frac{f(n)}{m}$ tend vers $\frac{1}{2}$ lorsque n tend vers l'infini car $f(n)$ est inférieur à $\frac{m}{2}$ pour tout n [3.1 corollaire 2].)

Démonstration

On considère les tournois (étiquetés) à n sommets et $m = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ arcs, il y en a 2^m. Parmi ceux-ci :

— Les tournois transitifs $\{T_n : i(T_n) = 0\}$ sont en nombre égal à $n\,!$;

— Ceux à distance 1 des tournois transitifs $\{T_n : i(T_n) = 1\}$ sont en nombre inférieur ou égal à $n\,!\binom{m}{1}$;

.

.

.

.

— Ceux à distance k des tournois transitifs $\{T_n : i(T_n) = k\}$ sont en nombre inférieur ou égal à $n\,!\binom{m}{k}$.

(Les tournois tels que $i\ (T_n) = k$ forment en effet un sous-ensemble des tournois obtenus à partir des n ! tournois transitifs en changeant l'orientation de k arcs.)

On aura :

$$f(n) > k_0 \qquad \text{si} \qquad 2^m > \sum_{k=0}^{k_0} n\,! \binom{m}{k}$$

le nombre total de tournois T_n étant alors supérieur au nombre de tournois vérifiant : $i\ (T_n) \leq k_0$.

Pour démontrer le théorème, nous allons établir que :

$$\forall\ \varepsilon > 0, (\varepsilon < 1), \exists\ N, n > N \Rightarrow 2^m > \sum_{k=0}^{k_0} n\,! \binom{m}{k}$$

où : $k_0 = \left[\frac{m}{2}(1 - \varepsilon)\right]$.

Soit :

$$A = \frac{2^m}{\sum_{k=0}^{k_0} n\,! \binom{m}{k}}$$

comme :

$$0 \leqslant k \leqslant k_0 < \frac{m}{2}, \quad \binom{m}{\mathrm{k}} \leqslant \binom{m}{k_0}$$

d'où :

$$A > \frac{2^m\, k_0\,!\ (m - k_0)\,!}{n\,!\ m\,!\ k_0}.$$

Utilisant la formule de Stirling :

$$\text{Log}\ n\,! = n\ \text{Log}\ n - n + o\ (n),$$

$$\text{Log}\ k_0\,! = k_0\ \text{Log}\ k_0 - k_0 + o\ (n^2) = \frac{m}{2}(1 - \varepsilon)\ \text{Log}\ \frac{m}{2}(1 - \varepsilon) - \frac{m}{2}(1 - \varepsilon) + o\ (n^2),$$

$$\text{Log}\ (m - k_0)\,! = (m - k_0)\ \text{Log}\ k_0 - (m - k_0) + o\ (n^2) = \frac{m}{2}(1 + \varepsilon)\ \text{Log}\ \frac{m}{2}(1 + \varepsilon) - \frac{m}{2}(1 + \varepsilon) + o\ (n^2).$$

$$\text{Log}\ m\,! = m\ \text{Log}\ m - m + o\ (n^2),$$
$$\text{Log}\ n\,! = o\ (n^2),$$
$$\text{Log}\ k_0 = o\ (n^2),$$

d'où :

$$\text{Log}\ A > m\ \text{Log}\ 2 + \frac{m}{2}(1 - \varepsilon)\ \text{Log}\ \frac{m}{2}(1 - \varepsilon) + \frac{m}{2}(1 + \varepsilon)\ \text{Log}\ \frac{m}{2}(1 + \varepsilon) - m\ \text{Log}\ m + o\ (n^2),$$

soit :

$$\text{Log}\ A > \frac{m}{2}(1 - \varepsilon)\ \text{Log}\ (1 - \varepsilon) + \frac{m}{2}(1 + \varepsilon)\ \text{Log}\ (1 + \varepsilon) + o\ (n^2).$$

La concavité de la fonction x Log x dans $[0, + \infty[$ entraîne pour x positif :

$$\frac{1}{2}\Big((1 + x)\ \text{Log}\ (1 + x) + (1 - x)\ \text{Log}\ (1 - x)\Big) > f(1) = 0$$

soit ici :

$$\frac{1}{2}\Big((1-\varepsilon)\,\mathrm{Log}\,(1-\varepsilon) + (1+\varepsilon)\,\mathrm{Log}\,(1+\varepsilon)\Big) = \alpha > 0$$

donc : $\mathrm{Log}\, A = \alpha\, m + o\,(m)$ et est pour m supérieur à M soit n supérieur à N strictement positif soit :

$$A > 1$$

C.Q.F.D.

Remarque

La démonstration précédente donne aussi un minorant, inintéressant car les majorations du nombre de tournois T_n vérifiant : $i\,(T_n) = k$ sont trop grossières.

(Moon [14] a montré que $f\,(n) \geqslant \frac{1}{2}\, n\,(n-1) - \frac{1}{2}\, n\,(n\, \mathrm{Log}\, n)^{\frac{1}{2}}$ pour presque tous les tournois.)

On pourrait songer à chercher exactement le nombre de tournois tels que : $i\,(T_n) = k$, ce qui nous donnerait aussitôt la valeur de $f\,(n)$. Ce problème a été résolu par Slater [20] pour $i\,(T_n)$ inférieur ou égal à 3 : il obtient en appelant $f\,(n, k)$ le nombre de tournois T_n vérifiant $i\,(T_n) = k$:

$$f\,(n, 1) = \frac{n\,!\,(3\,n^2 - 13\,n + 14)}{6},$$

$$f\,(n, 2) = \frac{n\,!\,(9\,n^4 - 78\,n^3 + 235\,n^2 - 438\,n + 680)}{72} \text{ si } n \geqslant 4,$$

$$f\,(n, 3) = 24 \text{ si } n = 5,$$

$$f\,(n, 3) = \frac{n\,!}{6480}\,(135\,n^6 - 1755\,n^5 + 8685\,n^4 - 27185\,n^3 + 77820\,n^2 - 157204\,n + 210336) \text{ si } n \geqslant 6.$$

Slater donne aussi dans son article le nombre de tournois T_n tels que : $i\,(T_n) = k$ pour k quelconque et n inférieur ou égal à 8 : une telle table est très utile si on veut avoir l'idée de la répartition des tournois selon leur indice $i\,(T_n)$ et effectuer des tests (on pourra à ce propos lire l'article de A. Astié [1]). On peut en particulier se demander si la répartition tend vers une loi normale comme dans le cas des 3-circuits.

3.4. Algorithmes pour déterminer $i\,(T_n)$

Remarque

On peut supposer T_n (ou G) fortement connexe ($\forall\,(x, y) \in X \times X$, il existe un chemin allant de x à y), sinon on s'intéresse à chacune de ses composantes fortement connexes, car si $G = \bigcup_{i=1}^{\alpha} G_i$ (les G_i étant les composantes fortement connexes) $i\,(G) = \sum_{i=1}^{\alpha} i\,(G_i)$.

Avant de donner l'algorithme, nous allons établir quelques propriétés des tournois transitifs O_n associés à un tournoi T_n.

Définition

Un tournoi transitif O_n associé à un tournoi T_n est un tournoi transitif à distance minimum de T_n (obtenu en réorientant $i\,(T_n)$ arcs) ; nous désignerons un tournoi O_n par $i_1 > i_2 \ldots > i_n$.

Propriété 1 (Jacquet-Lagrèze [1])

Le sous-tournoi de T_n engendré par h sommets consécutifs $i_j, \ldots, i_{j+h}$ d'un tournoi transitif associé O_n admet le sous-tournoi transitif $i_j > i_{j+1} \ldots > i_{j+h}$ comme tournoi transitif associé.

1. Communication orale.

Démonstration

Appelons : T_{j-1} le sous-tournoi engendré par $i_1, \ldots, i_{j-1}$,

T_h le sous-tournoi engendré par $i_j, \ldots, i_{j+h-1}$,

T_{n-h} le sous-tournoi engendré par $i_{j+h}, \ldots, i_n$,

O_n le tournoi transitif associé à T_n,

O_{j-1} le sous-tournoi transitif : $i_1 > \ldots > i_{j-1}$,

O_h le sous-tournoi transitif : $i_j > \ldots > i_{j+h-1}$,

O_{n-h} le sous-tournoi transitif : $i_{j+h} > \ldots > i_n$,

$$i(T_n) = d(T_n, O_n) = d(T_{j-1}, O_{j-1}) + d(T_h, O_h) + d(T_{n-h}, O_{n-h}) + m^+\{(i_1 \ldots i_{j-1}) ; (i_j \ldots i_{j+h-1})\} + m^+\{(i_1 \ldots i_{j-1}) ; (i_{j+h} \ldots i_n)\} + m^+\{(i_j \ldots i_{j+h-1}) ; (i_{j+h} \ldots i_n)\},$$

la minimalité entraîne aussitôt (les autres termes de l'égalité restant constants) $d(T_h, O_h) \leqslant d(T_h, O'_h)$; O'_h désignant un tournoi transitif quelconque ayant pour sommets $(i_j \ldots i_{j+h})$; ce qui prouve bien que O_h est un tournoi transitif associé à T_h.

Corollaire (Remage et Thompson [19]

O_n $(i_1 > i_2 \ldots > i_n)$ étant un tournoi transitif associé à T_n, la suite d'arcs (i_1, i_2) $(i_2, i_3) \ldots (i_{n-1}, i_n)$ est un chemin hamiltonien de G.

Il suffit de vérifier que pour tout j, (i_j, i_{j+1}) est un arc de T_n. Ceci résulte de la propriété 1, appliquée au sous-tournoi T_h engendré par i_j, i_{j+1} qui vérifie $i(T_h) = 0$ car $h = 2$.

Propriété 2

O_n $(i_1 > i_2 \ldots > i_n)$ étant un tournoi transitif associé à T_n on a : $d^+(i_1) \geqslant \left[\frac{n}{2}\right]$.

Démonstration

Supposons $d^+(i_1) < \left[\frac{n}{2}\right]$ alors $d^+(i_1) < d^-(i_1)$. Considérons le tournoi transitif $O'_n : i_2 > \ldots > i_n > i_1$; appelons $T_n - \{i_1\}$ le sous-tournoi engendré par $i_2, \ldots, i_n$ et $O_n - \{i_1\}$ le sous-tournoi transitif $i_2 > i_3 \ldots > i_n$.

$$d(T_n, O_n) = d^-(i_1) + \mathrm{d}(T_n - \{i_1\}, O_n - \{i_1\}),$$
$$d(T_n, O'_n) = d^+(i_1) + \mathrm{d}(T_n - \{i_1\}, O_n - \{i_1\}),$$

donc : $d(T_n, O'_n) < d(T_n, O_n)$ ce qui contredit la définition de O_n.

Corollaire

Si on désigne par $T_n - \{i_1, \ldots, i_{j-1}\}$ le sous-tournoi engendré par $i_j, \ldots, i_n$ on a dans ce sous-tournoi :

$$d^+(i_j) \geqslant \left[\frac{n-j+1}{2}\right]$$

Remarque 1

On se gardera de croire que les sommets des tournois transitifs associés sont nécessairement rangés de manière à ce que i_j soit un des sommets de plus grand score dans le sous-tournoi engendré par $i_j \ldots i_n$, et donc, *a fortiori*, par ordre de score décroissant.

Il peut même n'exister aucun tournoi associé ayant la propriété ci-dessus comme le montre l'exemple suivant :

Exemple

Soit le tournoi T_7 :

$1 > 2, 3, 5, 6, 7$ $\quad 2 > 3, 5, 7$ $\quad 3 > 4, 5, 7$ $\quad 4 > 1, 2, 5, 6$ $\quad 5 > 6, 7$ $\quad 6 > 2, 3, 7$ $\quad 7 > 4$

on a : $d(T_7, O_7) = 3$ pour $O_7 : 4 > 1 > 6 > 2 > 3 > 5 > 7$.

Or pour tout tournoi transitif O'_7 ayant pour sommet de plus grand score, le seul sommet de plus grand score de T_7 à savoir 1 (score 5) on a : $d(T_7, O'_7) \geqslant 1 + i(T_6)$ où T_6 est le sous-tournoi engendré par 2, 3, 4, 5, 6, 7, soit :

$$2 > 3, 5, 7 \qquad 3 > 4, 5, 7 \qquad 4 > 2, 5, 6 \qquad 5 > 6, 7 \qquad 6 > 2, 3, 7 \qquad 7 > 4 ;$$

or ce tournoi T_6 contient 3 circuits 2 à 2 disjoints au sens des arcs : (2, 3, 4) (2, 5, 6) (4, 5, 7), donc :

$$i(T_6) \geqslant 3 \qquad \text{et} \qquad d(T_7, O'_7) \geqslant 4.$$

Il n'existe donc aucun tournoi transitif associé O'_7 ayant comme premier sommet le sommet i_1 de plus grand score dans T_7.

Remarque 2

Kadane [9] a montré que si on change seulement l'orientation d'arcs reliant deux points ayant même score dans T_n, il faut effectuer $C_3(T_n)$ (nombre de 3 circuits) telles opérations sur les tournois successifs obtenus pour former un tournoi transitif ; ce résultat relie d'une certaine manière le problème étudié à celui des 3-circuits et montre (ce qui est évident) que $i(T_n) \leqslant C_3(T_n)$.

Remarque 3

Les tournois transitifs associés ont un rôle important : ils donnent une réponse aux problèmes de classement (ou de rangement) entre objets (*cf.* Moon [13], p. 42-46).

Algorithmes pour déterminer $i(T_n)$

Il existe une série d'algorithmes qui se déduisent des algorithmes de recouvrement minimum ou transversal minimum, le problème étant, comme on l'a vu en 1.4., celui de la détermination d'un transversal minimum d'un hypergraphe. Pour de tels algorithmes nous renvoyons à Berge [3], p. 405, ou à Durand [6].

Nous ne citerons ici que l'algorithme de Remage et Thompson [19], qu'on peut améliorer en utilisant les propriétés 1 et 2. L'algorithme repose sur le fait que :

$$i(T) = \min_{X_1 \subset X} \{ i(T_1) + i(T'_1) + \min(m^+(X_1, \overline{X}_1) ; m^+(\overline{X}_1, X_1)) \}$$

où les notations sont celles de 3.1, T_1 désignant le sous-tournoi engendré par X_1.

On peut remarquer que l'on a aussi :

α) $i(T) = \min\limits_{x_i \in X} \{ i(T - \{ x_i \}) + \min(d^+(x_i) ; d^-(x_i)) \}.$

Remage et Thompson utilisent eux :

β) $i(T) = \min\limits_{x_i \in X} \{ i(T - \{ x_i \} + d^-(x_i) \}.$

Ceci revient à chercher les tournois transitifs associés commençant par x_i alors que dans la formule α) on cherche soit ceux commençant par x_i si : $d^-(x_i) \leqslant d^+(x_i)$, soit ceux finissant par x_i si : $d^-(x_i) \geqslant d^+(x_i)$. On peut se contenter d'utiliser la formule β) à condition de ne considérer que les x_i vérifiant : $d^+(x_i) \geqslant \left[\frac{n}{2}\right]$ (propriété 2). On peut noter que la formule α) redonne une démonstration de la propriété 2.

L'algorithme consiste à utiliser β) amélioré ou α) en notant que d'après le corollaire de la propriété 1, on doit avoir dans le tournoi transitif associé : (i_j, i_{j+1}) appartient à U.

1) On définit les ensembles X_j de la manière suivante : $(j \geqslant 1)$.

a) Soit x_1 appartenant à X vérifiant $d^+(x_1) \geqslant \left[\frac{n}{2}\right]$ alors $X_1 = X - \{ x_1 \}$;

b) Soit x_2 appartenant à X_1 vérifiant : $(x_1, x_2) \in U$ et $d^+{}_{T_1}(x_2) \geqslant \left[\frac{n-1}{2}\right]$ où T_1 est le sous-tournoi engendré par X_1 alors $X_2 = X_1 - \{x_2\}$;

c) On poursuit l'opération de la manière suivante : X_{j-1} étant défini, soit x_j appartenant à X_{j-1} vérifiant $(x_{j-1}, x_j) \in U$ et $d^+{}_{T_{j-1}}(x_j) \geqslant \left[\frac{n-j+1}{2}\right]$ où T_{j-1} est le sous-tournoi engendré par X_{j-1}.

Alors : $X_j = X_{j-1} - \{x_j\}$.

2) On a $X_n = \varnothing$. On calcule $d(T, O_n) = d^-(x_1) + d^-{}_{T_1}(x_2) + \ldots + d^-{}_{T_{j-1}}(x_j) + \ldots$ où O_n est le tournoi transitif $x_1 > x_2 \ldots > x_n$.

3) On effectue ceci sur tous les choix possibles de O_n déterminés par 1.

On obtient ainsi tous les tournois transitifs associés à T et par suite $i(T)$. On peut d'ailleurs arrêter l'algorithme à l'ensemble X_j si : $d^-(x_1) + d^-{}_{T_1}(x_2) \ldots + d^-{}_{T_{j-1}}(x_j) > M$ (supérieur ou égal à M si on ne veut que $i(T)$ et non tous les ordres associés), où M est un majorant d'initialisation ou le minimum des $d(T, O_n)$ pour les tournois transitifs O_n déjà envisagés. Le majorant d'initialisation peut être soit la distance de T au tournoi transitif induit par des sommets rangés par ordre de score décroissant, soit un majorant obtenu en 3.1, soit $f(n)$ si on la connaît.

Cet algorithme nécessite beaucoup d'opérations, environ la moitié de celles de l'algorithme de Remage et Thompson, soit $n\,2^{n-2}$. Si on veut obtenir tous les tournois transitifs associés, l'algorithme ci-dessus est pour l'instant la procédure la plus efficace ; mais si on ne veut obtenir que $i(T)$, il est souvent plus rapide d'utiliser des minorants et majorants, qui donnent $i(T)$ lorsqu'ils sont égaux. Des considérations de « symétrie » peuvent simplifier le problème. Nous allons expliquer ceci sur deux exemples.

Exemple 1

Soit le tournoi considéré par Remage et Thompson [19] (voir aussi Durand [6]) à 6 sommets et ayant pour arcs : $1 > 2, 3, 5, 6$ $\quad 2 > 4, 5$ $\quad 3 > 2, 4, 5, 6$ $\quad 4 > 1$ $\quad 5 > 4, 6$ $\quad 6 > 2, 4$.

On a, d'après 3.1, $i(T) \leqslant i(T_1) + i(T'_1) + m^+(X_1, \overline{X}_1)$ où $X_1 = \{1, 3\}$ $\;i(T_1) = 0$ $\;i(T'_1) \leqslant f(4) = 1$ $\;m^+(X_1, \overline{X}_1) = 1$ donc $i(T) \leqslant 2$. Le tournoi T contient 2 circuits disjoints par exemple (1, 2, 4) et (2, 5, 6), donc $i(T) \geqslant 2$; soit $i(T) = 2$.

Exemple 2

Il va nous permettre de déterminer $f(10)$ et $f(11)$.

3.5. Détermination de $f(10)$ et $f(11)$

Soit le tournoi T_{11} à 11 sommets et où $(i, j) \in U$ si $j - i$ est congru à un carré modulo 11 soit :

$1 > 2, 4, 5, 6, 10$ $\quad 2 > 3, 5, 6, 7, 11$ $\quad 3 > 1, 4, 6, 7, 8$ $\quad 4 > 2, 5, 7, 8, 9$ $\quad 5 > 3, 6, 8, 9, 10$
$6 > 4, 7, 9, 10, 11$ $\quad 7 > 1, 5, 8, 10, 11$ $\quad 8 > 1, 2, 6, 9, 11$ $\quad 9 > 1, 2, 3, 7, 10$ $\quad 10 > 2, 3, 4, 8, 11$
$11 > 1, 3, 4, 5, 9$.

Remarquons que $i(T) \leqslant f(11) \leqslant \varphi(11) = 20$ (d'après 3.1) (en effet, $\varphi(11) = \varphi(10) + 5$ et $\varphi(10) = \frac{1}{4} \cdot 90 - \frac{1}{4}(3.2 + 3.2^3) = 15$).

Les sommets de ce tournoi sont tous équivalents en ce sens qu'il existe un automorphisme du tournoi tel que l'un quelconque des sommets soit l'image du sommet 1 par exemple (il suffit de considérer les permutations circulaires qui à i associent $i + h$ (mod. 11), $h = 0, 1 \ldots 10$). On est donc ramené à chercher $i(T - \{j\})$ pour j quelconque, par exemple $j = 11$ et alors $i(T) = 5 + i(T - \{11\})$. Dans le tournoi T_{10} engendré par les 10 premiers sommets, les 5 sommets de score 5 : $\{1, 3, 4, 5, 9\}$ sont équivalents, ainsi que les 5 sommets de score 4 : $\{2, 6, 7, 8, 10\}$: il suffit de considérer les automorphismes associés aux puissances de la permutation : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 8 & 1 & 5 & 9 & 2 & 6 & 10 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

On peut donc choisir comme premier sommet d'un tournoi transitif associé à T_{10} l'un quelconque des sommets de score 5 ou comme dernier sommet l'un quelconque des sommets de score 4 : choisissons par exemple 10 comme dernier sommet, alors :

$$i(T_{10}) = d^{+}(10) + i(T_9) = 4 + i(T_9)$$

ou $T_9 = T_{10} - \{10\}$ est le tournoi engendré par les sommets 1, 2, ..., 9, soit :

$1 > 2, 4, 5, 6 \quad 2 > 3, 5, 6, 7 \quad 3 > 1, 4, 6, 7, 8 \quad 4 > 2, 5, 7, 8, 9 \quad 5 > 3, 6, 8, 9$
$6 > 4, 7, 9 \quad 7 > 1, 5, 8 \quad 8 > 1, 2, 6, 9 \quad 9 > 1, 2, 3, 7.$

On va montrer que $i(T_9) \geqslant 11$, ce qui entraînera $i(T_{11}) \geqslant 20$. On a ($11 > x$ dans T_{11} d'après le corollaire de la propriété 1) :

$$i(T_9) = \min_{x \in \{1, 3, 4, 5, 9\}} (d^{-}(x) + i(T_9 - \{x\})).$$

$x = 1$: dans $T_9 - \{1\}$, on a les 7 circuits disjoints : (2, 3, 4) (2, 5, 8) (2, 6, 9) (3, 7, 5) (3, 8, 9) (4, 5, 6) (6, 7, 8) et $d^{-}(1) = 4$, donc : $d^{-}(1) + i(T_9 - \{1\}) \geqslant 11$.

$x = 5$: dans $T_9 - \{5\}$, on a les 7 circuits disjoints : (1, 2, 7) (1, 4, 8) (1, 6, 9) (2, 3, 8) (2, 6, 4) (3, 4, 9) (6, 7, 8) comme $d^{-}(5) = 4$ $\quad d^{-}(5) + i(T_9 - \{5\}) \geqslant 11$.

$x = 9$: dans $T_9 - \{9\}$, on a les 7 circuits disjoints : (1, 2, 3) (1, 4, 7) (1, 5, 8) (2, 6, 4) (2, 7, 8) (3, 4, 5) (5, 6, 7) et $d^{-}(9) = 4$, donc : $d^{-}(9) + i(T_9 - \{9\}) \geqslant 11$.

$x = 3$: $T_8 = T_9 - \{3\}$ admet pour arcs : $1 > 2, 4, 5, 6 \quad 2 > 5, 6, 7 \quad 4 > 2, 5, 7, 8, 9 \quad 5 > 6, 8, 9$ $\quad 6 > 4, 7, 9 \quad 7 > 1, 5, 8 \quad 8 > 1, 2, 6, 9 \quad 9 > 1, 2, 7$.

On a :

$$i(T_8) = \min_{x \in \{1, 4, 8\}} (d^{-}_{T8}(x) + i(T_8 - \{x\})).$$

$d^{-}_{T8}(1) = 3$ et les 5 circuits disjoints (2, 5, 8) (2, 6, 9) (4, 8, 6) (5, 6, 7) (7, 8, 9)
$d^{-}_{T8}(4) = 2$ et les 6 circuits disjoints (1, 2, 7) (1, 5, 8) (1, 6, 9) (2, 5, 9) (5, 6, 7) (7, 8, 9)
$d^{-}_{T8}(8) = 3$ et les 5 circuits disjoints (1, 2, 7) (1, 4, 9) (2, 6, 9) (4, 5, 6) (5, 9, 7)

donc $i(T_8) \geqslant 8$ et comme $d^{-}(3) = 3$ $\quad d^{-}(3) + i(T_9 - \{3\}) \geqslant 11$.

$x = 4$: $T'_8 = T_9 - \{4\}$ admet pour arcs : $1 > 2, 5, 6 \quad 2 > 3, 5, 6, 7 \quad 3 > 1, 6, 7, 8 \quad 5 > 3, 6, 8, 9$ $\quad 6 > 7, 9 \quad 7 > 1, 5, 8 \quad 8 > 1, 2, 6, 9 \quad 9 > 1, 2, 3, 7$.

On peut montrer que $i(T'_8) \geqslant 8$, soit en utilisant que $i(T'_8) = \min_{x \in \{1, 6, 7\}} d^{+}(x) + i(T'_8 - \{x\})$ et en procédant comme pour $x = 3$, soit en remarquant que la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 5 & 2 & 3 & 7 & 4 & 1 & 9 & 6 \end{pmatrix}$ transforme T'_8 en T''_8 tournoi complémentaire de T_8; les arcs de T''_8 étant opposés à ceux de T_8; $i(T''_8) = i(T_8)$, donc : $i(T'_8) = i(T_8) \geqslant 8$. De $i(T'_8) \geqslant 8$ et $d^{-}(4) = 3$, on tire : $d^{-}(4) + i(T_9 - \{4\}) \geqslant 11$. On a donc bien : $i(T_9) \geqslant 11$, donc : $i(T_{11}) \geqslant 20$ comme $i(T_{11}) \leqslant 20$; on a : $i(T_{11}) = 20$.

De plus $f(11)$ étant inférieur ou égal à $\varphi(11) = 20$ $\qquad$ *$f(11) = 20$.*

On a aussi prouvé que $f(10) = 15$ (en effet $f(10) \leqslant \varphi(10) = 15$ et $f(10) \geqslant i(T_{10}) = 15$).

3.6. Valeurs de $f(n)$

En regroupant les résultats obtenus en 3.1 : majorant $\varphi(n)$ de $f(n)$ et majorants améliorés dans le cas $n = 13$, $n = 20$, $n = 21$; en 3.2 : minorant de $f(n) = \left[\frac{n}{3}\left[\frac{n-1}{2}\right]\right]$; et en 3.5 : valeurs de $f(10)$ et $f(11)$, on peut dresser le tableau :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Minorant de $f(n)$	0	0	1	1	3	4	7	8	12	13	18
Majorant de $f(n)$	0	0	1	1	3	4	7	8	12	15	20
$f(n)$	0	0	1	1	3	4	7	8	12	15	20

n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Minorant de $f(n)$	20	26	28	35	37	45	48	57	60	70	73	84	88	100
Majorant de $f(n)$	22*	28	33	40	44	52	59	68	74	84	92*	103*	110*	122*

Les valeurs marquées d'une * dans la ligne Majorant de $f(n)$ du tableau se déduisent du résultat suivant prouvé récemment par l'auteur : $f(12) \leqslant 22$ (démonstration disponible sur demande).

Conjecture : $f(n)$ = majorant indiqué dans le tableau pour $12 \leqslant n \leqslant 25$.

3.7. Étude des tournois vérifiant $i(T_n) = f(n)$

On va étudier les tournois non isomorphes d'indice égal à $f(n)$ pour les premières valeurs de n, ce qui peut suggérer des généralisations pour n quelconque et aussi éliminer certaines conjectures.

$n = 3$ on obtient le 3-circuit.

$n = 4$ on obtient les 3 tournois non transitifs.

$n = 5$ on a un seul tournoi à distance 3 : l'unique tournoi régulier à 5 éléments (voir fig. 1) ; en effet si T_5 n'est pas régulier il existe un sommet x de score 3 et alors :

$$i(T) \leqslant d^-(\mathrm{x}) + i(T - \{\mathrm{x}\}) \leqslant 1 + f(4) = 2.$$

$n = 6$ on a les 4 tournois quasi réguliers suivants :

(i) $1 > 2, 4, 5 \quad 2 > 3, 4, 5 \quad 3 > 1, 4, 6 \quad 4 > 5, 6 \quad 5 > 6, 3 \quad 6 > 1, 2$ les sommets de score 3 forment un circuit, ceux de score 2 forment un tournoi transitif.

(ii) $1 > 2, 3, 4 \quad 2 > 3, 5, 6 \quad 3 > 4, 5, 6 \quad 4 > 2, 5 \quad 5 > 1, 6 \quad 6 > 1, 4$ les 3 points de score 3 forment un tournoi transitif, ceux de score 2 forment un 3-circuit.

(iii) $1 > 2, 4, 5 \quad 2 > 3, 4, 6 \quad 3 > 1, 5, 6 \quad 4 > 3, 5 \quad 5 > 2, 6 \quad 6 > 1, 4$.

(iv) $1 > 2, 4, 5 \quad 2 > 3, 5, 6 \quad 3 > 1, 4, 6 \quad 4 > 2, 5 \quad 5 > 3, 6 \quad 6 > 1, 4$.

Pour ces deux tournois, les points de score 3 et ceux de score 2 forment des 3-circuits. Le tournoi $Tiii$ est le seul tournoi à 6 sommets n'ayant pas de sous-tournoi à 4 éléments transitif (Reid et Parker [17]).

L'autre tournoi à 6 sommets quasi régulier est le tournoi parfaitement quasi régulier (voir remarque 3.2) $1 > 2, 3, 4 \quad 2 > 3, 4, 5 \quad 3 > 4, 5, 6 \quad 4 > 5, 6 \quad 5 > 1, 6 \quad 6 > 1, 2$ tournoi qui est à distance 3 du tournoi transitif $1 > 2 > 3 > 4 > 5 > 6$.

Si le tournoi T_6 n'est pas quasi régulier, il existe au moins un sommet de score supérieur ou égal à 4 ou inférieur ou égal à 1, par exemple x tel que $d^+(\mathrm{x}) \geqslant 4$: si $d^+(\mathrm{x}) = 5$ alors T_6 est non fortement connexe et $i(T_6) = i(T_6 - \{\mathrm{x}\}) \leqslant 3$; si $d^+(\mathrm{x}) = 4$ il existe au moins un sommet y de score supérieur ou égal à 3 avec $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in U$; la proposition 3.1 appliquée au sous-tournoi T_1 engendré par $\{\mathrm{x}, \mathrm{y}\}$ donne $(i(T_1) = 0) \quad i(T_6) \leqslant f(4) + 2 = 3$.

$n = 7$: les tournois tels que $i(T_7) = 7$ sont les 2 tournois réguliers suivants :

— $1 > 2, 3, 5 \quad 2 > 3, 4, 6 \quad 3 > 4, 5, 7 \quad 4 > 1, 5, 6 \quad 5 > 2, 6, 7 \quad 6 > 1, 3, 7 \quad 7 > 1, 2, 4$ qui est le seul tournoi à 7 sommets sans tournoi transitif à 4 sommets (Reid et Parker [17]).

— $1 > 2, 3, 4 \quad 2 > 3, 5, 6 \quad 3 > 4, 6, 7 \quad 4 > 2, 5, 7 \quad 5 > 1, 3, 6 \quad 6 > 1, 3, 7 \quad 7 > 1, 2, 4$.

En effet, l'autre tournoi régulier (il n'y a que 3 tournois réguliers non isomorphes à 7 sommets : Kotzig [21]) est parfaitement régulier et donc vérifie $i(T_6) = 6$; et si T à 7 sommets n'est pas régulier, il existe au moins un sommet x de score 4 et $i(T) \leqslant 2 + f(6) = 6$.

A partir de $n = 8$, le recensement des tournois d'indice $f(n)$ devient difficile, car d'une part, on ne connaît pas le nombre de tournois réguliers ou quasi réguliers (problème posé par Kotzig [21]) et d'autre part il existe des tournois non réguliers d'indice $f(n)$: un exemple est fourni par le tournoi T_8 obtenu en 3.5 (ou son complémentaire T'_8) qui s'écrit après renumérotation : $1 > 2, 4, 5, 7, 8 \quad 2 > 3, 4, 6, 8 \quad 3 > 1, 4, 5, 6 \quad 4 > 5, 6, 7 \quad 5 > 2, 6, 8 \quad 6 > 1, 7, 8 \quad 7 > 2, 3, 5 \quad 8 > 3, 4, 7$ et a pour suite de scores $(5, 4, 4, 3, 3, 3, 3, 3)$.

Néanmoins pour $n = 9$ et $n = 11$ un argument semblable à $n = 7$ montre que les tournois d'indice $f(n)$ sont réguliers. (Pour $n = 9$ un exemple de tournoi d'indice 12 est donné par le produit lexicographique de deux 3-circuits (voir 3.2, remarque).)

Ceci nous amène à poser les conjectures suivantes :

Conjecture 1

Si n est impair les tournois d'indice $f(n)$ sont réguliers.

Conjecture 2

Si n est impair $n = 2p + 1 \quad f(2p + 1) = f(2p) + p$ (la conjecture 2 entraîne la conjecture 1).

Conjecture 3

Pour tout n il existe un tournoi régulier *ou quasi régulier* à distance $f(n)$ (la conjecture 2 entraîne la conjecture 3).

Certains résultats figurant dans cet article (proposition du 3.1, résultats du 3.4) ainsi qu'une étude de l'hypergraphe associé aux circuits d'un graphe se trouvent dans la thèse de Chaty [22].

BIBLIOGRAPHIE

[1] ASTIE A., "Comparaisons par paires et problèmes de classement : Estimation et tests statistiques", *Math. Sci. hum.*, n° 32, 1970, pp. 17-44.

[2] BARBUT M., "Note sur les ordres totaux à distance minimum d'une relation binaire donnée", *Math. Sci. hum.*, n° 17, 1966, pp. 47-48.

[3] BERGE C., *Graphes et hypergraphes*, Paris, Dunod, 1970.

[4] CHARTRAND G., GELLER D., et HEDETNIEMI S., "Graphs with forbidden subgraphs", *J. combinatorial Theory*, vol. 10, n° 1 ser. B, 1971, pp. 12-41.

[5] DAVID H. A., *The method of paired comparisons*, London, Griffin, 1963.

[6] DURAND B., "A propos du problème du nombre minimum d'arcs à enlever pour supprimer les circuits d'un graphe", *Math. Sci. hum.*, n° 20, 1967, pp. 61-66.

[7] ERDÖS P., et MOON J. W., "On sets of consistent arcs in a tournament", *Canadian math. Bull.*, 8, 1965, pp. 269-271.

[8] GRINDBERG E., et DAMBIT Ya., "Some properties of graphs containing circuits", *Latv. math. ezh.*, 1965, pp. 65-70 (en russe).

[9] KADANE J. B., "Some equivalence classes in paired comparisons", *Ann. math. Statist.*, 37, 1966, pp. 488-494.

[10] KENDALL M. G., *Rank Correlation Methods*, 3e ed., New York, Hafner, 1962.

[11] KENDALL M. G., et BABINGTON SMITH B., "On the method of paired comparisons", *Biometrika*, 33, 1940, pp. 239-251.

[12] JUNG H. A., "On subgraphs without cycles in a tournament", *Combinatorial theory and its applications II*, Balatonfüred, P. Erdös, A. Renyi, et V. T. Sös (eds.), Amsterdam, North-Holland, 1970, pp. 675-677.

[13] MOON J. W., *Topics on tournaments*, New York, Holt, 1968.

[14] MOON J. W., "Four combinatorial problems", *Combinatorial mathematics and its applications*, Oxford, D. J. A. Welsh (ed.), London - New York, Academic Press, 1971.

[15] ORE O., *Theory of graphs*, American Mathematical Society colloquium Publications, Vol. 38, 1962.

[16] REID K. B., "On set of arcs containing no cycles in tournaments", *Canad. math. Bull.*, 12 (1969), pp. 261-264.

[17] REID K. B., et PARKER E. T., "Disproof of a conjecture of Erdös and Moser on tournaments", *J. combinatorial theory*, vol. 9, n° 3, 1970, pp. 225-238.

[18] REMAGE R., et THOMPSON W. A., "Rankings from paired comparisons", *Ann. math. Statist.*, 35, 1964, pp. 739-747.

[19] REMAGE R., et THOMPSON W. A., "Maximum likelihood paired comparison rankings", *Biometrika*, 53, 1966, pp. 143-149.

[20] SLATER P., "Inconsistencies in a schedule of paired comparisons", *Biometrika*, 48, 1961, pp. 303-312.

[21] KOTZIG A., "Des cycles dans les tournois", *Théorie des graphes*, Rome, I.C.C., P. Rosenstiehl (ed.), Paris, Dunod, 1967, pp. 203-208.

[22] CHATY, G., *Cheminements remarquables dans les graphes : Existence, obtention, conservation*, thèse de doctorat d'état présentée à l'Université Paris VI, 22 Juin 1971.