C. d'Adhémar

Chroniques invariantes dans le filtre de la médiane mobile

Mathématiques et sciences humaines, tome 37 (1972), p. 27-35

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1972__37__27_0>

Math. Sci. hum. (10e année, nº 37, 1972, p. 27-35)

CHRONIQUES INVARIANTES DANS LE FILTRE DE LA MÉDIANE MOBILE

par

C. D'ADHÉMAR [1]

Dans cet article, Claude d'Adhémar *donne la solution complète du problème posé par la recherche des chroniques (séries chronologiques) invariantes dans le filtre de la* médiane mobile *centrée, bien connu des praticiens, et notamment des historiens (on connaît les beaux travaux de J. Meuvret sur ce filtre, et les variantes qu'il en a imaginées).*

L'intérêt qu'il y a à connaître cette solution vient de ce que tout opérateur de « lissage » ou de « filtrage » des chroniques n'est bien maîtrisé que lorsque l'on en connaît d'abord :

— *les chroniques* absorbées *ou « arrêtées » par le filtre, d'une part,*

— *les chroniques* invariantes, *celles qui traversent le filtre sans distorsion, d'autre part.*

En ce qui concerne le filtre de la médiane mobile centrée, la solution du premier problème est triviale ; quant au second, très simple à résoudre grâce aux outils généraux de l'algèbre linéaire, dans le cas des filtres applicables aux chroniques numériques-filtres de moyenne mobile, filtres de projection (moindres carrés), il constitue, pour le filtre de la médiane mobile, un problème de combinatoire pour lequel aucune « méthode générale » de résolution ne semble adéquate.

Le résultat établi par C. d'Adhémar *figure dans les* Éléments d'analyse mathématique des chroniques *que* C. Fourgeaud *et moi-même venons de publier (Hachette, 1971) ; mais la place nous a manqué, dans cet ouvrage, pour en donner la démonstration que l'on trouvera ici.*

Marc BARBUT

Le filtre de médiane mobile sur $2k+1$ points associe à toute chronique $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, à valeur dans un ensemble totalement ordonné E, la chronique $y = (y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots, y_{k+n}, \ldots)$ où y_t est la médiane [2] du segment $[x_{t-k}, x_{t+k}]$, de longueur $2k+1$ centré sur x_t (on entend par segment $[x_i, x_j]$, la suite des valeurs $\{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j\}$, et par longueur du segment, le nombre de ses éléments, ou points).

Une chronique est dite *invariante par médiane mobile* sur $2k+1$ points si $y_t = x_t$ pour tout $t \geqslant k+1$. Une telle chronique doit donc vérifier la condition suivante :

Tout segment de longueur $2k+1$ *centré en* x_t *admet* x_t *comme médiane.*

1. Centre de Mathématique Sociale, VIe Section, Maison des Sciences de l'Homme.

2. La médiane de $2k+1$ éléments d'un ensemble totalement ordonné est le $k+1$ième lorsqu'on range les $2k+1$ éléments dans l'ordre croissant ou décroissant.

Si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est de longueur finie n, la chronique filtrée $y = (y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots, y_{n-k})$ est de longueur $n - 2k$.

En termes de mots, si l'ensemble E, alors supposé fini, constitue les lettres d'un alphabet muni d'un ordre total, une chronique peut être interprétée comme un « mot » écrit avec cet alphabet. Dans le cas d'un alphabet de deux lettres a et b, un mot invariant par médiane mobile sur $2k + 1$ points est tel que tout segment de longueur $2k + 1$ centré sur a (respectivement b) comporte $k + 1$ fois a (b) et k fois b (a). Un algorithme de construction de tous les mots de ce type est donné au paragraphe III.

Exemples de chroniques invariantes

La chronique alternée (0, 1, 0, 1, ..., ...) qu'on peut représenter de la façon suivante :

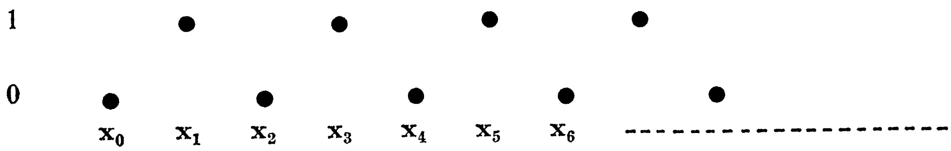

Fig. 1

est invariante pour toute médiane mobile sur $2k + 1$ points où k est un entier pair. (Tout segment centré en 0 (respectivement 1), de longueur $2k + 1$, avec k pair, contient $k + 1$ fois 0 (1).)

— Les chroniques monotones croissantes ($x_t \leqslant x_{t+1}$), ou monotones décroissantes ($x_t \geqslant x_{t+1}$, $\forall\, t$) sont invariantes pour tout k.

— Les chroniques admettant des « paliers de changement de sens de variation » d'au moins $k + 1$ points, autrement dit les chroniques pour lesquelles les phases croissantes et décroissantes sont séparées par au moins $k + 1$ valeurs constantes, et dualement (fig. 2).

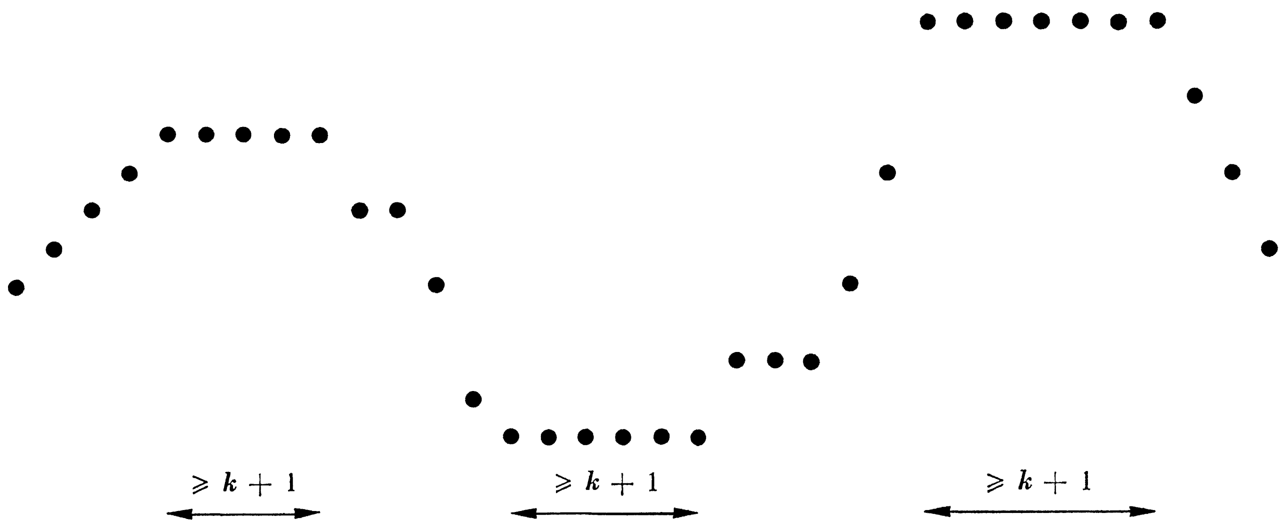

Fig. 2

L'objet de cet article est de montrer qu'il y a deux classes de chroniques invariantes (paragraphes I, II, III) et d'étudier les chroniques de la deuxième classe (paragraphe IV).

Ces deux classes de chroniques sont les suivantes :

Première classe

Toutes les chroniques dont tous les paliers de changement de sens de variation ont au moins $k + 1$ points.

Deuxième classe

Certaines chroniques périodiques, ne prenant que deux valeurs et dont tous les paliers de changement de sens de variation ont au plus $k - 1$ points.

On va montrer (paragraphes I et II) que si une chronique invariante n'est pas du premier type, elle est du second et trouver un procédé de construction de toutes ces chroniques (paragraphe IV). Pour alléger le texte, on remplacera l'expression « palier de changement de sens de variation » par « palier », et celle de « chronique invariante par médiane mobile sur $2k + 1$ points » par « chronique invariante ».

I. Si une chronique invariante admet un palier d'au plus k points, les deux paliers les plus voisins et situés de part et d'autre de celui-ci ont au plus $k - 1$ points, et donc, de proche en proche, tous les paliers ont au plus $k - 1$ points

Démonstration

Soit : $x_t = x_{t+1} = \dots = x_{t+h}$, $h \leqslant k - 1$ les points de ce palier P.

Supposons la chronique croissante avant ce palier, décroissante après (le cas dual se traiterait de façon duale).

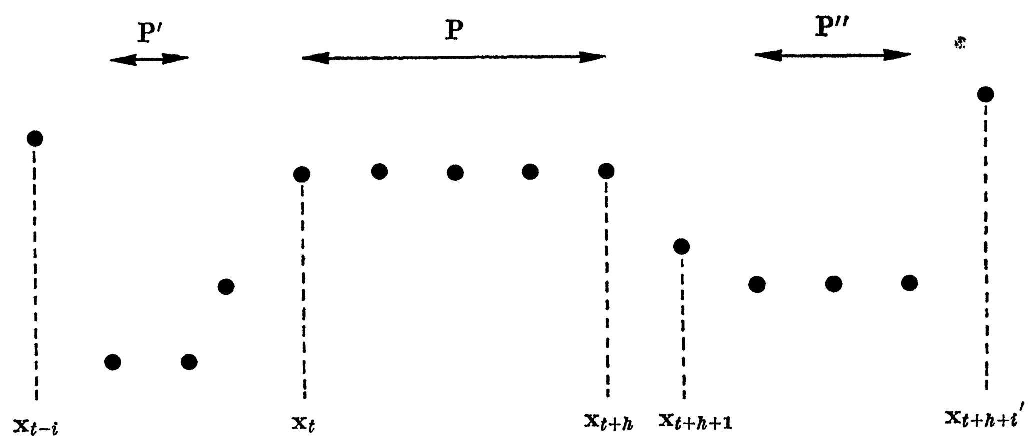

Fig. 3

On a :

$$x_{t-1} < x_t = x_{t+2} \dots = x_{t+h} > x_{t+h+1} .$$

Le segment $[x_t, x_{t+k}]$ contient au plus k points égaux ou supérieurs à x_t puisqu'il contient x_{t+h+1}, inférieur à x_t. Comme la médiane du segment $[x_{t-k}, x_{t+k}]$ est x_t, le segment $[x_{t-k}\, x_t]$ contient au moins un point x_{t-i} ($i \leqslant k$) supérieur ou égal à x_t.

De x_t à x_{t-i}, la chronique décroît puis croît. Il y a donc entre x_{t-i} et x_t un palier P′ (éventuellement réduit à un point), et ce palier a au plus $k - 1$ points. En raisonnant de façon analogue sur le segment de longueur $2k + 1$ centré en x_{t+h}, on vérifie que le palier P″, à droite de P, admet aussi au plus $k - 1$ points.

Si, dans une chronique invariante, un palier P a au plus k points :

— Il n'est pas le seul palier de la chronique ; il a obligatoirement des paliers « voisins » P′ et P″ qui ont au plus $k - 1$ points.

— En itérant l'opération, on vérifie :

1) que le palier P a en fait au plus k — 1 points ;

2) que tous les paliers de la chronique ont au plus k — 1 points.

II. LES CHRONIQUES INVARIANTES À PALIERS D'AU PLUS k — 1 POINTS NE PRENNENT QUE DEUX VALEURS.

La démonstration s'appuie sur le fait suivant :

Si I est un intervalle assez grand de la chronique, soit m le minimum et M le maximum des valeurs prises par la chronique, sur I. Si un segment de longueur $2\,k + 2$, inclus dans I, est centré sur un point $x_t = m$ suivi de $x_{t+1} = M$ (ou l'inverse), ce segment contient $k + 1$ points égaux à m et $k + 1$ égaux à M (la médiane en x_t est m, d'où, dans le segment $[x_{t-k}, x_{t+k}]$, au moins $k + 1$ points égaux ou inférieurs à m, donc égaux à m qui est le minimum des valeurs prises par la chronique dans I. De même $[x_{t-k+1}, x_{t+k+1}]$ contient au moins $k + 1$ points, égaux à M, donc dans $[x_{t-k}, x_{t+k+1}]$, il y a exactement $k + 1$ points égaux à m, $k + 1$ points égaux à M et $x_{t-k} = m$, $x_{t+k+1} = M$.

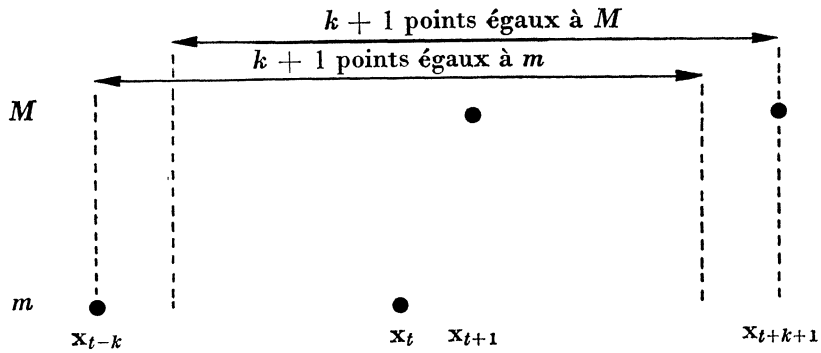

Fig. 4
Segment de type A

(Ce type de segment servira plusieurs fois dans les démonstrations. Dans le cas où la suite ne prend que deux valeurs a et b, il s'agit de segments centrés sur a suivi de b ou b suivi de a.) On notera ces segments, *segments de type A*. On va montrer maintenant qu'entre un point $x_t = m$ et un point $x_{t+h} = M$, la chronique ne peut prendre de valeurs différentes de m et M.

Soit donc $x_t = m$ et $x_{t+h} = M$. Dans le calcul de la médiane en x_t, le fait qu'entre x_t et x_{t-k} il ne puisse y avoir plus de k fois m (pas de paliers de longueur supérieure à k — 1) indique qu'il doit y avoir entre x_t et x_{t+k} au moins un point égal à m.

De proche en proche, en itérant ce raisonnement à gauche de x_t comme à droite, on vérifie que sur tout segment de longueur k inclus dans I, il y a au moins un point égal à m, et, par dualité, au moins un point égal à M.

Donc, si $x_t = m$, pour un entier $h \leqslant k$ il y a un point x_{t+h} égal à M.

Supposons qu'on puisse choisir x_t et x_{t+h} de telle sorte que le segment $[x_t, x_{t+h}]$ ne comporte pas d'autre point égal à m ou à M.

Le calcul de la médiane en $x_t = m$ indique que le segment $[x_{t-k}, x_{t+k}]$ contient au moins $k + 1$ points égaux à m. De même, le segment $[x_{t+h-k}, x_{t+h+k}]$ contient au moins $k + 1$ points égaux à M.

De ces comptes, on peut déduire que le segment $[x_{t-k}, x_{t+h+k}]$ contient au plus h — 1 points différents de m et M : ceux situés entre x_t et x_{t+h}.

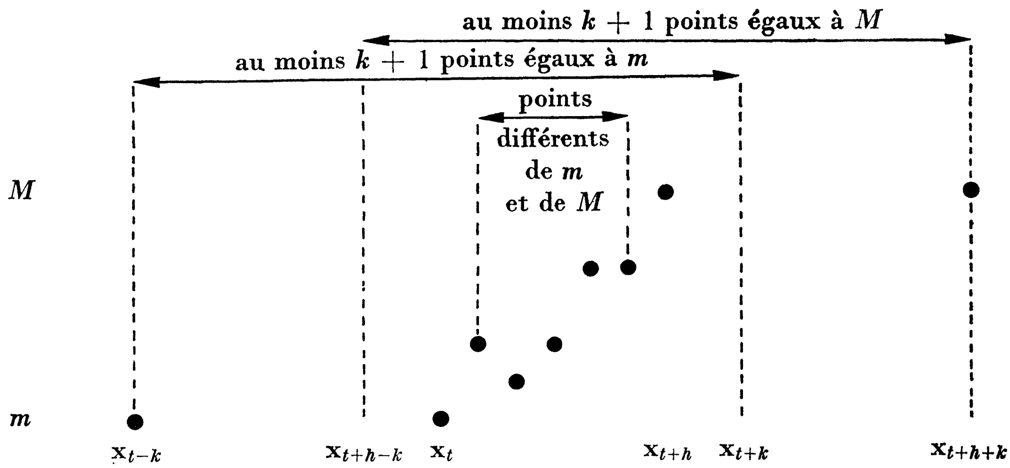

Fig. 5

Le calcul de la médiane en x_t indique que le segment $[x_{t+1}, x_{t+k}]$ contient au moins un point égal à m. Ce point ne peut être qu'entre x_{t+h} et x_{t+k}. Or ce segment qui commence par un M ne contient que des m et des M. Il existe donc dans $[x_{t+h}, x_{t+k}]$ un point $x_i = M$ suivi de $x_{i+1} = m$. Dualement, le segment $[x_{t+h-k}, x_t]$ contient un $x_{i'} = m$ précédé d'un $x_{i'-1} = M$. On peut alors recouvrir $[x_t, x_{t+h}]$ par deux segments de longueurs $2\,k + 2$ centrés l'un sur $[x_{i'-1}, x_{i'}]$, l'autre sur $[x_i, x_{i+1}]$, segments de type A qui, nous l'avons vu, ne comportent que des m et des M. C'est donc qu'entre un point $x_t = m$ et un point $x_{t+h} = M$, il ne peut y avoir de points différents de m et de M.

De proche en proche, on peut recouvrir tout le segment I par des segments de type A ne contenant que des m et des M et la chronique ne prend bien que ces deux valeurs.

Si, maintenant, I′ est un segment adjacent à I, il ne peut prendre que deux valeurs m' et M' et le segment I ∪ I′ aussi. C'est donc que $m = m'$ et $M = M'$. En itérant le raisonnement, on vérifie que la chronique entière ne prend que ces deux valeurs.

III. Les chroniques invariantes à paliers de longueur inférieure à k sont toutes périodiques, de période au plus égale à 2^{2k}

D'après II, une telle chronique ne prenant que deux valeurs, par exemple (a, b), il ne peut y avoir plus de 2^{2k} segments de longueurs $2\,k$ différents.

On va montrer que tout segment de longueur $2\,k$ d'une chronique invariante détermine, de façon unique, les valeurs de la chronique, en amont et en aval de ce segment.

S'il en est bien ainsi, et si I et I′ sont deux segments identiques les plus proches :

$$\mathrm{I} = [x_i, x_{i+2k-1}], \qquad \mathrm{I}' = [x_{i'}, x_{i'+2k-1}]$$

ils déterminent les mêmes valeurs en amont et en aval, et la chronique est de période $|\, i - i' \,|$.

Les $2^{2k} + 1$ segments successifs.

$$\begin{array}{c} [x_i, \quad \ldots, x_{i+2k-1}] \\ [x_{i+1}, \ldots, x_{i+2k}] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ [x_{i+2^{2k}}, \ldots, x_{i+2^{2k}+2k-1}] \end{array}$$

ne peuvent être tous distincts. Si I et I' sont deux segments identiques les plus proches, c'est donc que I' est l'un de ces $2^{2k} + 1$ segments, autrement dit la période $| i - i' |$ est au plus égale à 2^{2k}.

Montrons qu'un segment de longueur $2k$ d'une chronique invariante centré sur un $x_t = a$ suivi d'un $x_{t-1} = b$ (ou l'inverse), détermine entièrement la chronique (la démonstration pour un segment quelconque se déduira facilement de celle-ci).

Essayons de prolonger la chronique sur la droite.

Supposons que le palier (éventuellement réduit à un point) commençant en $x_{t+1} = b$ se termine en x_{t+h} $(h \geqslant 1)$.

Alors $x_{t+h+1} = a$.

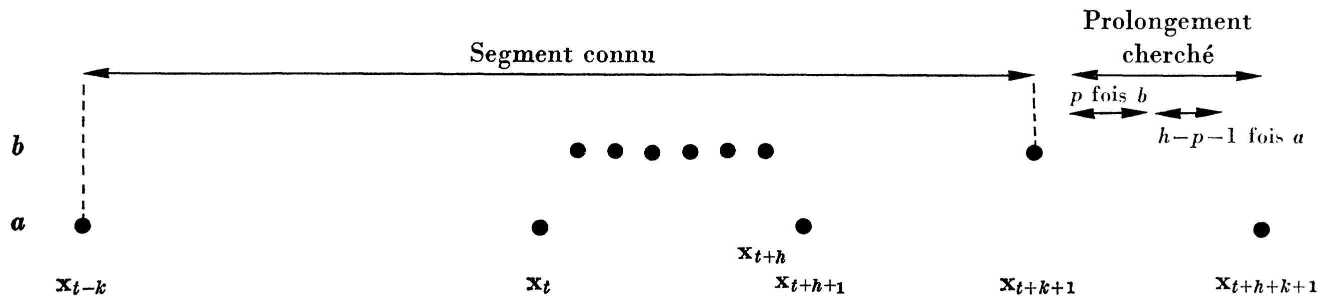

Fig. 6

Le segment de longueur $2k + 2$ (de type A) centré sur $x_{t+h} = b$ $x_{t+h+1} = a$ doit compter $k + 1$ fois a; $k + 1$ fois b, et $x_{t+h+k+1} = a$ (*cf.* paragraphe II ; ici $m = a$ $M = b$).

Pour équilibrer ce segment, on peut compter le nombre p de points b qu'il faut placer entre x_{t+k+1} et $x_{t+k+h+1}$ et le nombre $h - p - 1$ de points a.

Il n'y a aucune liberté dans la façon de placer ces a et ces b ; il faut tous les b d'abord (de x_{t+k+2} à $x_{t+k+1+p}$), puis les a.

En effet, entre x_{t+k+1} et $x_{t+k+h+1}$, on ne peut passer de a en b car le segment de type A centré sur ce passage de a en b devrait avoir à son extrémité gauche un point a, or cette extrémité se trouve au niveau du palier $[x_{t+1}, \ldots, x_{t+h}]$.

Par contre, rien n'empêche le passage de b en a. En itérant ce procédé (le segment de longueur $2k$ à prolonger est maintenant celui centré sur x_{t+h}, x_{t+h+1}), on prolonge de façon unique la chronique, sur la droite.

Même raisonnement pour la prolongation en amont.

IV. Algorithme de construction de toutes les chroniques invariantes, à paliers inférieurs à k

On peut se borner à construire les segments de type A de longueur $2k$ centrés sur un a suivi d'un b, puisque toute chronique du type cherché (à l'exclusion des deux chroniques constantes) en contient et est entièrement déterminée par un tel segment.

Deux chroniques égales à une translation près, seront considérées comme identiques.

Soit donc $x_t = a$ et $x_{t+1} = b$. On peut construire la moitié gauche du segment $[x_{t-k+1}, x_{t+k}]$, c'est-à-dire le segment $[x_{t-k+1}, x_t]$ en respectant seulement la contrainte : pas plus de $k - 1$ fois de suite la lettre a ou la lettre b (pas de palier de plus de $k - 1$ points). Il suffit pour cela de placer au moins un b, car $x_t = a$ et $x_{t-k} = a$.

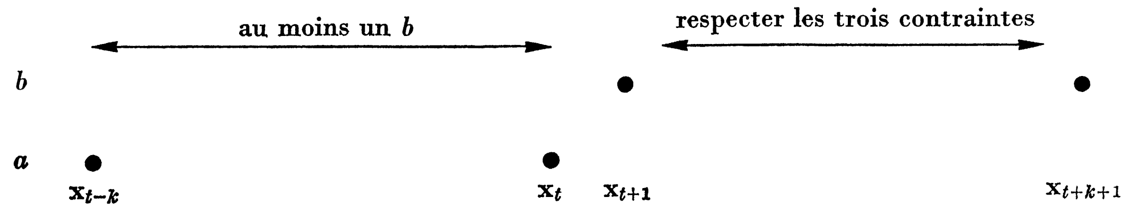

Fig. 7

Puis remplir la moitié droite du segment en respectant les contraintes :

1) Si dans la moitié gauche, un point $x_h = a$ est suivi de $x_{h+1} = b$, k points plus loin (en x_{h+1+k}) on doit placer un b (x_{h+1+k} est l'extrémité droite d'un segment de type A centré en a suivi de b). Et contrainte duale.

Autrement dit à chaque fois qu'il y a changement de variation de a en b (ou de b en a), on doit retrouver k points plus loin un b (un a). (*Cf.* fig. 8.)

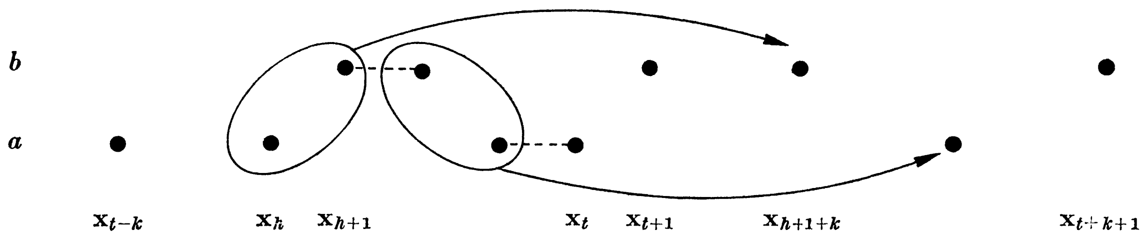

Fig. 8

2) Équilibrer le nombre de a et de b : si on a placé p points a et $k - p$ points b dans la moitié gauche du segment, il faudra p points b et $k - p$ points a dans la moitié droite.

3) On ne peut passer de $x_n = b$ en $x_{n+1} = a$ (de a en b) dans la moitié droite que si k points avant (extrémité gauche du segment de type A centré en b suivi de a), on a un b (un a).

Exemple : figure 9.

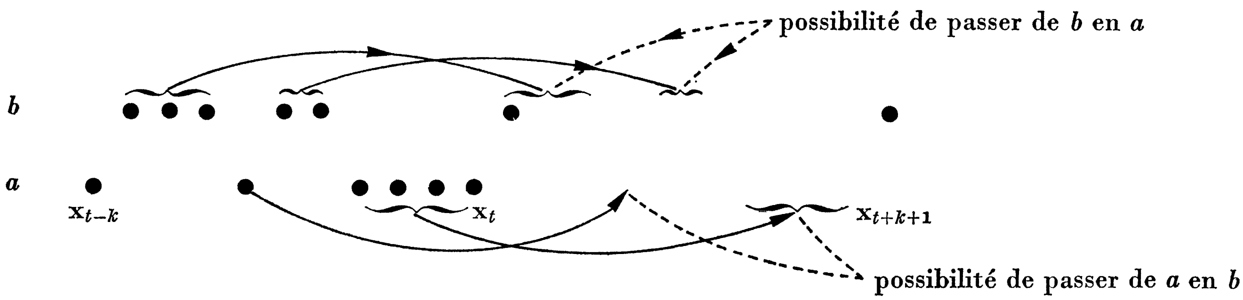

Fig. 9

Tout segment $[x_{t-k}, x_t]$ construit en évitant de placer plus de $k - 1$ points identiques à la suite, peut être prolongé d'au moins une façon en respectant les trois contraintes (par exemple en prenant $x_{t+h} = a$ si $x_{t-k-h+1} = b$ et dualement. $[x_{t+1}, x_{t+k}]$ est alors la répétition du segment $[x_{t-k}, x_{t-1}]$ à une permutation près des a et des b).

On peut vérifier que la prolongation d'un tel segment de longueur $2\,k$ par le procédé indiqué au paragraphe III est unique et que la chronique obtenue est invariante.

V. Construction des chroniques invariantes à paliers d'au plus $k - 1$ points pour quelques valeurs de k

Le dénombrement, pour tout entier k, des chroniques invariantes, n'a pas été fait. Seule une inégalité a été trouvée.

Pour une valeur donnée k, il y a au plus 2^{2k} segments de longueur $2\,k$ différents, et beaucoup moins de segments centrés sur a suivi de b et respectant les contraintes (plusieurs tels segments peuvent engendrer la même chronique). Donc moins de 2^{2k} chroniques invariantes à paliers inférieurs à k.

Si une chronique invariante x est de période n, elle comprend n des 2^{2k} segments de longueur $2\,k$. En effet, si $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ est une période, les segments $[x_1, x_{2k}]$, $[x_2, x_{2k+1}]$, $\ldots$, $[x_n, x_{2k+n-1}]$ sont tous distincts et aucun de ces segments ne se retrouvera dans une chronique distincte de x puisque chacun détermine entièrement la chronique.

Une chronique invariante de période n « absorbe » donc n segments. S'il y a :

p_1 chroniques invariantes de période 1
p_2 chroniques invariantes de période 2
.
.
.
p_q chroniques invariantes de période q,

on a vu que la plus grande période q est au plus égale à 2^{2k}.

Les p_i chroniques de longueur i nécessitent $p_i\, i$ segments de longueur 2^{2k} et finalement :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{q} p_i\, i \leqslant 2^{2k}}$$

Par la méthode indiquée en IV, on trouve :

$k = 1$ 0 chronique
$k = 2$ 1 chronique : la chronique alternée

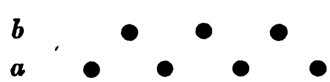

Fig. 10

$k = 3$ 1 chronique de période 8

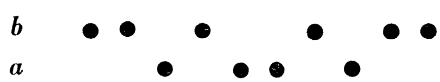

Fig. 11

$k = 4$ 3 chroniques : 1 de période 4
2 de période 10

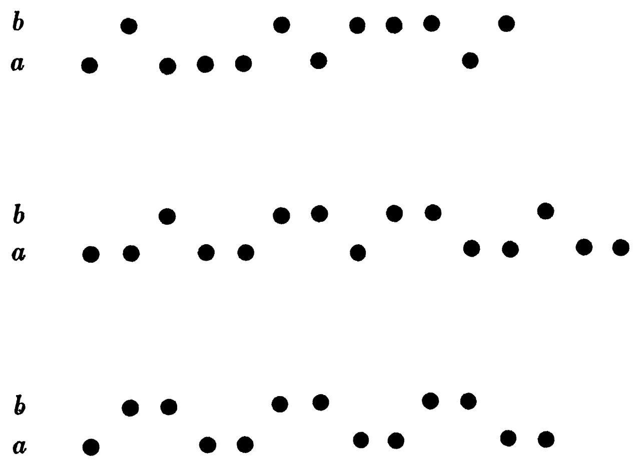

Fig. 12

$k = 5$ 6 chroniques

$k = 6$ 11 chroniques

On peut vérifier que $\Sigma\, p_i\, i$ est très inférieur à 2^{2k}.