MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

P. PARLEBAS

Effet Condorcet et dynamique sociométrique. I. L'ordre de préférence au niveau individuel

Mathématiques et sciences humaines, tome 36 (1971), p. 5-31
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1971__36__5_0>

Math. Sci. hum. (9e année, n° 36, 1971, p. 5-31)

EFFET CONDORCET ET DYNAMIQUE SOCIOMÉTRIQUE
I. L'ordre de préférence au niveau individuel

par

P. PARLEBAS[1]

A. Présentation

1. OBJECTIF

Quand un enfant classe ses proches camarades considérés deux à deux, il lui arrive parfois d'affirmer : « Je préfère Pierre à Claude, Claude à Jacques », puis d'affirmer encore : « Je préfère Jacques à Pierre » ($P > C$, $C > J$ et $J > P$). Un tel cas d'intransitivité ne laisse pas d'être déroutant au regard de la simple logique. On qualifie habituellement ce choix d'irrationnel; on le récuse en l'attribuant à l'inattention, à la fatigue, au hasard des fluctuations psychologiques.

Cette étude porte sur de telles préférences d'adolescents qui comparent deux à deux quelques-uns de leurs proches camarades de groupe, garçons et filles. L'objectif immédiat est d'observer si les préférences individuelles d'une part, les préférences collectives d'autre part se structurent de façon cohérente.

L'éventuelle incohérence des choix, mise à jour par la procédure Condorcet est-elle un fait rare ou fréquent ? Se produit-elle sur le plan individuel ou sur le plan collectif ?

Ces contradictions ont-elles un sens décelable, et lequel ? Ces paradoxes ont-ils une origine strictement individuelle ou sont-ils en relation avec la dynamique des groupes ?

Deux procédures sont utilisées simultanément : la méthode des comparaisons par paires (C P P) et le questionnaire sociométrique (Q S). Toutes deux s'appliquent rigoureusement aux mêmes situations et recourent identiquement à deux critères : le critère de préférence affective et le critère de préférence leadership. Les mêmes phénomènes sont explorés par deux approches différentes : les éventuelles convergences devraient offrir une possibilité d'interprétation accrue.

Au point de vue méthodologique, la puissance de la méthode des comparaisons doit permettre de sonder les qualités de l'appareil sociométrique : l'analyse mathématique des résultats autorise-t-elle à considérer ce questionnaire comme un outil valide, fidèle et sensible ?

L'objectif premier est de déceler des incohérences éventuelles dans les préférences individuelles et collectives et de tenter d'en trouver la signification à partir des influences de la dynamique des groupes en présence.

1. UER de Mathématiques, Logique Formelle et Informatique, Université René-Descartes, Paris.

2. HYPOTHÈSES

Selon notre hypothèse de base, les préférences illogiques ont une « logique » sous-jacente :
— *Au niveau individuel :* les paradoxes Condorcet ont pour origine un télescopage des critères. La dimension théoriquement adoptée pour établir les choix éclate de façon subreptice en sous-dimensions qui rentrent en conflit et créent ainsi des incohérences.
— *Au niveau collectif :* à une cohérence rationnelle correspond une cohésion affective. Les contradictions des effets Condorcet masquent une « logique » dépendant de la dynamique intra-groupe et inter-groupes.

L'hypothèse majeure, c'est que les effets Condorcet sont en relation directe avec la dynamique sociométrique.

3. DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL

1. *Conditions générales*

Cette expérience s'est déroulée au cours d'un séjour en chalet de montagne, d'une durée de 15 jours. Sur un total d'une cinquantaine d'enfants de 8 à 16 ans, les 22 plus âgés, pré-adolescents et adolescents, ont été directement concernés par les questionnaires, soit 12 filles et 10 garçons.

Les activités étaient mixtes; elles étaient principalement orientées vers la pratique du ski le matin et l'après-midi. La composition des groupes à l'intérieur du chalet a été fidèlement déterminée à partir des réponses des enfants aux différents questionnaires qui sont l'objet de cette étude. Les questionnaires ont été ainsi insérés dans le déroulement général des activités et ont été perçus par les enfants comme un moyen de participer aux décisions qui les concernaient.

2. *Passations des questionnaires*

Au cours du séjour, il y a eu deux passations :

— La première : ne comporte que le Q S; elle a lieu au bout de trois jours;

— La deuxième : comporte un Q S et les C P P : elle se situe dix jours après la première.

Les C P P portent sur les 6 garçons et les 6 filles qui ont été les plus choisis de la première passation sociométrique (garçons d'une part, filles d'autre part). Les quatre premières questions du Q S se rapportent au critère affectif, la cinquième au critère leadership.

Pour le critère affectif, on a retenu l'activité la plus susceptible de libérer les attirances profondes des sujets les uns pour les autres. La question a été celle-ci : « Quels camarades aimeriez-vous avoir à votre table pendant la veillée aux chandelles de ce soir ? ». Cette question tente de solliciter la dimension affective de la façon la plus « épurée » possible; en effet dans ce cas, ce critère n'est pas dépendant de contraintes d'exécution qui pourraient apporter un biais dans l'expression affective. Un tel biais serait apparu si on avait par exemple demandé : « Quels camarades aimeriez-vous avoir avec vous dans votre équipe de ski ? », car à coup sûr, auraient surgies des interférences dues aux capacités techniques de chacun.

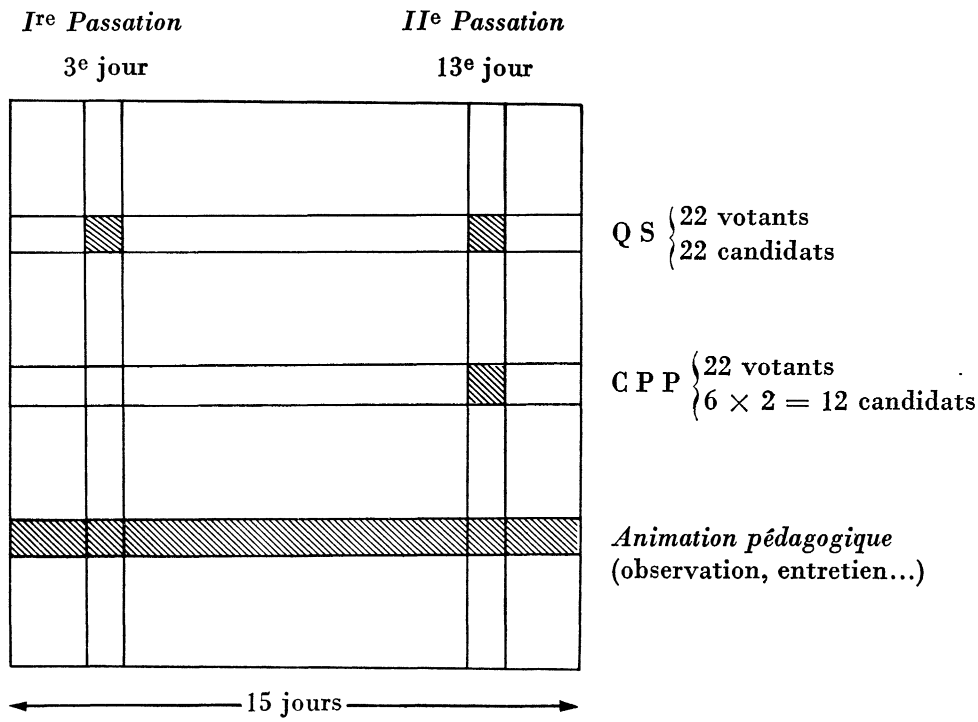
Pour le critère leadership, chaque enfant désignait les camarades qu'il préférait avoir comme responsable d'équipe, comme *chef de groupe*, camarades qui seraient chargés de prévoir et d'organiser la soirée.

Très schématiquement, voici les thèmes des questions posées :

1. *Choix :* « Avec qui, aimeriez-vous... ? ».
2. *Attente de choix :* « A votre avis, *qui vous a choisi...* ? ».
3. *Rejet :* « Avec qui *n'aimeriez-vous pas...* ? ».
4. *Attente de rejet :* « A votre avis, qui ne désire pas que vous soyez avec lui... ? ».
5. *Choix :* « Qui aimeriez-vous avoir comme *chef de groupe...* ? ».

Chaque enfant effectue ses différents choix parmi les camarades de son propre groupe, puis parmi les membres du groupe de l'autre sexe. Le nombre de choix n'est pas limité; il est demandé de classer les camarades désignés dans l'ordre de préférence décroissant.

Les C P P contiennent 4 blocs de 15 paires. En effet, les six candidats garçons sont tous comparés deux à deux par chaque enfant à deux reprises : d'abord à partir du critère affectif, puis selon le critère leadership; il en est de même pour les six filles. Ceci conduit chaque répondant à émettre 60 préférences : 30 pour les garçons et 30 pour les filles.



Organisation de l'expérience

4. DÉPOUILLEMENT ET INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS : distinction entre l'ordre individuel et l'ordre collectif

Dans l'étude des matériaux recueillis, il convient de faire une distinction fondamentale entre deux types de préférence.

1. *Les préférences au niveau individuel.*

Les choix ont tous été effectués de la part des enfants de façon standardisée et strictement personnelle. Chaque feuille de passation peut donc être traitée séparément, ce qui déterminera des échelles de préférences et des indices sociométriques individuels.

2. *Les préférences au niveau collectif.*

Par composition des choix personnels il est possible de mettre en évidence des échelles de préférences collectives; nous utiliserons pour cela la procédure Condorcet, à cause de sa rigueur et de ses possibilités de détection de certains phénomènes psycho-sociaux, conformément à notre corps d'hypothèses.

Parallèlement seront dressés les sociogrammes qui révéleront les structures des groupes.

Ces deux niveaux sont très différents :
— *Dans le cas individuel :* il s'agit d'une hiérarchie interne, établie par un seul sujet, par un seul centre de signification. Une exigence de cohérence semble s'imposer nécessairement.
— *Dans le cas collectif :* il s'agit d'une hiérarchie réalisée par agrégation d'opinions issues de plusieurs sujets.
Des échelles *individuelles* rigoureusement *rationnelles* peuvent en se combinant, selon les majorités binaires de la procédure Condorcet, donner naissance à une opinion *collective irrationnelle ;* la détection d'un tel phénomène peut être riche d'interprétations. Il sera possible de composer les opinions individuelles selon les groupements que l'on désire tester. Ainsi, la façon dont s'agrègent les préférences des membres d'un groupe pourra éventuellement être le révélateur de la rationalité de ce groupe.

B. L'ordre de préférence au niveau individuel

1. LA RELATION DE PRÉFÉRENCE : une relation de tournoi

Les 6 candidats sont présentés deux par deux; pour chaque paire, le votant émet un « avis », c'est-à-dire qu'il choisit obligatoirement un nom, ce qui élimine la présence d'éventuels ex-aequo. L'ensemble des 15 « avis » constitue une « opinion ». Chaque opinion détermine donc une relation binaire entre les six candidats.

Soit deux enfants de la population C de candidats. On a : x « est préféré à » y.

$$x \, R \, y \qquad \text{ou} \qquad (x, y) \in R.$$

Caractéristiques de cette relation binaire

1. *Cette relation est anti-symétrique* (absence d'ex-aequo) :

$$\forall\, x, y, \in C \quad \left.\begin{array}{r}(x, y) \in R \\ \text{et} \\ (y, x) \in R\end{array}\right\} \Rightarrow x = y$$

2. *Cette relation est complète :* par construction même de l'épreuve, un choix est demandé pour chaque paire de candidats $(x, y) \notin R \Rightarrow (y, x) \in R$. Pour une population de n candidats, il y a :

$$\binom{n}{2} = \frac{n\,(n-1)}{2}$$

paires présentées, soit dans notre cas où $n = 6$, 15 choix à exprimer.

3. *Cette relation peut être considérée comme réflexive :* la réflexivité n'a pas ici de réalité opératoire, car aucun candidat n'est comparé à lui-même. Mais d'une part, en s'accordant la réflexivité, on ne nuit pas aux propriétés de la relation de préférence, d'autre part on facilite la formalisation.
Par convention, admettons que cette relation de préférence prise au sens large puisse être considérée comme réflexive :

$$\forall\, x \in C,\ (x, x) \in R.$$

4. *Cette relation est soit transitive, soit intransivive.*
— *La relation est transitive*, si le votant est « rationnel ».

Dans ce cas où la logique est respectée, on a :

$$\forall\, x, y, z \in C \qquad \left.\begin{array}{r}(x, y) \in R \\ \text{et} \\ (y, z) \in R\end{array}\right\} \Rightarrow (x, z) \in R$$

Il s'agit alors d'une relation d'ordre total; l'ensemble des candidats est complètement ordonné. A chaque votant, on attribue une *échelle* de préférences rigoureusement définie.
— *La relation n'est pas transitive :* il y a des choix « paradoxaux », des préférences circulaires. Dans ce cas, il n'y a plus relation d'ordre total. Selon l'expression proposée par G. Th. Guilbaud, en l'honneur du découvreur du phénomène, il y a effet Condorcet [1].

Une telle relation de préférence antisymétrique et complète est une *relation de tournoi.* La réflexivité, l'antisymétrie et la complétude sont des données qu'on s'octroie au départ; elles ne posent guère de difficulté. Le cœur du problème, c'est la *transitivité.* C'est une exigence logique. Cette étude est orientée vers la détection, la quantification et la signification des cas d'intransitivité.

Dans les opinions individuelles réellement exprimées par des adolescents, observe-t-on des cas d'intransitivité ? Peut-on dénombrer ces contradictions, évaluer leur importance relative, peut-on trouver des« raisons » à ce manque de raison ?

2. LES EFFETS CONDORCET

La procédure des C P P, pour chacun des 22 votants, donne 4 opinions, c'est-à-dire 4 échelles de préférence. A chaque votant et pour chaque critère, une échelle ordonne les 6 garçons et une autre ordonne les 6 filles. Le total d'échelles obtenues est de ($4 \times 22 =$) 88 échelles. Les 12 candidats font aussi partie des votants; ils n'émettent pas de choix pour toute paire dont ils sont l'un des éléments. Dans ce cas, ils réalisent $\left(\binom{5}{2} = \right)$ 10 choix et ordonnent 5 candidats (soit 24 échelles sur 88). Les réponses enregistrées sur les ordres possédant 5 candidats ont conduit à des résultats analogues à ceux des ordres comptant 6 candidats. Aussi pour alléger, ne détaillerons-nous que rarement les deux types de réponses.

Le dépouillement s'effectue selon la procédure Condorcet, en ordonnant les candidats à partir des préférences binaires de chacune des 15 comparaisons. A l'effet Condorcet (E C) d'une échelle, peut correspondre un ou plusieurs cas d'intransitivité interne : c'est-à-dire que le renversement d'un ou de plusieurs avis est nécessaire pour retrouver un classement transitif.
Constat des faits : sur 88 échelles, il y en a 13 qui sont entachées d'effet Condorcet, soit un pourcentage de 14,8.

Y a-t-il des fréquences d'E C significativement différentes selon les grandes variables mises en jeu ?
— *les votants :* les garçons produisent 6/40 (15%) E C contre 7/48 (14,6%) pour les filles;
— *les candidats :* 6 E C sont suscités par les garçons et 7 par les filles;
— *les critères :* 5 E C sont occasionnés par le critère affectif et 8 par le critère leadership. Rien de significatif n'apparaît.

Quelle est la signification du pourcentage constaté d'effets Condorcet ?

Pour interpréter les 15% d'E C constatés, nous allons comparer nos résultats à ceux que donneraient trois types de situations particulières :
— Le pourcentage d'E C donné par des choix cohérents, c'est-à-dire respectant la transitivité : c'est le critère de la logique;
— Le pourcentage d'E C, obtenu en situation aléatoire : c'est le critère de la probabilité correspondant au hasard;
— Le pourcentage d'E C constaté lors de travaux psychologiques semblables : c'est la référence à une réalité psychologique observée dans des conditions voisines.

1. *Comparaison selon le critère de la logique*

Dans un tel cas, il n'y aurait aucun E C. Les 15% d'E C obtenus diffèrent considérablement du pourcentage nul que donneraient des choix rationnels. Comment expliquer les 15% d'E C ? Plusieurs facteurs sont fréquemment invoqués. Ainsi que le signale Claude Flament, on fait traditionnellement appel à « l'inintérêt », à la « fatigue », à la « difficulté » de différenciation [6].

Examinons ces trois facteurs :

— *L'inintérêt :* dans cette situation précise, ce questionnaire est un outil pédagogique. Les enfants savent que l'organisation de leur soirée dépend de leurs propres choix; ils se sentent partie prenante dans les décisions; aussi leur niveau de motivation, leur intérêt est-il élevé.

— *La fatigue :* aucune différence marquée n'apparaît dans la succession des phases, d'autant que certains répondants qui présentent un E C lors de la 1re ou de la 2e tranche, n'ont plus de contradiction dans les deux dernières.

— *La difficulté de différenciation :* P. Fouilhé, l'auteur d'un travail qui servira de référence [2] affirme que le plus fréquemment, les E C « interviennent entre personnages voisins sur l'échelle moyenne de la population, et ce phénomène est d'autant plus apparent que ces personnages se situent plus au centre de l'échelle moyenne ».

Or, ces deux propositions sont incompatibles avec les résultats observés sur les échelles individuelles :

— *Les E C ne concernent pas uniquement les candidats voisins sur l'échelle :* si la moitié des E C est produite avec strict voisinage, l'autre moitié a lieu avec éloignement (la moitié des circuits de longueur maximum est d'un ordre supérieur à trois).

— *Les E C affectent les sujets des extrémités* avec la même fréquence que ceux du centre (50%).

Ces constatations sont importantes, car elles diminuent le crédit qu'on peut accorder à une explication en termes de difficulté de différenciation de candidats classés selon une seule dimension. Le fait par exemple, qu'un sujet classé 5e surclasse brutalement le premier, alors que tous les autres choix sont transitifs n'est pas sans étonner; on est tenté de se poser la question : toutes les préférences ont-elles été réalisées avec le même étalon ? Est-ce le même critère qui a été utilisé au cours des 15 choix successifs ? Les « avis » incohérents avec l'ensemble n'ont-ils pas pour origine l'existence de plusieurs dimensions différentes de cohérence ?

Il faudra pousser l'analyse plus loin pour répondre à cette question.

2. *Comparaison selon le critère de la probabilité correspondant au hasard*

Dans le cas où les choix seraient purement aléatoires, quelle proportion d'E C obtiendrait-on dans notre situation ?

Le nombre de candidats est $n = 6$; le nombre total d'ordres possibles est de $n! = 6! = 720$. Mais le nombre de systèmes de réponses possibles (chacun étant constitué de 15 « avis ») est beaucoup plus important. Il est égal au nombre d'applications d'un ensemble à 15 éléments dans un ensemble à 2 éléments (choix dichotomiques) soit : $2^{15} = 32\,768$ systèmes possibles.

Le pourcentage d'opinions transitives est donc :

$$\frac{n!}{2^{\binom{n}{2}}} = \frac{6!}{2^{15}} = \frac{720}{32\,768} = 0{,}022 \qquad \text{soit } 2{,}2\%,$$

Il y a donc :

$$1 - \frac{n!}{2^{\binom{n}{2}}} = 0{,}978$$

soit 97,8% d'opinions intransitives donc d'E C possibles.

Si le hasard présidait seul au choix comparant six candidats, 97,8% des ordres seraient contraires à la logique des préférences. Dans le cas où les candidats ne sont que cinq, ce pourcentage est :

$$1 - \frac{5!}{2^{\binom{5}{2}}} = 1 - \frac{120}{1\,024} = 88{,}3\%.$$

En tenant compte des deux populations de candidats, nous obtenons :
pour $n = 6$: 97,8% d'E C dus au hasard contre 11/64 (17%) empiriquement constatés,
pour $n = 5$: 88,3% d'E C fruits du hasard contre 2/24 (8%) empiriquement constatés.

Les différences sont probantes : les choix des sujets ne sont aucunement assimilables à ce que produirait le hasard.

3. *Comparaison avec les résultats d'une enquête utilisant les C P P sur une population d'enfants*

Cette enquête, réalisée par P. Fouilhé, porte sur 1 600 élèves des écoles primaires du département de la Seine [2]. Le questionnaire demande de comparer 8 candidats qui sont, non pas des camarades de groupe, mais des personnages de la presse enfantine : aviateur, cow-boy, corsaire, détective... L'auteur constate que la présence d'E C décroît avec l'âge en passant du cours élémentaire au cours complémentaire. Dans notre population, nous avons retrouvé cette influence génétique mais uniquement au niveau des adolescentes : six E C produits par les six plus jeunes, contre un seul pour les six plus âgées; les filles plus âgées de notre groupe structurent leurs choix de façon plus cohérente que les plus jeunes. L'âge intervenant, nous n'avons utilisé comme références que les élèves des cours complémentaires qui sont sensiblement du même âge que les nôtres.

Dans ce cas, le pourcentage constaté d'E C est de 62%, c'est-à-dire quatre fois le pourcentage observé au centre de neige.

Il est intéressant de noter dès à présent, un résultat sur lequel nous reviendrons en le mettant en évidence : le degré d'incohérence des E C est nettement plus prononcé dans l'enquête de P. Fouilhé.

Il ressort de la comparaison entre les deux enquêtes :
— Que le pourcentage d'E C dans notre cas est *faible* relativement à l'autre enquête; la différence est massive : 15% contre 62%;
— Que dans les 15% d'E C constatés, les incohérences sont relativement *peu accusées.*

Comparons dans un tableau, les différents pourcentages d'E C en fonction de l'origine des choix :

Choix rationnels	Choix des enfants du centre de ski	Choix des enfants de l'enquête Fouilhé	Choix dus au hasard
0	15	62	97,8

Pourcentage d'effet Condorcet en fonction de l'origine des préférences

Les 15% d'E C observés sont significativement différents de tous les autres pourcentages.

La faiblesse relative de cette proportion d'E C met celle-ci aux antipodes d'un phénomène purement aléatoire; elle l'oppose franchement à la proportion observée lors d'une autre enquête. Tout en décelant un pourcentage d'incohérences non négligeable, elle semble cependant montrer que les préférences des 88 échelles correspondent à des préférences fortement structurées dans l'ensemble.

Les deux questions que nous nous posons à l'issue de ce premier examen sont celles-ci :
— Pourquoi les choix effectués dans notre situation ne sont-ils pas *tous* cohérents ?
— Mais aussi pourquoi, comparativement à d'autres cas, ont-ils *tant* de cohérence ?

3. GRAPHES DE TOURNOI ET CIRCUITS D'ORDRE 3

Dans notre cas, l'utilisation des graphes de préférences et de leur matrice associée va permettre de pénétrer plus avant dans les phénomènes d'incohérence. La relation binaire de préférence peut être représentée par un graphe anti-symétrique et complet (G) appelé ***graphe de tournoi***. Nous disposons d'un ensemble de candidats C que nous représentons par des points ou sommets du graphe; les combinaisons deux à deux de tous ces candidats représentent l'ensemble des votes V; chaque vote ou préférence est figuré par un arc orienté dans le sens du classement. Dans notre cas, il y a six sommets, donc quinze arcs (nous délaissons les six boucles de la réflexivité conventionnelle qui encombreraient inutilement).

Les quinze arcs du graphe (G) représentent ainsi l'ensemble des couples du produit cartésien C^2 pour lesquels la relation de préférence A est vérifiée.

$$\forall\, x, y \in C,\ x\,R\,y \Rightarrow (x, y) \in V \qquad \text{et} \qquad G = (C, V).$$

Ce graphe de tournoi peut être transitif ou intransitif. Par l'analyse des graphes, est-il possible de détecter l'intransitivité des choix et de *quantifier* leur degré d'incohérence ?

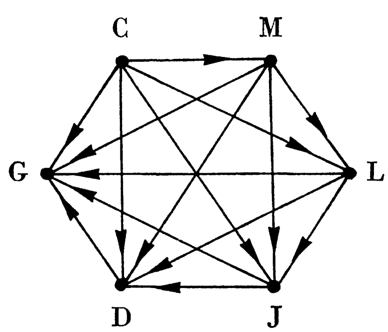
Soit le graphe G_1 de Pierre (candidat: les garçons; critère: affectif). (Pour des raisons déontologiques évidentes, tous les noms ont été changés.)

Dressons la matrice booléenne de ce graphe. Cette matrice est un tableau carré d'ordre 6, formé de tous les couples du produit cartésien $C \times C$. Il contient donc $|C| \times |C| = 36$ cases, chaque case a_{ij} valant 0 ou 1.

Si i est préféré à j : $a_{ij} = 1$.

Si j est préféré à i : $a_{ij} = 0$.

Les cases où $i = j$ contiennent un 0 car un candidat n'est pas comparé à lui-même.



G_1 : *graphe de Pierre*

	C	M	L	J	D	G	Scores S_i
C	0	1	1	1	1	1	5
M	0	0	1	1	1	1	4
L	0	0	0	1	1	1	3
J	0	0	0	0	1	1	2
D	0	0	0	0	0	1	1
G	0	0	0	0	0	0	0
	0	1	2	3	4	5	$\sum_{i \in G_1} S_i = 15$

Matrice booléenne M_1 associée à G_1

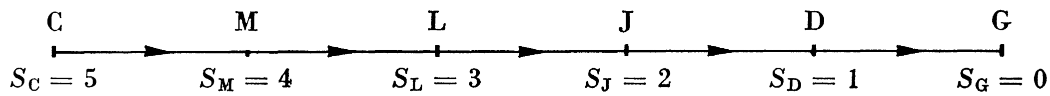
La somme des contenus des cases de la ligne C vaut 5; elle représente le nombre de fois où Claude a été préféré aux autres candidats; c'est le *score* (S_C) de Claude. Complémentairement, la somme de la colonne indique le nombre de fois où les autres lui ont été préférés (0 pour Claude). Le total de ces deux sommes vaut $n - 1$ pour tout sujet. D'autre part :

$$\sum_{i \in C} S_i = \frac{n(n-1)}{2} = 15.$$

La somme des scores est égale au nombre des arcs, ce qui caractérise tous les graphes de tournoi transitifs ou non.

Les scores S_i du graphe G_1 présentent la particularité de pouvoir être ordonnés comme la suite des entiers de 0 à $(n - 1)$. C'est une condition nécessaire et suffisante pour que le graphe de tournoi soit transitif. G_1 est donc transitif et son vecteur-score est alors : $\vec{V}_1 = (0, 1, 2, 3, 4, 5)$.

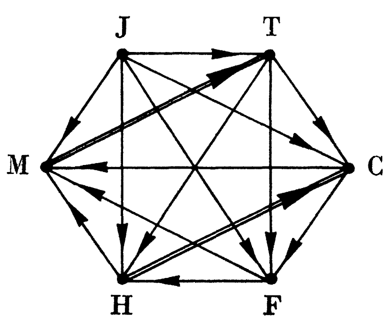
Nous constatons qu'il possède un et un seul *chemin hamiltonien*, c'est-à-dire un chemin qui passe une fois et une seule par chaque sommet, ce qui est encore une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe soit transitif. Le développement de ce chemin hamiltonien sur une droite donne l'échelle de préférence de Pierre où les 6 candidats sont totalement ordonnés selon la suite des scores décroissants.



Chemin hamiltonien de G_1 : échelle de préférence correspondant au vecteur-score $V_1 = (0, 1, 2, 3, 4, 5)$

Dans les marges de la matrice, les candidats ont été classés selon le chemin hamiltonien; nous obtenons alors une *matrice triangulaire supérieure*, c'est-à-dire un tableau dans lequel toutes les cases situées au-dessous de la diagonale sont nulles. L'obtention d'une telle matrice est une condition nécessaire et suffisante pour que le graphe soit transitif. Dans notre cas, sur 88 graphes, nous obtenons 75 matrices triangulaires supérieures semblables à M_1 répondant à 75 opinions transitives.

Examinons un autre exemple : le graphe G_2 de Jean (candidats : les filles; critère : leadership).



G_2 : graphe intransitif de Jean

	J	T	C	F	H	M	S_i
J	0	1	1	1	1	1	5
T	0	0	1	1	1	0	3
C	0	0	0	1	0	1	2
F	0	0	0	0	1	1	2
H	0	0	1	0	0	1	2
M	0	1	0	0	0	0	1
	0	2	3	3	3	4	$\sum_{i \in G_2} S_i = 15$

Matrice booléenne M_2 associée à G_2

Si les scores ont bien une somme valant $\binom{n}{2} = 15$, leur suite ne peut pas s'ordonner de 0 à $(n - 1)$. Ce graphe est donc intransitif. Il possède plusieurs chemins qui reviennent à leur point de départ, c'est-à-dire plusieurs *circuits*; par exemple un circuit d'ordre 3 (C, F, H, C), un circuit d'ordre 5 (T, C, F, H, M, T). La présence d'un circuit est une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe soit intransitif.

On entend par *degré d'intransitivité* d'un tournoi, le nombre minimum d'arcs dont il est nécessaire de changer le sens pour que ce tournoi devienne transitif (distance minimum d'un tournoi à l'ordre total le plus proche).

Pour rendre G_2 transitif, il suffit d'inverser deux arcs : MT et HC; le *degré d'intransitivité* de G_2 est donc de 2; l'E C disparaîtrait si ces deux votes étaient renversés. Sur les 13 E C observés, le degré d'intransitivité est de 1 pour dix d'entre eux et de 2 pour les trois autres.

Tout graphe de tournoi intransitif, tel G_2, possède au moins un triangle intransitif et tout graphe transitif, tel G_1 n'en possède aucun. En effet, pour qu'un graphe soit transitif, il faut et il suffit que tous ses triplets le soient. L'étude des triplets du graphe est donc capitale.

Nombre total de triplets (T) *dans chaque graphe de tournoi*

Pour n sommets :

$$\boxed{T = \binom{n}{3} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{6}}$$

quand $n = 6$: $T = 20$; pour $n = 5$: $T = 10$.

Nombre de triplets intransitifs observés (T_c)

A partir des « avis », il suffit de dresser la matrice des préférences avec ses différents scores S_i. Le nombre T_c de 3-circuits, c'est-à-dire de circuits d'ordre 3, se calcule ainsi :

$$\boxed{T_c = T - \sum_{i \in C} \frac{S_i\,(S_i - 1)}{2}}$$

Pour G_2 :

$$T_c = 20 - \frac{(5 \times 4) + (3 \times 2) + (2 \times 1) + (2 \times 1) + (2 \times 1) + (1 \times 0)}{2}$$

$$T_c = 20 - 16 = 4.$$

Le graphe de Jean contient donc 4 circuits d'ordre 3; l'inspection de G_2 décèle aisément ces 4 triades : (HCF), (MTH), (MTF), (MTC).

Le traitement des 88 opinions, donne le décompte suivant :

Nombre de circuits d'ordre 3 par opinion (T_c)	0	1	2	3	4	5 et au delà
Nombre d'opinions correspondantes	75	7	2	1	3	aucune

Pour que ces effectifs de triades circulaires (T_c) prennent de l'intérêt, il convient de les rapporter au maximum obtenu dans le cas limite.

Le nombre maximum de triplets intransitifs T_c est égal à :
Pour $n = 6$ (n pair) :

$$T_c\,(\max) = \frac{(n-2)\,n\,(n+2)}{24} = 8.$$

Pour $n = 5$ (n impair) :

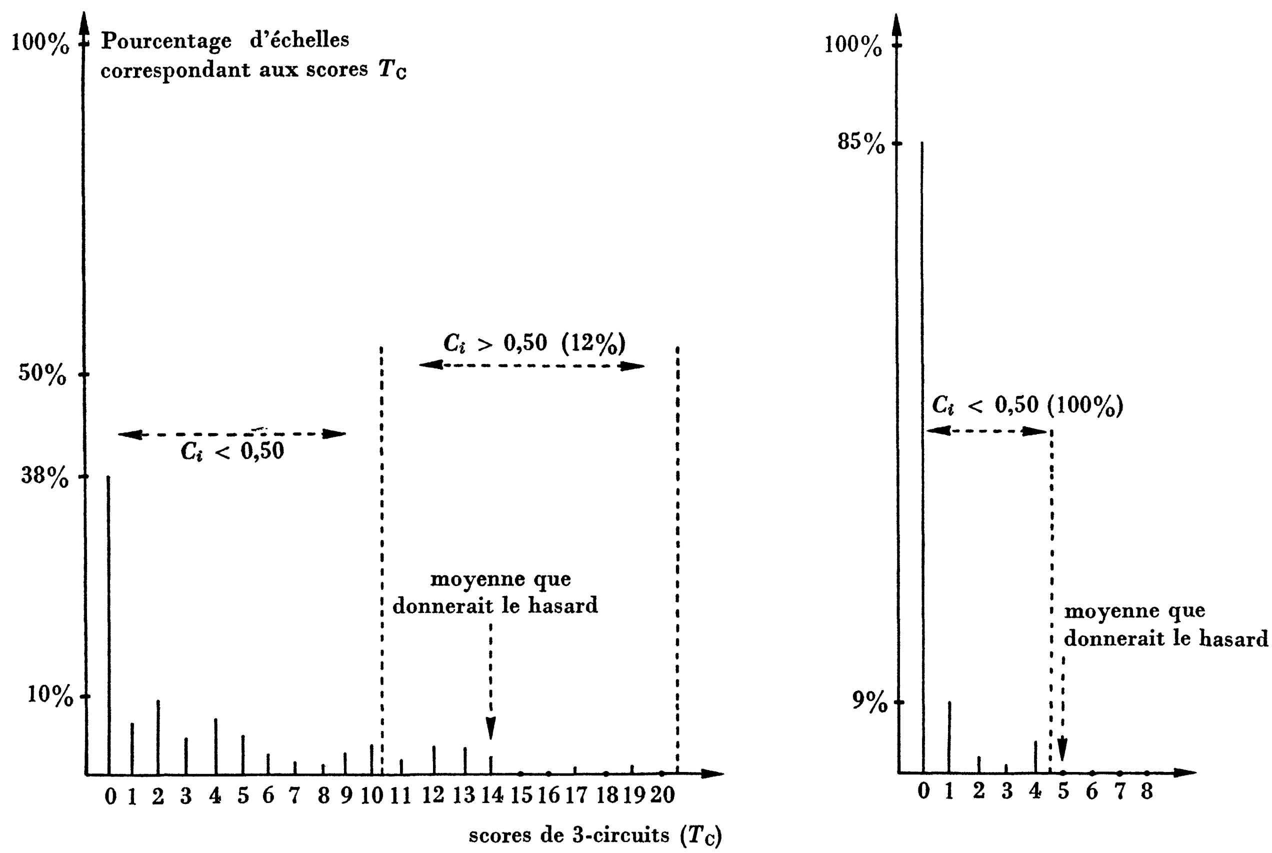
$$T_c\,(\max) = \frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{24} = 5.$$

On considère qu'une opinion est totalement rationnelle lorsqu'elle ne contient aucun triplet circulaire et qu'elle est à son maximum d'illogisme quand elle possède tous les triplets circulaires possibles. On peut donc définir un degré de logique en fonction du nombre T_c de triangles-circuits observés. Claude Berge [3] a défini un tel « coefficient d'inconstance » C_i.

$$C_i = \frac{T_c}{T_c\,(\max)} = \frac{\text{nombre de triplets intransitifs constatés}}{\text{nombre maximum possible de triplets intransitifs}}$$

Ce coefficient mesure ***le degré de l'incohérence des choix :***

$$0 \leqslant C_i \leqslant 1 \left\{ \begin{array}{l} C_i = 0 \text{ quand les choix sont totalement cohérents,} \\ C_i = 1 \text{ quand l'incohérence est maximum.} \end{array} \right.$$



H_1 : *enquête de P. Fouilhé* H_2 : *enquête du centre de ski*

Histogrammes des scores de 3-circuits

Pour sa part, Kendall a proposé un indice appréciant la transitivité d'un tournoi; cet indice retranche de l'unité le pourcentage d'inconstance. Il évalue ainsi la cohérence et non plus l'incohérence

$$\text{Indice de Kendall} : 1 - \frac{T_c}{T_c\,(\max)}.$$

L'indice de Kendall et celui de Berge procèdent d'une même démarche. Nous utiliserons ici le « coefficient d'inconstance » C_i de Berge.

Dans le cas du graphe G_2 :

$$C_i = \frac{4}{8} = 0{,}50.$$

Pour l'ensemble des opinions recueillies, il n'a été remarqué aucun cas de coefficient C_i supérieur à 0,50, ainsi que le montre l'histogramme H_2.

Le calcul des coefficients d'incohérence va permettre de tenter une nouvelle comparaison avec l'enquête de Fouilhé (dans ce cas, $n = 8$ et $T_c\,(\max) = 20$).

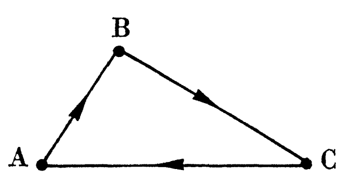
Dressons les 2 histogrammes, H_1 et H_2 des scores de 3-circuits (schéma page 15).

Pour H_1, 38 pour cent des échelles ont un coefficient d'incohérence nul, c'est-à-dire une cohérence totale contre 85 pour cent pour H_2. D'autre part, les degrés d'incohérence sont beaucoup plus prononcés dans l'enquête Fouilhé : 12 pour cent des hiérarchies ont une inconstance supérieure à 0,50 alors qu'aucune ne dépasse cette moyenne pour les enfants du centre de ski dont les choix semblent ainsi beaucoup plus structurés.

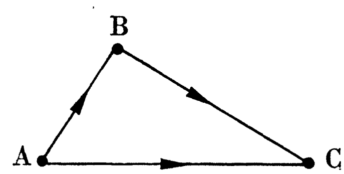
Signalons également que les 13 graphes intransitifs obtenus dans notre centre, représentent une incohérence faible relativement à ce que donnerait le hasard. En effet, sur un tel ensemble de 13 tournois intransitifs ($n = 6$) tirés au hasard, il y aurait en moyenne neuf tournois « irréductibles », c'est-à-dire fortement connexes; dans un tel cas, tous les candidats du graphe sans exception seraient affectés par l'E C : le graphe posséderait en effet un circuit hamiltonien. Or sur les treize opinions intransitives concrètement recueillies, *il n'y en a pas une seule* qu'on puisse associer à un tournoi irréductible ! Au point de vue qualitatif, les incohérences de nos adolescents semblent donc relativement peu prononcées.

Nombre de triplets intransitifs dans le cas du hasard

Là encore la comparaison avec des choix aléatoires s'impose. Le sous-graphe engendré par trois sommets possède trois arcs. Chacun peut avoir deux orientations possibles. Le nombre total de combinaisons est donc de 2^3 ($= 8$). Parmi ces huit triangles, deux sont des circuits et six sont transitifs.



Triplet intransitif
(un circuit; 2 cas)



Triplet transitif
(6 cas)

Si les préférences sont faites au hasard entre trois candidats, le pourcentage moyen de triangles intransitifs obtenu après un grand nombre de tirages sera $\frac{2}{8}\left(=\frac{1}{4}\right)$. Or ce pourcentage moyen $\frac{T}{4}$ évalué sur 3 candidats reste le même pour un nombre quelconque de candidats supérieur à 3 [14]. Dans notre cas où $n = 6$, le nombre moyen de triades circulaires obtenu par le hasard tendrait vers $\frac{T}{4}$ (= 5).

Or nous constatons que l'histogramme H_2 est radicalement différent d'un histogramme centré sur $T_c = 5$. Bien plus, tous les effectifs T_c observés sont inférieurs à 5. Les préférences de ces adolescents *s'éloignent donc radicalement de choix aléatoires.*

Pour sa part, P. Fouilhé signale que son histogramme est bimodal : à côté d'une distribution en L, il y aurait une distribution normale dont les valeurs se répartissent entre 8 et 19. Or, dans le cas où $n = 8$, l'effectif moyen T_c qui serait dû au hasard est de :

$$T_c = \frac{T}{4} = 14.$$

Cette deuxième distribution se rapproche d'une distribution aléatoire des T_c. Nous sommes ainsi enclins à interpréter cette deuxième courbe comme correspondant à des choix qui tendent à se faire au hasard. Cette constatation est importante car elle semble montrer que dans des situations banales et peu motivantes, les échelles de préférence d'enfants tendent pour une part importante d'entre elles à être truffées de contradictions et à se rapprocher de ce que donnerait le hasard (précisons également qu'on observe 62 pour cent d'E C au cours complémentaire et 87 pour cent au cours élémentaire !).

Dans notre situation, le nombre d'E C est réduit et le degré d'incohérence est très faible. La question posée précédemment prend un nouveau relief; les préférences des adolescents présentent, parallèlement à une incohérence formelle, une *forte cohérence relative :* quels sont les déterminants d'une structuration des préférences aussi particulière ?

4. ÉCHELLE UNIDIMENSIONNELLE ET PRÉFÉRENCES PLURIDIMENSIONNELLES

Marc Barbut pose le problème qui nous préoccupe en ces termes :« Arrow nous renvoie donc aux opinions individuelles comme étant les seules qui soient susceptibles de 'rationalité' : mais est-il bien vrai que les opinions individuelles soient elles-mêmes exemptes de contradictions ? » [4]. L'expérience a effectivement révélé dans notre cas que sur 88 hiérarchies, 13 fois la« rationalité » a été prise en défaut.

Nous avons vu que cette prise à contre-pied de la logique n'était pas imputable au hasard, ni à l'inintérêt, ni à la fatigue, ni aux difficultés de différenciation. Quel est donc son sens ?

La transitivité apparaît comme une marque de cohérence, comme une exigence de non-contradiction; quand G. Th. Guilbaud et P. Rosenstiehl écrivent [5] que« le juge doit être cohérent, c'est-à-dire qu'il doit être transitif », ils soulignent combien la transitivité est la notion-clef des structures d'ordre. Mais un postulat implicite semble communément accepté : la transitivité est considérée sur tous les éléments d'un ensemble, envisagés en bloc. C'est-à-dire qu'on admet que tous les éléments sont linéairement hiérarchisés.

Implicitement, cela revient à postuler un seul critère de préférence : l'ordonnancement est pensé selon une seule dimension.

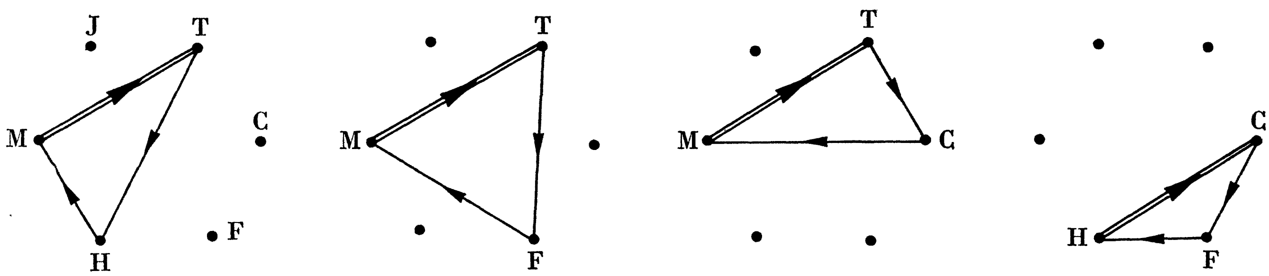
Si l'on abandonne ce postulat, nos résultats sont-ils compatibles avec la logique ?

Nous nous posons la question suivante : l'incohérence de certaines hiérarchies n'est-elle pas due au fait que tous les choix sont considérés comme étant effectués avec le même étalon ? Ne sommes-nous pas en présence de préférences réalisées avec différentes toises, c'est-à-dire notre échelle n'est-elle pas en fait *multidimensionnelle ?*

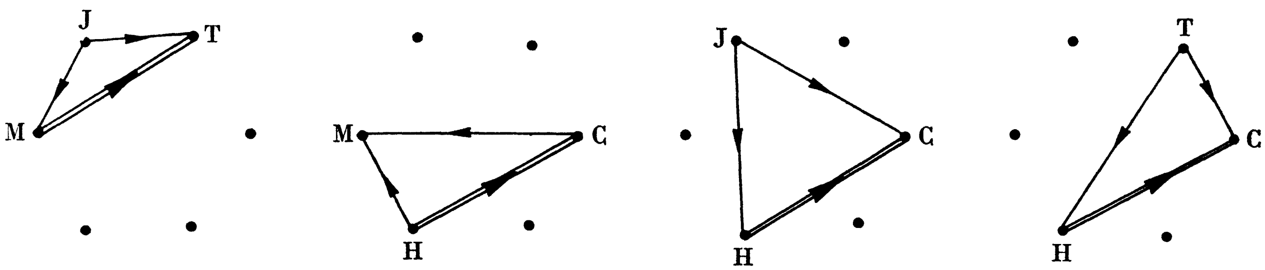
Claude Flament a abordé ce problème et envisagé l'analyse des relations d'ordre en faisant intervenir plusieurs dimensions. Il écrit notamment :« Il est possible de concevoir des situations de choix où le sujet, agissant très rationnellement et sans aucun aléatoire peut donner des structures intransitives si les éléments ordonnés (par des C P P) se classent simultanément et différemment selon plusieurs critères d'ordination (dimensions) » [6].

Nous allons essayer de souligner comment des choix logiques rationnels peuvent être conciliables avec les 13 opinions intransitives qui ont été observées.

Reprenons le graphe G_2 de Jean. Nous savons qu'il possède deux arcs d'intransitivité : MT et HC qui donnent naissance à quatre triangles intransitifs. G_2 possède donc (20 — 4 =) 16 triangles acycliques. Or parmi ceux-ci, trois contiennent l'arc MT et un contient l'arc HC.



(G_2). *Les 2 arcs MT et HC déterminent 4 triangles-circuits*



mais ces 2 arcs déterminent aussi 4 triangles transitifs

Les arcs « contradictoires » ne sont donc cause d'intransitivité que dans certaines configurations; dans d'autres combinaisons, ils conservent la transitivité. Dans ces 4 triplets transitifs de G_2, les préférences réputées « illogiques » apparaissent tout à fait rationnelles. L'argument majeur, c'est que le graphe intransitif G_2 peut être obtenu dans son intégralité par l'union de sous-graphes de G_2, tous transitifs et contenant tous les arcs d'intransitivité. Dans chaque sous-graphe les arcs gardent leur orientation et restent identiques à eux-mêmes : on peut bien parler de l'*union* des sous-graphes. L'incohérence globale peut donc être considérée comme la résultante de cohérences partielles établies sur des dimensions différentes.

Un tournoi intransitif peut donc être réalisé par l'union de sous-tournois qui eux, sont transitifs. Une telle propriété est toujours vérifiable ainsi que le montre C. Flament qui précise qu'un graphe intransitif peut toujours être ainsi décomposé en plusieurs sous-graphes transitifs dont l'union est identique au graphe initial [6].

Chacun de nos 13 graphes intransitifs peut ainsi être décomposé selon une foule de combinaisons (triplets, quadruplets...), en sous-hiérarchies transitives, chacune pouvant correspondre à un critère particulier.

La cohérence est reconquise en adoptant ce modèle pluridimensionnel qui semble s'ajuster aux données que nous avons recueillies. Cette analyse fait apparaître qu'une opinion incohérente peut être la résultante de sous-ensembles d'avis qui, eux, sont cohérents.

A propos de l'illogisme de nos échelles entachées d'E C, nous émettons l'hypothèse que cette *incohérence globale* est due à l'agrégation de *cohérences locales*. Les 15 pour cent d'E C correspondraient à l'intervention de sous-critères qui parasitent l'échelle prétendue unidimensionnelle.

Quand il y a intransitivité, le critère unique de la consigne ne serait en réalité qu'un pseudo-critère qui éclaterait implicitement en plusieurs sous-dimensions.

Psychologiquement, il n'y a pas incohérence ou illogisme des hiérarchies individuelles. L'irrationnel viendrait de ce qu'*on réduit au linéaire ce qui appartient à un espace à plusieurs dimensions.* Sur notre population d'adolescents, peut-on détecter les dimensions et sous-dimensions des choix ?

Selon l'hypothèse qui a présidé à la confection des questionnaires, les critères affectifs et de leadership sont deux critères très différenciés. Mettons cette hypothèse à l'épreuve en testant la corrélation entre les matériaux recueillis sur ces deux critères précis. Puis pour éprouver notre dernière hypothèse selon laquelle les choix se dispersent sur des sous-dimensions, nous essaierons de détecter l'éventuelle présence de conflits de choix à l'intérieur de chaque critère et entre les deux critères.

5. LES CONFLITS INTER-CRITÉRIAUX

Lorsqu'un sujet choisit ses camarades selon le critère affectif (relation A), puis selon le critère leadership (relation L), y a-t-il coïncidence, entre ces deux échelles ?

1. *Corrélation entre l'échelle à critère affectif et l'échelle à critère leadership* (C P P)

Il est possible de déterminer une mesure de la distance qui sépare deux ordinations, mesure qui satisfait aux trois axiomes classiques de la distance entendue au sens mathématique, notamment à l'inégalité triangulaire [15]. Elle se calcule à partir du nombre de désaccords, c'est-à-dire d'interversions de tous les éléments pris deux à deux dans les deux échelles. La corrélation des rangs entre deux ordinations est donnée par le coefficient de Kendall calculé à partir de cette distance et qui selon G. Th. Guilbaud et P. Rosenstiehl, « se comporte à peu près comme un coefficient de corrélation linéaire » [5].

Coefficient de Kendall :

$$\tau_{(A,L)} = 1 - \frac{2\, d\,(A,L)}{D}$$

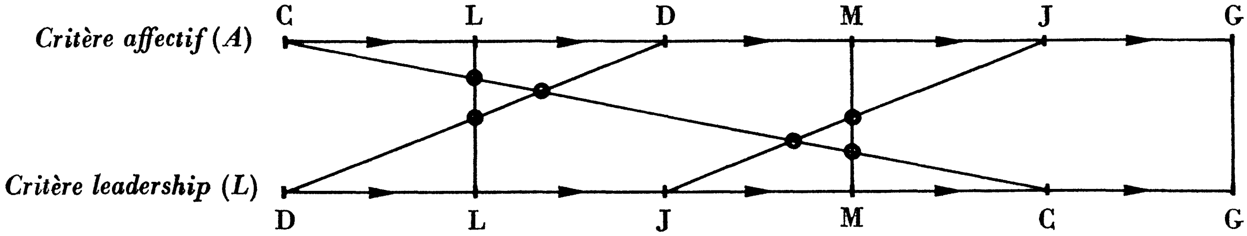
où d est le nombre de désaccords entre les deux échelles (distance de Kendall). Cette distance d entre deux ordres est égale au nombre minimum d'arêtes séparant ces deux ordres sur le permutoèdre des $n!$ ordres du support correspondant.

D : est le nombre maximum de désaccords possibles $= \frac{n\,(n-1)}{2}$.

$D = d$ (max) : D correspond à la distance entre une échelle et son dual.

$\tau_{(A,L)}$ oscille donc entre -1 (distance maximum : désaccord total),
et $+1$ (coïncidence : accord complet).

Pratiquement, le nombre de désaccords est égal au nombre total d'intersections des lignes qui joignent d'une échelle à l'autre, les deux représentations du même sujet.



C P P : ***distance entre les 2 échelles de Bruno*** (candidats : les garçons)

Il y a six intersections, donc six désaccords :

$$\tau\,(_{A,L}) = 1 - \frac{12}{15} = 0{,}20.$$

Résultats

Il n'y a que 7 couples d'échelles dont les deux hiérarchies soient identiques, soit 7/44 = 15 pour cent; d'autre part 25% des couples ont un seul désaccord avec $\tau = 0{,}80$.

Il y a deux corrélations négatives accusées ($\tau = -0{,}60$) soit seulement 5 pour cent. En bref, il y a tout au plus 40 pour cent d'échelles dont on puisse dire qu'elles présentent une corrélation acceptable ($\tau \geqslant 0{,}80$).

Les deux critères utilisés semblent bien correspondre à deux dimensions différenciées qu'il serait illégitime de confondre.

Cette absence de corrélation forte sur le plan général, recouvre des cas particuliers où la corrélation est nettement négative, d'autres où cette corrélation est positive et maximum. Cela nous conduit à émettre deux hypothèses complémentaires que nous allons confronter avec les faits :

— **Lorsque les deux critères conduisent à deux ordinations identiques ou très proches, il y aurait *accord de critères :* la probabilité de rencontrer un E C devrait être réduite.**
— **Lorsque les deux critères aboutissent à deux ordinations lardées de désaccords, il y aurait *conflit de critères :* la probabilité d'obtenir un E C devrait être élevée.**

Ces deux hypothèses sont compatibles avec nos résultats :

— **Dans les 40 pour cent de couples d'échelles pour lesquels $\tau \geqslant 0{,}80$, il n'y a pas un seul E C;**
— **Dans les 5 pour cent où les désaccords sont accusés ($\tau = -0{,}60$) il y a E C à chaque fois.**

τ	Nombre de couples d'échelles	Nombre de couples affectés d'E C
De 0,8 à 1	18	0 (0%)
De 0,73 à 0,60	14	5 (35%)
De 0,47 à — 0,06	10	4 (40%)
— 0,60	2	2 (100%)
Total	44	11

Conflit de critères et effet Condorcet

Le phénomène est très net aux deux extrêmes (0 pour cent et 100 pour cent). Remarquons cependant que la répartition entre ces deux pôles n'est pas régulière.

Un E C n'est donc pas systématiquement provoqué par un conflit massif entre deux critères; il peut être issu d'un seul conflit localisé autour de deux ou trois désaccords.

D'autre part, il apparaît que des sujets qui adoptent deux échelles franchement différentes ($\tau = 0{,}20$ ou $\tau = -0{,}06$) peuvent maîtriser suffisamment leurs dimensions de préférences pour rester totalement « cohérents ».

Les graphes permettent de transcrire de façon très éclairante ce *déchirement intercritérial.* Il suffit de porter les deux jeux de préférences du même répondant sur l'ensemble des six sommets-candidats. On obtient un bigraphe G' qui correspond à l'union de deux graphes de tournoi, l'un traduisant la relation affective (G_A), l'autre la relation leadership (G_L) :

$$G' = G_A \cup G_L \qquad \text{soit} \qquad G' = (C; A, L).$$

Ce bigraphe G' peut être considéré comme une interprétation de la distance de Kendall. En effet, Marc Barbut a souligné qu'on peut mesurer la distance entre deux ordres totaux par la différence symétrique [7]. Ici, la distance des deux relations binaires A et L sur C est alors égale au nombre de couples discordants :

$$d(A, L) = \frac{|A \Delta L|}{2} = \frac{|A \cup L|}{2} - \frac{|A \cap L|}{2}$$

$$d(A, L) = \left(\frac{n(n-1)}{2}\right) - \text{(nombre de couples concordants)} = \text{nombre de couples discordants.}$$

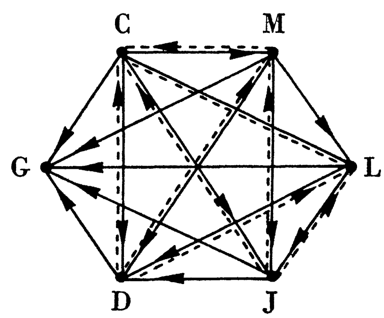
On retrouve ainsi la distance de Kendall. Le bigraphe G'_1 de Pierre illustre ces remarques (la relation L n'est représentée que dans les cas d'antagonismes) : ici $d(A, L) = 8$. Ce bigraphe G'_1, intercritérial, donne une claire illustration des désaccords : la présence de 2 arcs inverses entre 2 candidats indique une contradiction intercritériale.

Exemple

$$(D, M) \in G_L \qquad \text{et} \qquad (D, M) \notin G_A$$

Ce bigraphe est révélateur des *conflits de dimensions* et désigne les candidats qui suscitent électivement des oppositions.

Ce qui est frappant ici c'est que Carl, le préféré affectif, est replacé vers le bas de l'échelle de dominance. Par contre, Jean et Didier, délaissés affectifs, remontent au sommet de la hiérarchie du leadership. Pierre perçoit donc plusieurs de ses camarades de façon opposée selon les deux dimensions de préférence.

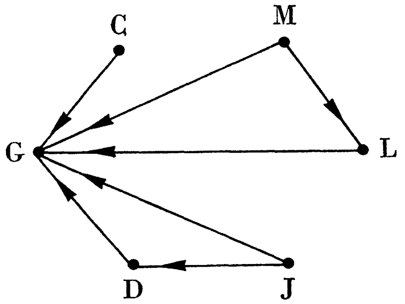


Bigraphe G'_1 de Pierre
(candidats : les garçons)
8 *discordances* et 7 *concordances*

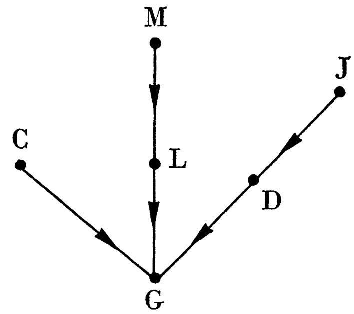
Complémentairement à la différence symétrique, l'intersection des 2 graphes G_A et G_L présente aussi de l'intérêt. En effet, le graphe G'_1 est une représentation du produit direct de deux ordres totaux. Sauf en cas d'accord complet, ce produit direct est un ordre *partiel* extrait de l'ensemble des possibles du produit cartésien organisé en treillis. L'intersection $G_A \cap G_L$ représente donc les choix pour lesquels les 2 relations sont compatibles : il s'agit ici des *concordances de choix.* Exemple sur G''_1 :

$$(M\ G) \in G''_1 \Leftrightarrow (M, G) \in G_A \quad \text{et} \quad (M, G) \in G_L.$$

On peut alors figurer cet ordre partiel en mettant en évidence les éventuelles *séquences d'ordre total* communes aux deux relations.



G''_1 *Graphe partiel* de G'_1
($G_A \cap G_L$: concordances de choix selon les deux critères)



Micro-échelles communes aux deux relations
(inf-demi-treillis)

G *est anti-racine du graphe de concordance* G''_1

L'étude de ces résultats peut être riche d'interprétation psychologique. Par exemple, l'inf-demi-treillis des concordances de Pierre possède un minimum : le sommet G, ce qui montre que Gérard est systématiquement surclassé dans les deux relations; d'autre part, il y a deux échelles de trois membres qui dénotent une permanence localisée des deux hiérarchies. On conçoit que l'étude psychologique du *mécanisme des choix* puisse difficilement se passer de ce type d'examen que nous n'avons qu'esquissé.

Mais, pour pouvoir interpréter les *discordances* et *concordances* qui gravitent autour de certains sujets précis, il faudra replacer les préférences dans le cadre des phénomènes de groupe. Signalons que la composition des échelles individuelles en échelles collectives (discordances et concordances) est justiciable du même type d'analyse.

Concordance entre les préférences affectives et les préférences de leadership (Q S)

Les échelles établies selon les préférences par paires ont décelé de nets désaccords entre les deux critères. Qu'en est-il avec le questionnaire sociométrique ? La différence d'expansivité suscitée par ces deux critères est flagrante : 96 choix pour l'affectif (A) contre 40 au leadership (L) pour le groupe de garçons. Ces préférences semblent d'emblée correspondre à des phénomènes psychologiques nettement dissemblables. Étant donné la faiblesse de l'expansivité au leadership, nous n'établirons de comparaison que sur les trois premiers rangs (ils représentent 76 pour cent des choix effectués).

Pour chaque enfant, nous avons comparé les classements exprimés à la 1re question (critère affectif) et à la 5e question (critère leadership) du Q S.

Quand un sujet se retrouve à la même place dans les deux ordinations, il y a concordance de rang. Ces résultats confirment les précédents : 55 pour cent des couples de hiérarchies ne possèdent aucune concordance de rang. (Il y en a 36 pour cent qui n'ont aucun candidat commun !) Assimiler les critères l'un à l'autre est donc irrecevable.

Si l'on met les cas d'analogie de rang en regard des E C, les résultats sont particulièrement compatibles avec notre corps d'hypothèses : là où il y a deux ou trois concordances, il n'y a aucun E C et 11 E C sur 13 ont lieu alors qu'il n'y a aucune analogie de classement. Nous retrouvons les mêmes conclusions que précédemment : phénomènes marqués aux deux cas extrêmes, cas intermédiaires nuancés.

1 cas de concordance sur 3 rangs 5 cas de concordance sur 2 rangs	pas d'E C
12 cas de concordances sur 1 rang : 2 E C	
26 cas sans aucune concordance : 11 E C	

Concordance de rang et effet Condorcet
(comparaisons établies sur les trois premiers rangs)

La dimension affective et la dimension de dominance semblent vécues de façon très différente par les adolescents. Elles entraînent des préférences franchement distinctes; le fait que parfois elles s'entrechoquent peut provoquer des perturbations sur l'une des échelles ou même sur les deux (2 cas de *double* E C dans notre population).

Un autre traitement des résultats permet de tester l'analogie des rangs et de comparer les deux critères l'un à l'autre. Nous convertissons les résultats en pourcentages de concordance; nous notons également les probabilités que donnerait le hasard (évaluées sur un rang moyen de onze adolescents) (tableau page 24).

Ces pourcentages sont révélateurs de l'*hétérogénéité des deux critères :* il n'y a qu'une chance sur trois pour que le premier à l'une des ordinations soit premier à l'autre; une chance sur six pour le second et une chance sur 14 pour le troisième de rester à la même place. La disparité des deux dimensions semble patente. Parallèlement, un autre phénomène apparaît que confirme avec netteté la comparaison avec les pourcentages aléatoires : les préférences sociométriques sont privilégiées en tête de classement. C'est pour le premier, puis pour le deuxième que les différents pourcentages sont les plus significatifs; par exemple, pour la première place, le pourcentage empirique (34%) vaut plus du triple du pourcentage théorique aléatoire (10%). Cette supériorité reste frappante si on considère la probabilité du candidat d'être dans les deux premiers (50% contre 20%). Le tableau révèle que ces écarts s'affaiblissent vite en passant aux autres rangs.

Nous sommes en présence de deux ordres de fait :
— D'une part, nos deux procédures (C P P, Q S) aboutissent au même résultat : l'ordination selon le critère affectif n'est pas corrélée de façon satisfaisante par l'ordination selon le critère leadership;
— D'autre part, les concordances de ces deux ordinations sont cependant franchement supérieures à ce que donnerait le hasard.

Il semble autorisé d'en tirer deux interprétations :
a) *Les deux critères utilisés sont des critères spécifiques*, nettement différenciés.
b) *Ces 2 critères ne sont pas indépendants l'un de l'autre ;* ils interviennent dans un jeu d'interinfluence constant, positif ou négatif, certainement variable selon les sujets et les situations vécues. Et ces chevauchements semblent être à l'origine des E C.

Tableau des pourcentages de concordance entre les rangs des trois premiers (Questionnaire sociométrique ; 2 critères)

	% expérimentaux	Probabilité que donnerait le hasard (%)
PROBABILITÉ qu'ont : *le premier* (à l'un des critères) :		
— d'avoir le *même rang* (à l'autre critère)	34	10
— d'être dans les deux premiers	50	20
— d'être dans les trois premiers	55	30
second :		
— d'avoir le *même rang*	16	10
— d'être dans les deux premiers	32	20
— d'être dans les trois premiers	35	30
troisième :		
— d'avoir le *même rang*	7	10
— d'être dans les trois premiers	15	30
les deux premiers :		
— d'avoir le *même classement*	14	1,1
— d'être aux deux premières places (dans un ordre quelconque)	23	2,2
les trois premiers :		
— d'avoir le *même classement*	2	0,14
— d'être aux trois premières places (dans un ordre quelconque)	11	0,83

Les résultats observés sont donc tous compatibles avec l'hypothèse selon laquelle *les incohérences des E C sont en relation avec un conflit de critères.*

Pour chaque enfant, à chaque critère pris isolément correspondrait, à en croire la consigne, un classement spécifique. Mais il semble difficile « d'isoler » une dimension. Ainsi se produiraient des dérapages de critères et ces perturbations se répercuteraient sur chaque ordination apparemment unique et « isolée ». De tels télescopages produiraient les contradictions des E C. Ces discordances ***interdimensionnelles seraient ainsi à l'origine de certaines incohérences intradimensionnelles.***

Antagonisme des critères et réponses sociométriques

Certaines réponses des enfants au Q S montrent de façon frappante, que ces critères peuvent être perçus comme foncièrement différents. Par exemple, Bruno rejette Didier au critère affectif, mais il le choisit pour le critère leadership; on constate un total de trois réponses d'enfants analogues à celle-ci. Cette juxtaposition d'un rejet affectif et d'un choix leadership adressés au même camarade illustre la différenciation des critères : elle révèle la présence de plusieurs dimensions de décision qui peuvent être différentes au point de susciter des choix radicalement antagonistes.

6. LES DÉCHIREMENTS INTRA-CRITÉRIAUX

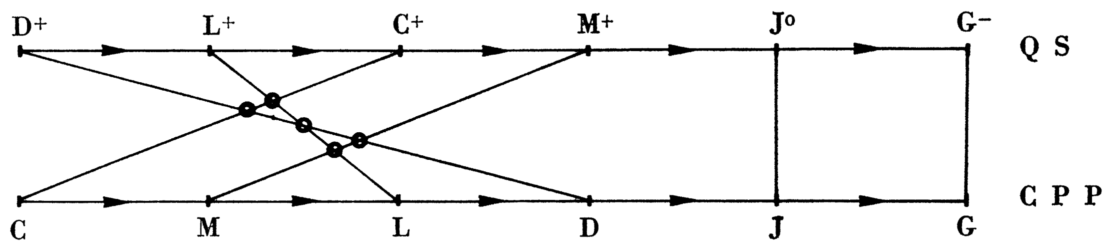
Lorsqu'un enfant choisit ses camarades selon deux procédures différentes, mais à partir du même critère et de la même situation, y a-t-il coïncidence des deux classements obtenus ?

Si la méthode des C P P fournit un ordre complet, le Q S ne fournit que des séquences incomplètes. Cependant il est également possible d'ordonner les réponses sociométriques si on tient compte tout à la fois des choix positifs et négatifs.

En tête de l'échelle sociométrique, nous portons le premier choix, puis le deuxième... En queue de l'échelle, le premier rejet, puis en avant-dernier le deuxième rejet... Si les six candidats n'ont pas été nommés, le ou les restants sont placés derrière les choix et devant les rejets.

Selon cette technique, nous ne recourons à aucun coefficient; nous n'utilisons que les rangs, ainsi que l'autorise la consigne de passation qui demande un rangement par préférence décroissante. Nous obtenons ainsi une situation que l'on peut comparer à l'ordination des C P P.

Soit par exemple les préférences affectives de Danièle portant sur les garçons :



D^+ L^+ C^+ et M^+ sont les 4 camarades *choisis* dans cet ordre à la 1re question.
G^- est un camarade *rejeté* (3e question).
J^o n'a pas été désigné.

Distance entre 2 échelles affectives du même sujet (échelles ci-dessus)

$$d = 5 \qquad \tau = 1 - \frac{2\,d}{D} = 1 - \frac{10}{15} = 0{,}33.$$

L'expansivité des répondants dans certains cas a été insuffisante pour permettre le classement complet des six candidats; nous n'avons retenu que 60 ordinations. (L'expansivité au critère leadership étant trop faible pour permettre une étude de corrélation rigoureuse, nous ne traitons que les réponses affectives.)

Nous utilisons la même technique que précédemment: calcul des distances entre échelles et calcul du coefficient de Kendall τ.

Nous comparons donc deux classements, tous deux établis à quelques minutes d'intervalle par les *mêmes* répondants, à partir du *même* critère et sur les *mêmes* candidats. Ce test est important car il sonde la fidélité de l'épreuve sociométrique, voire sa validité.

Or, nous constatons qu'il n'y a que 20% de couples dont les échelles soient identiques. Si nous acceptons tous les $\tau \geqslant 0,80$ (soit 1 désaccord au maximum) nous obtenons seulement 50% d'échelles corrélées. Dans le cadre particulier de notre situation, il n'est donc pas possible de considérer que les hiérarchies réalisées sont fidèles. Il y a ici un *constat de non-fidélité* des ordinations selon les préférences affectives.

Il apparaît ainsi que les glissements de dimensions concernent aussi bien les préférences intra-critériales que les préférences inter-critériales. Nos résultats permettent de penser que les deux types de chevauchements se combinent constamment.

Pour affiner cette constatation, nous allons établir à nouveau le décompte des analogies de rangs en ce qui concerne les trois premiers pour le critère affectif et les deux premiers pour le critère leadership, ce qui permet d'utiliser 76 échelles de trois candidats (*A*) et 76 échelles de deux candidats (*L*).

Ces résultats confirment les précédents : il n'y a que 13% de couples d'échelles affectives identiques et 14% d'échelles leadership analogues bien que les candidats ne soient respectivement qu'au nombre de 3 et de 2 ! Si nous ne tenons compte que de deux concordances de rang à l'ordination affective le pourcentage atteint 25%.

Or, une constation est frappante : sur ces 25% d'échelles affectives et sur ces 14% d'échelles leadership qui présentent le plus haut niveau de concordance relatif, il ne s'est produit *aucun effet Condorcet*. Cette nouvelle constation est donc compatible avec l'hypothèse selon laquelle les E C ont pour origine des glissements intra-critériaux.

Dressons le tableau des pourcentages de concordance par rang. Il répond à une question très épineuse en sociométrie : les choix sont-ils constants ? La constance des choix dépend-elle du rang de ces choix ? en particulier les premiers choix sont-ils réellement privilégiés ? (Tableau page 28).

Pour les deux critères, nous constatons qu'il y a une nette décroissance à partir du premier. Plus un candidat est proche de la tête, plus il a de chance de garder sa place (71% pour le premier, 52% pour le second, 37% pour le troisième).

Le candidat en tête d'une échelle se retrouve dans les trois premiers de l'autre classement dans 92% des cas; ce pourcentage descend à 83% pour le second et 67% pour le troisième. Ces proportions sont élevées. Les rangements par préférences sociométriques correspondent incontestablement à une réalité psychologique et méritent d'être pris en compte. Notons que le critère leadership suscite beaucoup plus d'instabilité que le critère affectif.

Cependant, ces résultats invitent à remettre en cause certaines procédures classiques utilisées en sociométrie :

1. *La pondération des choix*

Il est souvent préconisé d'affecter un coefficient selon le rang du choix (par exemple 5 à un premier choix, 4 à un deuxième choix, 3 à un troisième choix...). Cette technique est peu légitime d'un simple point de vue mathématique puisqu'elle assimile l'ordinal au cardinal (la hiérarchie sociométrique n'est aucunement une échelle d'intervalles). D'autre part, la corrélation des échelles décèle une fidélité nettement insuffisante : l'inconstance des rangs rend illusoire une telle procédure.

2. *La limitation du nombre des choix à trois*

Nos résultats montrent que dans ce cas, il n'y a que 50% des couples d'échelles qui renferment les trois mêmes candidats (sans se soucier de leur ordre, sinon ce pourcentage tombe à 26%). Cette non constance des trois premiers choix semble interdire de se limiter à eux seuls pour avoir une fidèle image des préférences des membres d'un groupe.

Ces tiraillements intra-critériaux ont parfois une illustration étonnante : ils peuvent donner lieu à des contradictions « absolues », encore plus frappantes que l'E C. Il arrive en effet qu'un sujet choisisse un camarade précis à la première question (choix affectif) et rejette ce même camarade à la troisième question (rejet affectif). Ces réponses sont un véritable défi à la logique. Au début nous avons cru à une erreur, à une incompréhension. En fait, de telles réponses aberrantes se sont reproduites dans de nombreux questionnaires; il n'est pas légitime de les écarter sous prétexte qu'elles nous embarrassent. Dans le cas de nos 22 sujets, de telles réponses ne se sont pas produites. Cependant, elles sont tellement précieuses pour notre propos que nous en faisons état d'autant que nous les rencontrons régulièrement dans nos questionnaires sociométriques.

Paradoxalement, il est possible de considérer ces réponses comme rationnelles; il faut alors admettre que le critère proposé a été incidemment décomposé en deux sous-critères : et que les attitudes prévues par le répondant vis-à-vis de son camarade en fonction de ces deux sous-dimensions ont été antagonistes.

Dans l'état actuel de nos résultats, ces heurts intra-critériaux ne se répartissent pas sur l'ensemble de la population. Il semblerait qu'ils soient le fait de quelques enfants seulement, la majorité de ceux-ci étant caractérisés par un statut sociométrique faible, souvent un statut d'exclu. A la labilité intra-critériale semble correspondre une intégration difficile au groupe, une fragilisation affective, une relation à autrui perturbée.

Il semble opportun de préciser que l'hypothèse des sous-dimensions intra-critériales est en parfaite concordance avec le *contenu des entretiens* réalisés auprès des enfants. Ceux-ci se reconnaissent une foule de « dimensions » de choix différentes, disant que tel camarade prête souvent ses affaires mais qu'il est trop bagarreur, qu'il sait bien raconter des histoires, mais qu'il n'est pas assez sportif... Il est clair que les « motivations » des enfants sont variées et versatiles; ainsi les propos des sujets eux-mêmes éclairent les conflits de choix et les contradictions suscitées. Pour approfondir davantage les mécanismes psychologiques des choix, sans doute faudrait-il aborder le problème en terme d'attitude et analyser comment un enfant prend une attitude diffuse, positive ou négative, sereine ou défensive vis-à-vis du statut de ses camarades et vis-à-vis des rôles à assumer.

Les différentes conclusions auxquelles nous aboutissons sont inquiétantes : ne nous fourvoyons-nous pas lorsque nous croyons déceler le réseau des affinités d'un groupe à l'aide de nos questionnaires ? Les réponses ne semblant pas fidèles à dix minutes d'intervalle, c'est la validité elle-même des épreuves qui est en cause. Essayons d'éprouver la validité du Q S à partir d'une comparaison entre les résultats globaux enregistrés aux deux procédures.

Tableau des pourcentages de concordance entre les rangs des trois premiers
(Même critère selon deux procédures ; Q S et C P P)

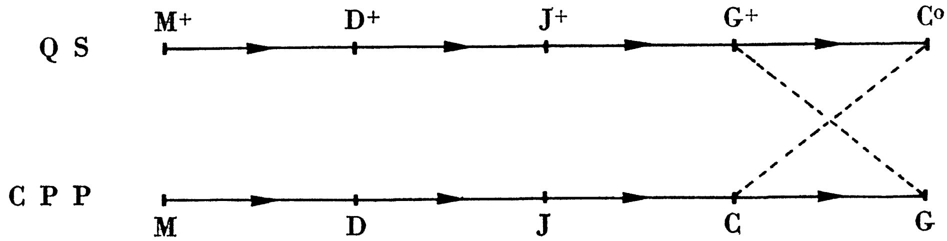
	Critère *affectif* (% expérimentaux)	Critère *leadership* (% expérimentaux)
PROBABILITÉ qu'ont : *le premier* (à l'une des épreuves)		
— d'avoir le *même rang* (à l'autre épreuve)	71	63
— d'être dans les deux premiers	81	75
— d'être dans les trois premiers	92	—
second		
— d'avoir le *même rang*	52	29
— d'être dans les deux premiers	63	41
— d'être dans les trois premiers	83	—
troisième		
— d'avoir le *même rang*	37	—
— d'être dans les trois premiers	67	—
les deux premiers		
— d'avoir le *même classement*	45	29
— d'être aux deux premières places (dans un ordre quelconque)	53	34
les trois premiers		
— d'avoir le *même classement*	26	—
— d'être aux trois premières places (dans un ordre quelconque)	50	—

Les « oubliés sociométriques »

Est réputé «oublié sociométrique positif» un candidat non choisi au Q S et classé aux C P P avant un autre camarade choisi, lui, au Q S.

Est réputé «oublié sociométrique négatif» un candidat non rejeté au Q S et classé aux C P P après un camarade rejeté, lui, au Q S.

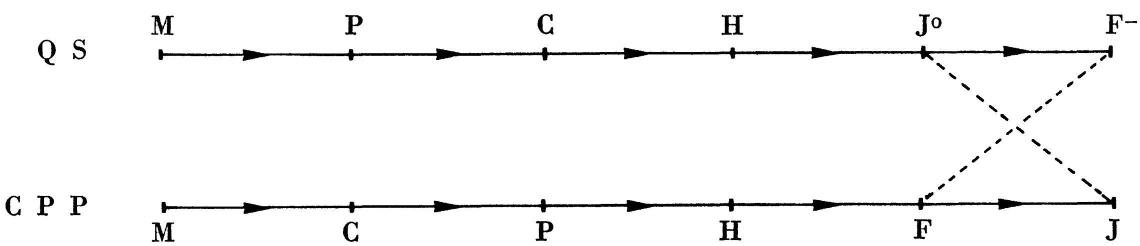
Soit les 2 ordinations de Lucien (candidats : les garçons; critère affectif).



Co : *l'oublié sociométrique positif*

Carl non choisi au Q S s'intercale dans l'échelle des C P P : c'est un « oublié sociométrique positif ».

Dans les 2 classements d'Annick, on constate la présence d'un « oublié sociométrique négatif » : Jo (critère affectif; groupe de filles).



Jo : *l'oublié sociométrique négatif*

On peut ainsi éprouver la fidélité globale du Q S et indirectement sa validité.

L'examen des 88 couples d'ordinations montre qu'aucun candidat *choisi au Q S* n'est placé sur l'échelle des C P P *après un rejeté au Q S ;* de même aucun rejeté n'est placé avant un choisi. Cette constatation est importante : les choix et les rejets apparaissent ici comme deux désignations à la polarisation franchement opposée et nettement discriminante.

Par contre, on observe la présence de 11 «oubliés sociométriques positifs», et de 6 «négatifs» pour le critère affectif et de 24 « oubliés» pour le critère leadership.

La faiblesse relative de l'expansivité des *rejets* affectifs et des choix au critère *leadership* réduit les possibilités d'interprétation sur ces deux registres; constatons cependant une tendance : les rejets présentent beaucoup *moins de stabilité* que les choix et la relation de leadership très instable semble *plus conflictuelle* que la relation affective.

Le total des choix affectifs est de 137. Le pourcentage d' « oubliés sociométriques » est donc de 11/137 (= 0,08); d'autre part, nous constatons qu'ils sont situés en queue de liste. Ces résultats sont rassurants quant à la validité du Q S : les choix sociométriques, considérés globalement sans tenir compte des rangs, bénéficient d'une constance indéniable.

La comparaison entre les résultats obtenus aux deux passations conduit à évaluer la portée de certaines procédures sociométriques :

— *La sensibilité et la fidélité du Q S* semblent nettement insuffisantes en ce qui concerne les rangs : les méthodes de limitation des choix à trois et de pondération des rangs risquent d'être entachées d'erreurs rédhibitoires.

— *La fidélité du Q S* semble parfaitement acceptable si l'on prend en compte l'ensemble des choix.

D'autre part, la fidélité — bien qu'insuffisante — est d'autant plus grande que les choix sont près de la tête. *Les deux premiers choix* correspondent à des préférences nettement significatives et possèdent une réelle signification psychologique.

Conclusion sur la signification des effets Condorcet au niveau individuel

Une opinion individuelle est un phénomène complexe, non linéaire. Elle est établie parmi un champ très vaste de possibles où foisonnent les interférences de critères.

Les cas d'intransitivité ont longuement retenu notre attention. Quelle est leur signification ?

1. *Quand il n'y a pas d'E C*

— Le votant a apprécié tous les candidats selon une seule dimension; les critères sont nettement différenciés.

— Le votant a évalué ses préférences selon plusieurs dimensions. Mais la résultante respecte la transitivité (le critère de la consigne est ici une pseudo-dimension, non unique).

2. *Quand il y a E C*

— Le répondant a émis certaines préférences en fonction de certaines dimensions, d'autres selon des dimensions différentes. Sur l'ensemble la transitivité n'est pas respectée.

— Le répondant a émis certains « avis » par compromis de plusieurs critères à la fois; l'avis est déjà une résultante. L'ensemble n'est pas transitif.

Dans ce cas, schématiquement, on assimile le mécanisme du vote individuel au modèle du vote collectif : combinaison des voix.

L'idée fondamentale, c'est qu'un Effet Condorcet n'atteste pas l'incohérence ou l'irrationalité des choix. Il traduit la *multiplicité des dimensions* qui s'offrent à l'ordination et l'éventuelle propension de certains sujets à *disperser leurs préférences* sur celles-ci.

RÉSUMÉ DE L'ÉTUDE DES PRÉFÉRENCES AU NIVEAU INDIVIDUEL

Nous avons constaté que les préférences d'adolescents choisissant leurs amis présentent des effets Condorcet, c'est-à-dire des incohérences. L'analyse des graphes de tournoi correspondant à cette relation de préférence a mis en évidence que ces opinions, apparemment illogiques, peuvent être interprétées comme la résultante de sous-opinions parfaitement cohérentes. Les contradictions observées n'apparaissent pas comme des faits irrationnels ou des phénomènes dus au hasard, mais comme le résultat de la composition de plusieurs sous-cohérences locales : les choix ne seraient pas effectués sur une seule dimension, mais à partir d'une pluralité de sous-dimensions. La composition de ces décisions pluridimensionnelles peut entraîner des heurts et susciter des choix illogiques. Le critère affectif et le critère leadership sont deux critères nettement différenciés qui répondent à deux dimensions psychologiques spécifiques. Mais malgré la motivation élective qu'ils suscitent — ou à cause d'elle — ces deux critères entraînent, par de fréquents parasitages, des choix parfois contradictoires; les E C apparaissent comme la résultante de telles interférences dues à des conflits intra-critériaux et inter-critériaux.

La réalisation graphique est due à J. Leconte.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Guilbaud G. Th., *Eléments de la théorie mathématique des jeux*, Paris, Dunod, 1968, 143 p.

[2] Fouilhe P., "Les méthodes de comparaisons par paires : Une application aux hiérarchies de prestige", *Bulletin de psychologie*, nos 7-8, 1955, pp. 407-416.

[3] Berge C., *La théorie des graphes et ses applications*, Paris, Dunod, 1967, 2e éd., 267 p.

[4] Kreweras G., "Les décisions collectives", *Math. Sci. hum.*, no 2, 1963, pp. 25-35.

[5] Guilbaud G. Th., et Rosenstiehl, P., "Analyse algébrique d'un scrutin", *Math. Sci. hum.*, no 4, 1963, pp. 9-33 et *Cahiers Mathématiques III*, Paris, Mouton/Gauthier-Villars, 1969.

[6] Flament C., "Analyse pluridimensionnelle des structures hiérarchiques intransitives", *Bulletin du CERP*, nos 2-3, 1958, pp. 171-179.

[7] Barbut M., "Note sur les ordres totaux à distance minimum d'une relation binaire donnée", *Math. Sci. hum.*, no 17, 1966, pp. 47-48.

[8] Condorcet, *Essai sur la constitution et les fonctions des assemblées provinciales*, Œuvres de Condorcet, Paris, Arago, 1847, t. VIII, p. 193.

[9] Flament C., *Théorie des graphes et structures sociales*, Paris, Gauthier-Villars, 1965, 166 p.

[10] Daval R., *Traité de psychologie sociale*, Paris, Presses Universitaires de France, t. I, 1963, 530 p. ; t. II, 1964, 497 p.

[11] Maucorps P. H., et Bassoul R., *Empathies et connaissance d'autrui*, Paris, CNRS, 1960, 93 p.

[12] Condorcet, *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*, 1785.

[13] Barbut M., "Quelques aspects mathématiques de la décision rationnelle", *Les temps modernes*, no 164, 1959, pp. 725-745.

[14] Harary F., Norman R. Z., et Cartwright, *Introduction à la théorie des graphes orientés*, Paris, Dunod, 1968, 437 p.

[15] Barbut M., et Monjardet B., *Ordre et classification : Algèbre et combinatoire*, Paris, Hachette, 1970, t. I, 176 p., t. II, 173 p.

[16] Berge C., et Ghouila-Houri A., *Programmes, jeux et réseaux de transports*, Paris, Dunod, 1962, 254 p.

[17] — *Graphes et hypergraphes*, Paris, Dunod, 1970, 502 p.

[18] Roy B., *Algèbre moderne et théorie des graphes*, t. I et II, Paris, Dunod, 1969, 1970, 502 p., 753 p.