MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

JACQUES ROUBAUD

La notion d'associativité relative

Mathématiques et sciences humaines, tome 34 (1971), p. 43-59
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1971__34__43_0>

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (http://msh.revues.org/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Math. Sci. hum. (9e année, n° 34, 1971, p. 43-59)

LA NOTION D'ASSOCIATIVITÉ RELATIVE

par

Jacques ROUBAUD [1]

Soit Ω *un* ensemble stratifié *d'opérations, c'est-à-dire la donnée d'un couple* (Ω, π) *où* π *est une application (poids) de* Ω *dans* $\mathrm{N} = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$; *si* $\pi(\omega) = n$, *on dit alors que* ω *est une opération n-aire ; on pose alors :*

$$\Omega_n = \{\omega \in \Omega\,;\, \pi(\omega) = n\}$$

l'ensemble des opérations n-aires. *Nous avons :*

$$\Omega = \bigcup_{i \in \mathrm{I}} \Omega i \qquad \mathrm{I} \subset \mathrm{N}$$

$$\forall i, \forall j\; (i \in \mathrm{I}, j \in \mathrm{I}, i \neq j): \qquad \Omega_1 \cap \Omega_1 = \varnothing.$$

La donnée d'un Ω-magma sur E, *où E est un ensemble quelconque, consiste à se donner une application* φ *de l'ensemble* Ω *dans l'ensemble des opérations internes partout définies dans E :*

$$\forall n \in \mathrm{I}: \qquad \begin{aligned} \varphi: \Omega_n &\to \mathrm{E}^{\mathrm{E}^n} \\ \omega &\to \varphi(\omega) \end{aligned}$$

où $\varphi(\omega)$ *est définie par :*

$$\varphi(\omega): (x_1, \ldots, x_n) \to \omega\, x_1 \ldots x_n = \varphi(\omega)(x_1, \ldots, x_n).$$

Une opération 0*-aire dans* E *consiste à se donner une constante, c'est-à-dire un élément distingué de* E.

Toute opération qui opère sur des éléments quelconques de E *est représentée par un* dendron [2] sur $\mathrm{E} \cup \Omega$:

ω *étant donné, pour tout n-uple d'éléments quelconques de* E, *le dendron :*

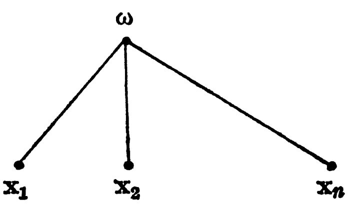

Fig. 1

1. Département de Mathématiques appliquées aux Sciences Humaines, UER de Philosophie, Esthétique et Mathématiques. Université de Paris X (Paris-Nanterre).
2. Cf. l'article : « Vers une formalisation des grammaires transformationnelles», dans ce numéro, pp. 27-41.

est un élément de E^{E^n}.

Toute opération, composition d'opérations qui opèrent sur des éléments quelconques de E, *est ainsi représentée par un dendron ; ainsi, si* ω, ω', ω'', ω''' *sont des éléments de* Ω :

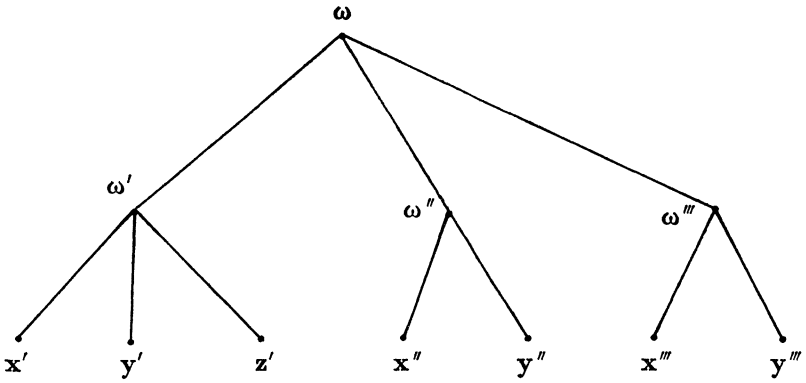

Fig. 2

On peut représenter chaque dendron sur $E \cup \Omega$ *par une expression linéaire : il s'agit de la notation polonaise préfixée ; ainsi, les dendrons précédents s'écrivent :*

$$\omega\ _1 \ldots x_n$$
$$\omega\ \omega'\ x'\ y'\ z'\ \omega''\ x''\ y''\ \omega'''\ x'''\ y'''$$

Par exemple, si E *est un ensemble d'éléments, on se définit une opération* ω_2 :

$$\omega_2 \in \Omega_2 : \omega_2\, ab = ab^{-1}.$$

G. Higman et B. Neuman, cités par Kurosh (« théorie des groupes ») ont donné pour caractériser la variété des groupes, la seule équation :

$$\omega_2\ \omega_2\ \omega_2 \subset \omega_2\ a\ \omega_2\ a\ a\ \omega_2 \subset \omega_2\ b\ \omega_2\ a\ a\ a = b.$$

Cette expression peut, bien sûr, être représentée par l'égalité de deux dendrons.

Faire une transformation entre dendrons, c'est transformer un complexe opérandes-opérations-résultat en un autre ; ainsi, si :

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Omega_2 \qquad \text{et} \qquad x, y, z \in E$$

par la transformation T :

$$\alpha\, x\, \beta\, y\, z \xrightarrow{T} \delta\, \gamma\, x\, y\, z$$

l'élément $\delta\ \gamma\ x\ y\ z$ *est le transformé de* $\alpha\ x\ \beta\ y\ z$. *Se définir une transformation* T, *c'est se donner* (δ, γ) *en fonction de* (α, β).

*Supposons que nous voulions définir l'*associativité *d'une opération binaire* ω_2 *opérant sur* E, *il nous faut définir deux transformations* T *et* T^{-1} :

$$\omega_2\, x\, \omega_2\, y\, z \xrightarrow{T} \omega_2\, \omega_2\, x\, y\, z$$

$$\omega_2\, \omega_2\, x\, y\, z \xrightarrow{T^{-1}} \omega_2\, x\, \omega\, y\, z$$

définies pour tout triplet (x, y, z) *de* E^3.

Tout arbre de dérivation (ou de production) d'une phrase peut être représenté au moyen d'un mot, d'un Ω-magma libre sur un vocabulaire V. *Un* Ω*-magma libre sur* V, *où* Ω *et* V *sont supposés disjoints, est défini par le plus petit sous-ensemble* m (V) *de* $(V \cup \Omega)^*$ *tel que* [1] *:*

(*i*) $V \subset m\,(V)$

(*ii*) $A\, \omega \in \Omega_n\, \forall\, i \in\,]\, n\,] : \sigma_1 \in m\,(V)$

$\Rightarrow \omega\, \sigma_1 \ldots \sigma_n \in m\,(V)$

(*iii*) *les expressions de* m (V) *sont définies uniquement à l'aide de* (*i*) *et* (*ii*).

On démontre que m (V) *est bien « libre » au sens habituel de ce mot employé en mathématiques.*

Puisque effectuer une transformation, c'est passer d'un p-uplet d'arbres de production (ou de dérivation) à un q-uplet d'arbres de production, on peut alors approcher les transformations linguistiques par une voie algébrique et ainsi développer une syntaxe formelle qui dépasserait les limites imposées par l'associativité. C'est là l'objet du travail de J. Roubaud.

J. P. DESCLÉS

RÉSUMÉ

Dans cet article, on présente un cadre d'étude de la syntaxe générative différent du cas classique : en raisonnant directement sur des arbres (i.e., *les mots d'un système non associatif libre à plusieurs opérations) on « approche » les opérations non-associatives par des opérations « relativement associatives » ou « associatives dans leur ensemble ». On entreprend ici, dans un premier temps, la classification des « associations cohérentes bijectives à ensemble fini d'opérations ».*

INTRODUCTION

Il est bien connu que la représentation de l'arbre de dérivation d'une phrase peut se faire au moyen de mots, non du monoïde libre sur le vocabulaire X, mais du Ω-magma libre sur X, les éléments de Ω (les opérations du magma) représentant les nœuds nommés de l'arbre. La tentation est grande, puisqu'en définitive ce sont ces objets-là que l'on considère, d'essayer de reconstruire le formalisme « génératif », développé dans un monoïde libre, dans le cadre des magmas (qui sont, rappelons-le, des ensembles munis d'une famille d'opérations non nécessairement binaires et non nécessairement associatives) (nous laissons volontairement de côté ici le problème de substituer à l'ensemble X « autre chose », permettant de rendre compte de la construction lacunaire des phrases, problème qui a été résolu par J. P. Benzécri il y a quelques années ; cette solution est encore assez peu connue et malheureusement peu développée dans la pratique).

1. On rappelle que $]\, n\,] = \{ 1, 2, \ldots, n \}$.

On se heurte immédiatement à une sérieuse difficulté : si on n'impose aucune condition restrictive aux opérations du magma, il est certes possible de donner les « mêmes » définitions que dans le cas classique, mais il est jusqu'à présent impossible de démontrer quoi que ce soit d'utile.

On peut alors envisager la démarche suivante :
a) Dans un premier temps, on transpose les méthodes et résultats valables dans les monoïdes à une situation « monoïdale » généralisée, celle où les opérations de Ω sont « associatives dans leur ensemble » : dire que l'opération α est associative, c'est dire que, pour tout x, y *et* z de X on peut changer les parenthèses, autrement dit :

$$\alpha\, x\, \alpha\, y\, z = \alpha\, \alpha\, x\, y\, z.$$

Dans un magma muni d'opérations relativement associatives, on pourra aussi changer les parenthèses, mais en changeant de loi. On aura :

$$\alpha\, x\, \beta\, y\, z = \gamma\, \delta\, x\, y\, z,$$

où γ et δ sont deux opérations qui dépendent de α et β. Il faut en outre imposer au « changement des parenthèses » des conditions de cohérence : l'*associativité relative* qui vient d'être définie permet d'écrire toutes les opérations « à gauche » dans une expression du magma. Si l'on part d'une expression quelconque, changer les parenthèses pour l'amener à cette forme peut se faire de plusieurs manières ; il est naturel d'exiger que le résultat soit toujours le même. (Cette notion a été introduite et étudiée dans un cadre beaucoup plus général par J. Benabou.)

Si l'on appelle Ω-monoïdes les objets mathématiques ayant ces propriétés, on constate qu'ils se comportent, « moralement », comme des monoïdes et qu'en particulier les constructions usuelles de la grammaire générative, de la théorie des automates s'y transposent aisément.

b) Dans un deuxième temps, on revient à l'étude des Ω-magmas libres quelconques. Il est clair en effet que les conditions d'associativité relative décrites en *a*) n'ont aucune chance raisonnable d'être vérifiées dans la « nature » syntaxique. Mais on peut toujours plonger (sans trop de déperdition d'information) un Ω-magma Σ dans un Ω' - magma associatif Σ' (sur le même vocabulaire) par « adjonction » d'opérations « fictives », c'est-à-dire « approcher » le non associatif par de l'associatif relatif.

Tel est, sommairement exposé, un programme d'approche d'une syntaxe générative « non associative ». Dans cet article, nous donnons quelques résultats sur la classification des « associations cohérentes bijectives » et répondons (par la négative) à une question de J. P. Benzécri.

1. GROUPES D'OPÉRATIONS ASSOCIATIVES

1.1. Définition

Soient E un ensemble, Ω un groupe. On dit que Ω est un groupe d'opérations associatives (dans leur ensemble) pour E, ou que E est un Ω-monoïde, si l'on s'est donné une application $\varphi : \Omega \to \mathrm{Hom}\,(E \times E, E)$ (c'est-à-dire dans l'ensemble des lois de composition binaires sur E) telle que l'axiome suivant soit vérifié :

$$(\mathrm{A\ S\ S})\ \text{pour : tous } x, y, z \in E\text{ ; tous } \alpha, \beta \in \Omega,$$

on a :

$$\varphi_\alpha{}^{x}\, \varphi_\beta{}^{yz} = \varphi_{\alpha\beta}\, \varphi_\alpha{}^{xyz}$$

(en notant $\varphi_\alpha xy$ le composé de x et de y pour la loi $\varphi\,(\alpha)$).

1.1.1. *Remarque*

Plus souvent φ sera une application injective, c'est-à-dire que Ω s'identifiera à un sous-ensemble de Hom $(E \times E, E)$. Nous noterons dans ce cas α, la loi $\varphi(\alpha)$. L'axiome (A S S) s'écrit alors :

$$(\mathrm{A\ S\ S})' \quad \alpha\, x\, \beta\, y\, z = (\alpha\beta)\, \alpha\, xy\, z.$$

1.1.2. *Remarque*

Les lois de composition $\varphi(\alpha)$ sur E $(\alpha \in \Omega)$ ne sont pas en général des lois associatives. Cependant, d'après l'axiome (A S S) la loi $\varphi(\varepsilon)$ si ε est l'élément neutre de Ω est une loi de monoïde sur E.

1.2. Exemple

Soient G, H deux groupes, φ un homomorphisme de H dans le groupe Aut G des automorphismes de G. Si pour tout $h \in$ H on pose :

$$\varphi_h\, x\, y = x\, \varphi(h)(y); \quad x, y \in G,$$

on définit sur G une structure de H-monoïde.

1.3. Le monoïde ambiant

Soit E, un Ω-monoïde. Définissons, sur l'ensemble produit $\Omega \times E$, une multiplication en posant :

$$(\alpha, x)(\beta, y) = (\alpha\beta, \varphi_\alpha\, xy).$$

On voit immédiatement, en vertu de (A S S) que, muni de cette loi, $\Omega \times E$ est un monoïde. Nous dirons que c'est le monoïde ambiant.

1.3.1. *Remarque*

Dans l'exemple 1.2. ci-dessus, le monoïde ambiant (qui est d'ailleurs un groupe) n'est autre que le produit semi-direct de G par H (cf. par exemple, Bourbaki, Top. chap. III).

1.4. Morphismes de Ω-monoïdes

1.4.1. Soient E, E′ deux Ω-monoïdes, f une application de E dans E′, f est un morphisme de E dans E′ si, pour tout $\alpha \in \Omega$ on a :

$$\varphi_\alpha\, xy = \varphi'_\alpha\, f(x)\, f(y).$$

Les morphismes de Ω-monoïdes (Ω fixe) se composent et définissent une catégorie que nous notons Ω-Mon.

1.4.2. Plus généralement si φ est un homomorphisme de groupes : $\Omega \to \Omega'$, E un Ω-monoïde pour ρ, E′ un Ω-monoïde pour ρ', le couple (φ, f) est un morphisme si :

$$\rho\alpha\, xy = \rho'_{\varphi(\alpha)}\, f(x)\, f(y) \quad x, y \in E.$$

Les morphismes de *-monoïdes (*i.e.*, sur des groupes variables) se composent et définissent une catégorie, que nous notons -Mon.

1.4.3. *Proposition*

La catégorie -Mon est fibrée sur les groupes.
Si E' est un Ω'-monoïde, $\varphi : \Omega \to \Omega'$ un morphisme de groupes,
il suffit de remarquer que E' peut être muni d'une structure de Ω-monoïde convenable en posant:

$$\rho_\alpha\, x'\, y' = \rho'_{\varphi(\alpha)}\, x'\, y'.$$

Le Ω-monoïde ainsi obtenu est déduit de E' par « restriction des opérations».

1.5. Ω-MONOÏDE LIBRE

1.5.1. Soit E un ensemble, Ω un groupe. Il existe un Ω-monoïde Σ (E) (unique à un isomorphisme d'Ω-monoïdes près), une application i $E \to \Sigma$ (E), solutions du problème universel suivant:

Si X est un Ω-monoïde, f une application de $E \to X$, f se « prolonge» en un morphisme $\Sigma (f) : \Sigma (E) \to X$ unique tel que l'on ait:

$$\Sigma (f) \circ i = f.$$

1.5.2. Si ρ est une injection, auquel cas Ω s'identifie à une partie de Hom $(E \times E, E)$ (1.1.1. *Remarque*), on peut décrire Σ (E) de la manière suivante:

Soit Σ le plus petit sous-ensemble du monoïde libre L $(E \cup \Omega)$, contenant les éléments de E et tel que, si $\sigma, \tau \in \Sigma$, $\alpha \in \Omega$, on ait $\alpha\, \sigma\, \tau \in \Sigma$. L'ensemble Σ (E) est alors le quotient de Σ par la relation d'équivalence qui identifie les expressions (*i.e.*, éléments de Σ) $\alpha\, \sigma\, \beta\, \tau\, \varphi$ et $(\alpha\, \beta)\, \alpha\, \sigma\, \tau\, \varphi$ (où $\alpha, \beta \in \Omega$; $\sigma\, \tau\, \varphi \in \Sigma$, $(\alpha\, \beta)$ étant le produit de α et β par la multiplication dans Ω). La structure de Ω-monoïde sur $\overline{\Sigma} = \Sigma$ (E) est ainsi définie: $\alpha\, \bar{\sigma}\, \bar{\tau} = \overline{\alpha\, \sigma\, \tau}$ (σ étant le classe de σ).

1.5.3. *Proposition*

Σ (E) s'identifie au sous-ensemble de l'ensemble produit L $(\Omega) \times$ L (E), formé des couples de mots de la forme $\alpha_1 \dots \alpha_n$, $x_1 \dots x_{n+1}$, muni des opérations α telles que:

$\alpha\, (\alpha_1 \dots \alpha_n, x_1 \dots x_{n+1})\, (\beta_1 \dots \beta_m, y_1 \dots y_{m+1}) = (\alpha\, \alpha_1) \dots (\alpha\, \alpha_n)\, (\alpha\, \beta_1) \dots (\alpha\, \beta_m)\, \alpha\, x_1 \dots x_{n+1}\, y_1 \dots y_{m+1}$.

1.6. GROUPES D'OPÉRATIONS À GAUCHE

Un groupe Ω est un groupe d'opérations à gauche pour un ensemble E et E est un Ω-monoïde à gauche si on s'est donné une application $\lambda : \Omega \to$ Hom $(E \times E, E)$ telle que l'axiome d'associativité suivant soit vrai:

$$(\mathrm{ASS}_g) \text{ pour tous } \alpha, \beta \in \Omega\, ; x, y, z \in E \qquad \lambda_\alpha\, x\, \lambda_\beta\, y\, z = \lambda_\beta\, \lambda_{\alpha\beta-1}\, x\, y\, z.$$

S'il y a lieu de distinguer les deux notions ainsi introduites de groupes d'opérations associatives, nous dirons que le groupe Ω de la définition 1.1. est un groupe d'opérations à droite.

2. ASSOCIATIONS COHÉRENTES BIJECTIVES

2.1. Ω-MAGMAS AVEC ASSOCIATION

2.1.1. *Définition*

Un magma avec association est un couple (M, a), où $M = (\Omega, X, \omega)$ est un magma ([cf. Bénabou]), $a = (g, d)$ est une application de $\Omega^2 \to \Omega^2$; tels que l'axiome d'associativité suivant soit vérifié.

2.1.2. Pour tous $x, y, z \in X$; $\alpha, \beta \in \Omega$ on a:

$$\alpha x \beta y z = g \alpha \beta d \alpha \beta x y z.$$

2.1.3. a est l'application d'association de M. Elle équivaut à la donnée des deux lois de composition g et d sur Ω.

2.1.4. *Exemple*

$\Omega = \{\alpha\}$. Il est clair alors, par 2.1.2., que M est un monoïde.

2.1.5. *Exemple*

Avec les notations de 1.1.1., $g \alpha \beta$ est le produit $\alpha \beta$ dans le groupe Ω et $d \alpha \beta = \alpha$ pour tous $\alpha, \beta \in \Omega$ Un ensemble muni d'un groupe d'opérations associatives au sens du 1. est donc un magma avec association.

2.1.6. La propriété de cohérence: d'après 2.1.2., si x, y, z t sont quatre éléments de X ; α, β, γ, trois opérations quelconques, les égalités suivantes sont vérifiées (propriété du « pentagone»).

2.1.7. $\alpha x \beta y \gamma z t = \alpha x g \beta \gamma d \beta \gamma y z t = g \alpha g \beta y d \alpha g \beta \gamma x d \beta \gamma y z t$
$g \alpha \beta d \alpha \beta x y \gamma z t = g g \alpha \beta \gamma d g \alpha \beta \gamma d \alpha \beta x y z t = g \alpha g \beta \gamma g d \alpha g \beta \gamma d \beta \gamma d d \alpha g \beta \gamma d \beta \gamma x y z t$

2.1.8. Les égalités ci-dessus donnent trois propriétés des lois de compositions g et d de 2.1.3.; nous allons les expliquer et étudier la structure de l'ensemble des opérations du magma muni des lois satisfaisant à ces axiomes.

2.2. Associations cohérentes bijectives

2.2.1. *Définition*

Ω étant un ensemble, une association cohérente (bijective) a sur Ω est une application (bijective) $\Omega^2 \to \Omega^2$. Si $a = (g, d)$, $g, d : \Omega^2 \to \Omega$, étant des lois de composition binaires sur Ω, les trois axiomes suivants sont vérifiés:

[C O 1] g est une loi de composition associative dans Ω

[C O 2] pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega$ on a: $g d \alpha g \beta \gamma d \beta \gamma = d g \alpha \beta \gamma$

[C O 3] pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega$ on a: $d d \alpha g \beta \gamma d \beta \gamma = d \alpha \beta$.

2.2.2. *Exemples*

2.2.2.1. *Exemple* (*a*)

On se donne une loi de monoïde sur Ω, notée multiplicativement et on pose $g \alpha \beta = \alpha \beta$, $d \alpha \beta = \alpha$ pour tous $\alpha, \beta \in \Omega$.

L'axiome [C O 1] est vrai par hypothèse. On vérifie trivialement [C O 2] et [C O 3].

2.2.2.2. *Exemple* (*b*)

Particularisant les hypothèses de l'exemple 2.2.2.1. (*a*), imposons donc à a d'être injective, comme on a: $a(\alpha, \beta) = (\alpha \beta, \alpha)$, on voit que, pour la loi de monoïde donnée sur Ω, la relation $\alpha \beta = \alpha \gamma$ implique $\beta = \gamma$. Ω, muni de cette loi est donc un semi-groupe à gauche (Bourbaki, Alg. chap. 1, § 2, ex. 11). Nous dirons dans ce cas que Ω est un g-semi-groupe à gauche. Si, en outre, a est surjective, les translations à gauche dans le g-semi-groupe Ω sont bijectives (et le g-semi-groupe Ω est sans résidu, au sens de Bourbaki, *op. cit.*, ex. 13). Réciproquement, si Ω est un g-semi-groupe à gauche à translations à gauche surjectives, a est une association cohérente bijective.

2.2.2.3. *Exemple* (*c*)

Nous supposons maintenant seulement que g est une loi de groupe (notée multiplicativement) sur Ω (Ω est un g-groupe). D'après les exemples (*a*) et (*b*), l'association a $(\alpha, \beta) = (\alpha\,\beta, \alpha)$ (cf. [§ 1]) est une association cohérente bijective ; cherchons toutes les associations cohérentes bijectives pour lesquelles Ω est un g-groupe.

Si ε est l'élément neutre du groupe Ω, on a : $d\,\varepsilon\,\varepsilon\,d\,\varepsilon\,\varepsilon = d\,\varepsilon\,\varepsilon$, d'après [C O 2] donc $d\,\varepsilon\,\varepsilon = \varepsilon$. On a de même, si α est un élément quelconque de Ω :

$$d\,d\,\varepsilon\,\alpha\,d\,\varepsilon\,\alpha = d\,\varepsilon\,\alpha \quad \text{donc} \quad d\,\varepsilon\,\alpha = \varepsilon \quad \text{et} \quad d\,d\,\alpha\,\varepsilon\,d\,\alpha\,\varepsilon = d\,\alpha\,\varepsilon = \varepsilon.$$

Soit $\alpha \in \Omega$. La condition de bijectivité de a impose en particulier que d soit une application surjective $\Omega^2 \to \Omega$. Il existe donc $\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega$ tels que l'on ait :

$$a\,\alpha_1\,\alpha_2 = \alpha$$

or ceci implique : $d\,\alpha_1\,\alpha_2 = \alpha$.

$$d\,\alpha\,d\,\alpha_2\,\varepsilon = d\,d\,\alpha_1\,\alpha_2\,d\,\alpha_2\,d\,\alpha_2\,\varepsilon = d\,\alpha_1\,\alpha_2 = \alpha_2 \text{ (d'après [C O 3]).}$$

Donc il existe pour tout élément α un élément β de Ω tel que l'on ait : $d\,\alpha\,\beta = \alpha$.

Soit alors γ un élément quelconque de Ω. Considérons l'élément $d\,\alpha\,\gamma$.

D'après [C O 2] :

$$d\,\alpha\,\gamma\,d\,\alpha^{-1}\,(\alpha\,\gamma) = d\,(\alpha\,\alpha^{-1})\,(\alpha\,\gamma) = d\,\varepsilon\,(\alpha\,\gamma) = \varepsilon,$$

comme il a été établi plus haut. Ceci étant vrai pour tout γ, est donc vrai en particulier pour β, donc :

$$d\,\alpha\,\beta\,d\,\alpha^{-1}\,(\alpha\,\beta) = \varepsilon.$$

Or d'après [C O 3] on a :

$$d\,d\,\alpha\,\gamma\,d\,\alpha^{-1}\,(\alpha\,\gamma) = d\,\alpha\,\alpha^{-1} \quad \text{donc aussi} \quad d\,d\,\alpha\,\beta\,d\,\alpha^{-1}\,(\alpha\,\gamma) = d\,\alpha\,\alpha^{-1},$$

ce qui montre que :

$$a\,(d\,\alpha\,\gamma,\, d\,\alpha^{-1}\,(\alpha\,\beta)) = a\,(d\,\alpha\,\beta,\, d\,\alpha^{-1}\,(\alpha\,\beta)) = (\alpha,\, d\,\alpha\,\alpha^{-1}).$$

Si a est une application injective, nécessairement :

$$d\,\alpha\,\gamma = d\,\alpha\,\beta = \alpha.$$

En résumé :

2.2.2.4. *Proposition*

Si a = (g, d) est une association cohérente bijective et, si g est une loi de groupe sur Ω, on a nécessairement : $d\,\alpha\,\beta = \alpha$, pour tous $\alpha, \beta \in \Omega$.

2.2.2.5. *Remarque*

Nous n'avons utilisé en fait que l'injectivité de a et la surjectivité de d (la première condition étant équivalente à la bijectivité de a si Ω est de cardinal fini).

2.2.2.6. *Exemple* (*d*)

Posons maintenant, pour tous $\alpha, \beta \in \Omega$, $g\, \alpha\, \beta = \beta$; l'axiome [C O 2] est alors automatiquement vérifié. Il en est de même pour [C O 1] car la loi $g\, \alpha\, \beta = \beta$ est évidemment associative. L'axiome [C O 3] prend la forme plus simple :

$$d\, d\, \alpha\, \gamma\, d\, \beta\, \gamma = d\, \alpha\, \beta, \quad \text{pour tous } \alpha, \beta, \gamma \in \Omega.$$

Soit alors une loi de semi-groupe à droite sur l'ensemble Ω et définissons $d\, \alpha\, \beta$, pour tous α, β, comme l'unique élément de Ω tel que l'on ait : $d\, \alpha\, \beta\, \beta = \alpha$ (la loi de semi-groupe étant notée multiplicativement) ; vérifions, avec cette hypothèse, la forme donnée ci-dessus de l'axiome [C O 3] On a d'abord :

$$d\, d\, \alpha\, \gamma\, d\, \beta\, \alpha\, \beta = d\, d\, \alpha\, \gamma\, d\, \beta\, \gamma\, d\, \beta\, \gamma\, \gamma = d\, \alpha\, \gamma\, \gamma = \alpha$$

donc :

$$d\, \alpha\, \beta\, \beta = d\, d\, \alpha\, \gamma\, d\, \beta\, \gamma\, \beta,$$

d'où le résultat, puisque Ω est un semi-groupe à droite.

2.2.2.7. *Exemple* (*e*)

Comme cas particulier de l'association de l'exemple (*d*), supposons Ω muni d'une structure de groupe et posons :

$$d\, \alpha\, \beta = \alpha\, \beta^{-1},$$

on a alors, d'après [C O 3] :

$$\alpha\, (g\, \beta\, \gamma)^{-1}\, \gamma\, \beta^{-1} = \alpha\, \beta^{-1},$$

donc : $g\, \beta\, \gamma = \gamma$ pour tous $\beta, \gamma \in \Omega$. D'où :

2.2.2.8. *Proposition*

Si a est une association cohérente et si d est définie par $d\, \alpha\, \beta = \alpha\, \beta^{-1}$, pour une loi de groupe donnée sur Ω, on a nécessairement $g\, \alpha\, \beta = \beta$ pour tous $\alpha, \beta \in \Omega$.

On notera que, dans ce cas, la bijectivité de a résulte des autres hypothèses.

2.2.2.9. Dans les exemples (*a*) à (*e*) ci-dessus, on se trouve dans l'un des deux cas suivants : ou bien $g\, \alpha\, \beta$ ne dépend que de β, ou bien $d\, \alpha\, \beta$ ne dépend que de α. Nous cherchons maintenant à quelles conditions doivent satisfaire des associations cohérentes pour que g (resp. d) ne dépende que de sa première coordonnée (resp. seconde).

2.2.2.10. *Exemple* (*f*)

Ω est un g-monoïde multiplicatif. Nous posons : $d\, \alpha\, \beta = \Psi(\beta)$. D'après [C O 3], on doit avoir :

$$\Psi(\Psi(\gamma)) = \Psi(\beta)$$

pour tous β, γ ; [C O 2] s'écrit :

$$\Psi(\beta\, \gamma)\, \Psi(\gamma) = \Psi(\gamma).$$

Si Ψ est surjective (ce qui est vrai si d est surjective) $\Psi(\beta)$ est une constante d'après [C O 3], et cette constante est un idempotent du g-monoïde Ω, d'après [C O 2].

2.2.2.11. *Exemple* (*g*)

Posons cette fois $d\, \alpha\, \beta = \varphi(\alpha)$, on a alors :

$$\varphi(\varphi(\alpha)) = \varphi(\alpha) = \varphi(\alpha\, \beta),$$

φ est une application $\Omega \to \Omega$. Si φ est surjective (ce qui sera vrai si a est bijective) et si Ω est de cardinal fini, $\varphi(\alpha) = \alpha$.

Dans un cas plus général (Ω étant toujours supposé fini), si φ est l'image de Ω par φ, φ est l'identité sur $\varphi(\Omega)$ qui est un sous-monoïde et φ est un endomorphisme de Ω, appliquant Ω sur $\varphi(\Omega)$ et se réduisant à l'identité sur $\varphi(\Omega)$.

2.2.2.12. *Exemple* (*h*)

Nous posons $g\,\alpha\,\beta = \varphi(\alpha)$. La condition [C O 1] implique $\varphi(\varphi\,\alpha) = \varphi\,\alpha$, donc φ est l'identité si φ est surjective et Ω fini.

Dans ce cas [C O 2] s'écrit: $d\,\alpha\,\gamma = d\,\alpha\,\beta$, donc d ne dépend que de sa première coordonnée. D'après l'exemple (*g*), si d est surjective, on a:

$$d\,\alpha\,\beta = \alpha \qquad \text{donc} \qquad a(\alpha, \beta) = (\alpha, \alpha).$$

2.2.2.13. *Exemple* (*i*)

Posons enfin $g\,\alpha\,\beta = \Psi(\beta)$. [C O 1] donne:

$$\Psi(\Psi(\varphi)) = \Psi(\varphi).$$

On ne peut pas conclure dans le cas général, même si a est bijective.

Posons plus particulièrement $g\,\alpha\,\beta = \beta$; [C O 2] est vraie. La loi sur Ω satisfait à : $d\,d\,\alpha\,\gamma\,d\,\beta\,\gamma = d\,\alpha\,\beta$, forme simplifiée de [C O 3]. De plus, si a est bijective, les translations à droite pour d sont bijectives. Pour tout α, $d\,\alpha\,\alpha$ est un idempotent. Si ε est un idempotent pour d, $d\,\alpha\,\varepsilon = \varepsilon$, pour tout α. Donc, en particulier, pour deux idempotents : ε, ε' $d\,\varepsilon\,\varepsilon' = \varepsilon$.

Les parties de Ω de la forme $d\,\varepsilon\,\Omega$, où ε parcourt l'ensemble des d-idempotents sont disjoints (mais non *a priori* stables !) et ne contiennent qu'un idempotent $\varepsilon = d\,\varepsilon\,\varepsilon$. L'exemple (*e*) est un cas particulier de cette situation.

3. ASSOCIATIONS STANDARDS

3.0. Nous décrivons, dans ce paragraphe, un modèle relativement simple et maniable d'association cohérente bijective sur un ensemble fini, les associations standards. Ce ne sont pas toutes les associations cohérentes possibles (comme nous le montrons au § 4.) et le problème de leur détermination et classification reste ouvert.

3.1. Définition

Ω étant un ensemble fini, on se donne sur Ω une structure de semi-groupe à gauche (à translations à gauche bijectives). On sait (Bourbaki, *op. cit.*) que Ω, muni de cette structure, s'identifie à l'ensemble des couples (i', i''), où i' appartient à un ensemble I et où i'' parcourt un groupe G (dit groupe de g), avec la multiplication :

$$(i', i'')\,(j', j'') = (j', i''\,j'')\,;\; i', j' \in \mathrm{I}\,;\; i'', j'' \in \mathrm{G}.$$

(Nous noterons e'' l'élément neutre du groupe G.)

On se donne ensuite une loi de semi-groupe à droite sur I, dite loi de h-semi-groupe; $(i, j) \to \mathrm{h}\, i\, , j$. I muni de cette structure, s'identifie lui aussi au produit d'un groupe H par l'ensemble J des h-idempotents du semi-groupe I, avec la multiplication:

$$(i, i')\,(j, j') = (i, \mathrm{h} i'\, j')\,; \quad i, j \in \mathrm{J}\,; \quad i', j' \in \mathrm{H}.$$

Nous supposons en outre que la loi h est à translations à droite bijectives. On pose alors:

$$\delta\,(i, i')\,(j, j') = (i, i'\, j'^{-1})\,; \quad i, j \in \mathrm{J}\,; \quad i', j' \in \mathrm{H}$$

($i'\, j'^{-1}$ étant le produit de ces éléments pour la loi de groupe dans H). Autrement dit, si $x, y \in \mathrm{I}$, $\delta\, x\, h$ est défini par la condition $\mathrm{h}\ \delta\ x\ y\ y = x$. G, H, I, J étant ainsi définis, on se donne une association $\mathrm{a} : \Omega^2 \to \Omega^2$ en posant:

$$\mathrm{a}\,(i, i', i'')\,(j, j', j'') = (\mathrm{g}\,(i, i', i'')\,(j, j', j''), \mathrm{d}\,(i, i', i'')\,(j, j', j''))$$

avec:

$$\begin{aligned} \mathrm{g}\,(i, i', i'')\,(j, j', j'') &= (j, j', i''\, j'') \\ \mathrm{d}\,(i, i', i'')\,(j, j', j'') &= (i, i'\, j'^{-1}, i'') \\ &(= \delta\,((i, i')\,(j, j'), i'')) \end{aligned}$$

pour tous $i, j \in \mathrm{J}\,; i', j' \in \mathrm{H}\,; i'', j'' \in \mathrm{G}$.

On vérifie aisément qu'avec ces relations, a est une association cohérente bijective sur Ω. Nous dirons que a est l'*association standard* définie par le triple (G, H, J).

3.2. Proposition

3.2.1. Soit g une structure de semi-groupe à gauche sur un ensemble Ω fini (donc à translations à gauche bijectives), I l'ensemble des idempotents du semi-groupe Ω, a une association cohérente bijective sur Ω (a = (g, d)). Dans ces conditions, il existe un groupe H, une structure de semi-groupe à droite sur I, de groupe H, telle que d, restreinte à I, soit donnée par:

$$\mathrm{d}\,(i, i', e'')\,(j, j', e'') = (i, i', j'^{-1}, e'')\,; \quad i, i' \in \mathrm{J}\,; \quad j, j' \in \mathrm{H}.$$

3.2.2. *Démonstration*

Nous montrons d'abord que a, restreinte à I^2, applique I^2 dans I et que d, sur I^2, est à translations à droites injectives (donc bijectives, puisque $\mathrm{I} \subset \Omega$ est fini).

(*i*) Si i, j sont deux g-idempotents, $\mathrm{d}\ i\ j$ est un g-idempotent car:

$$\mathrm{g\ d}\ i\ \mathrm{g}\ i\ j\ \mathrm{d}\ i\ j = \mathrm{d\ g}\ i\ i\ j \qquad \text{et} \qquad \mathrm{g}\ i\ j = i\ \mathrm{g}\ i\ i = i$$

donc:

$$\mathrm{g\ d}\ i\ j\ \mathrm{d}\ i\ j = \mathrm{d}\ i\ j.$$

(*ii*) Si i, j, k sont trois éléments de I, la relation $\mathrm{d}\ i\ k = \mathrm{d}\ j\ k$ implique $i = j$. En effet, dans L (Ω), les mots $i\ k\ k$ et $j\ k\ k$ sont tels que l'on ait (f étant l'application de L (Ω) $\to$ L (Ω) définie par a):

$$\mathrm{f}\,(ikk) = \mathrm{g}kk\ \mathrm{d}kk\ \mathrm{d}ik = \mathrm{g}kk\ \mathrm{d}kk\ \mathrm{d}jk = \mathrm{f}\,(jkk)$$

comme a est bijective, f est injective et on a $ikk = jkk$ donc $i = j$.

(*iii*) Si j, k sont deux idempotents, on a, d'après (*i*) et (*ii*) : il existe $i \in \mathrm{I}$ $\mathrm{d}ij = k$.

La proposition 3.2.1. est alors conséquence du lemme suivant :

3.2.3. *Lemme*

Soit a une association cohérente bijective sur un ensemble I telle que l'on ait $\mathrm{g}ij = j$, pour tous $i, j \in \mathrm{I}$. Il existe alors une structure de semi-groupe à droite sur I, de groupe H, telle que l'on ait :

$$\mathrm{d}\,(i, i')\,(j, j') = (i, i', j'^{-1}) \qquad i, i' \in \mathrm{J}\,; \quad j, j' \in \mathrm{H} \quad \mathrm{I} = \mathrm{J} \times \mathrm{H},$$

la bijectivité de a entraîne que d est à translations à droite bijectives, comme on le voit immédiatement. Définissons alors $\mathrm{h}\,i\,j$ comme l'unique élément de I tel que $\mathrm{d}\,\mathrm{h}\,i\,j = i$. Montrons d'abord que h est une loi de composition associative :

Soient i, j, k trois éléments de I. On a successivement :

$$\mathrm{d}\,\mathrm{h}\,i\,\mathrm{h}jk\,\mathrm{h}jk = i$$

$$\mathrm{d}\,\mathrm{h}\,\mathrm{h}ijk\,k = \mathrm{h}ij$$

$$\mathrm{d}\,\mathrm{dh}\,\mathrm{h}ijk\,kj = \mathrm{dh}ij\,j = i$$

$$\mathrm{d}\,\mathrm{dh}\,\mathrm{h}ijk\,k\,\mathrm{d}\,\mathrm{h}jk\,k = i.$$

Or le premier membre s'écrit aussi :

$$\mathrm{d}\,\mathrm{h}\,\mathrm{h}ij\,k\,\mathrm{h}jk$$

en vertu de l'axiome [C O 3], vérifié par d (puisque $\mathrm{g}ij = j$ (exemple (*i*) § 2.2.2.13). Comme les translations à droite pour d sont bijectives, ceci entraîne :

$$\mathrm{h}\,i\,\mathrm{h}jk = \mathrm{h}\,\mathrm{h}ij\,k$$

h est une loi associative.

Supposons ensuite $\mathrm{h}ij = \mathrm{h}i'j$. Alors, par définition, $\mathrm{d}\,\mathrm{h}ij\,j = i = \mathrm{dh}i'\,j = i'$, donc h est à translations à droite injectives. I, pour h, est donc un semi-groupe à droite. Il n'y a plus qu'à montrer que l'on peut redéfinir d à partir de h. Vérifions que si l'on pose :

$$\mathrm{h}\,\delta\,i\,j\,j = i \qquad \text{on a :} \qquad \delta ij = \mathrm{d}ij$$

ce qui achèvera la démonstration.

Or, par définition :

$$\mathrm{d}\,\mathrm{h}\,\mathrm{d}ij\,j\,k = \mathrm{d}ij \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{h}\,\mathrm{d}ij\,j = i \qquad \text{donc } \mathrm{d}ij = \delta ij.$$

3.2.4. *Remarque*

On notera que les conditions $\mathrm{d}ii = i$, $\mathrm{h}ij = i$ sont des conditions équivalentes ; les d-idempotents et les h-idempotents coïncident.

4. UN MODÈLE NON STANDARD D'ASSOCIATION COHÉRENTE BIJECTIVE

4.1. Position du problème

Ω étant un produit de groupes finis $\Omega = G \times H$, supposons la loi g sur Ω donnée par:

$$g\,(x, x')\,(y, x'\,y')$$

et posons:

$$d\,(x, x')\,(y, y') = (\varphi\,(x, x', y, y'), \Psi\,(x, x', y, y'))$$

les axiomes des associations cohérentes montrent alors aisément:

4.1.1. Ψ ne dépend pas de x' ; nous écrivons $\Psi\,(x', y, y')$, $\varphi\,(x, y, y')$ $\varphi\,(x, y, y') \in G$; $\Psi\,(x', y, y') \in H$.

4.1.2. $\varphi\,(x, y, e') = xy^{-1}$ $\Psi\,(e', y, y') = e'$, e' étant l'élément neutre du groupe H.

4.1.3. $\Psi\,(x', z, y', z')\,\Psi\,(y', z, z') = \Psi\,(x'y', z, z')$.

4.1.4. $\varphi\,(\varphi\,(x, z, y'\,z'), \varphi\,(y, z, z'), \Psi\,(y', z, z')) = \varphi\,(x, y, y')$.

4.1.5. $\Psi\,(\Psi\,(x', z, y'\,z'), \varphi\,(y, z, z'), \Psi\,(y', z, z')) = \Psi\,(x', y, y')$, nous allons établir successivement quelques propriétés de φ et Ψ.

4.2. Étude de Ψ

4.2.1. Posons:

$$\Psi\,(x', y, y') = \Psi_y\,(x', y'),$$

$\Psi_y\,(x', y')$ est un élément du groupe H, Ψ_y une loi de composition sur H. D'après [4.1] on a:

4.2.2. $\Psi_y\,(e', y') = e'$.

4.2.3. $\Psi_y\,(x'y', z') = \Psi_y\,(x', y', z')\,\Psi_y\,(y', z')$.

4.2.4. $\Psi_{yz}\,(x', y') = \Psi_y\,(\Psi_z\,(x', y'), \Psi_z\,(y', e')$ (en posant $z' = e'$ dans 4.1.5.

4.2.5. *Proposition*

L'application $\Psi_y\,(\circ, y')$ qui à x' associe $\Psi_y\,(x', y')$ est une permutation de H pour tous $(y, y') \in \Omega$.

D'après la définition de l'association a, a (x, x', y, y') s'écrit:

$$(y, x'\,y', \varphi\,(x, y, y'), \;\Psi_y\,(x', y')$$

comme a est bijective si $z \in G$ et $z' \in H$ sont arbitraires, il y a un élément (x, x', y, y') de Ω^2 unique, tel que:

$$a\,(x, x', y, y') = (y, e', z, z'^{-1})$$

donc nécessairement $y' = x'^{-1}$.

Pour tout $z' \in H$, il existe x' unique tel que:

$$\Psi_y\,(x'^{-1}, x') = z'^{-1}.$$

Comme :

$$\Psi_y\,(x'^{-1}, x')\,\Psi_y\,(x', e') = \Psi_y\,(e', e') = e' \qquad (4.1.2.),$$

il y a donc un $x' \in$ H unique tel que : $\Psi_y\,(x', e') = z'$. La proposition 4.2.5. résulte alors de l'égalité (4.1.3.)

$$\Psi_y\,(x', y') = \Psi_y\,(x'\,y', e')\,(\Psi_y\,(y', e'))^{-1}.$$

4.2.6. *Proposition*

Pour tous :

$$x', y' \in \mathrm{H} \qquad \Psi_e\,(x', y') = x'.$$

En effet, d'après ce qui précède, Ψ_e (î, e') est surjective. De 4.2.4. on déduit :

$$\Psi_e\,(\Psi_e\,(x', e'), e') = \Psi_e\,(x', e') \qquad \text{donc} \qquad \Psi_e\,(x', e') = x',$$

la proposition est conséquence de l'égalité :

$$\Psi_e\,(x', y') = \Psi_e\,(x'\,y', e')\,\,(\Psi_e\,(y', e'))^{-1}.$$

4.2.7. *Proposition*

Soit H_0 l'ensemble des éléments y' de H tels que l'on ait, pour tout $y \in$ G et tout $x' \in$ H :

$$\Psi_y\,(x', y') = \Psi_y\,(x', e').$$

H_0 est un sous groupe de H et Ψ_y restreinte à $\mathrm{H}_0 \times \{ e' \}$ définit un automorphisme τ_y de H_0. En effet, soient y', z' deux éléments de H_0, x' un élément quelconque de H, de 4.2.3. on déduit :

$$\Psi_y\,(x', y')\,\Psi_y\,y', e' = \Psi\,x'\,y', e'$$

donc puisque :

$$y' \in \mathrm{H}_0\,\Psi_y\,x', e'\,\Psi_y\,y', e' = \Psi_y\,x'\,y', e'$$

mais aussi :

$$\Psi_y\,x', y'\,z'\,\Psi_y\,y'\,e' = \Psi_y\,x'\,y', e'$$

puisque $z' \in \mathrm{H}_0$, donc :

$$\Psi_y\,x', e' = \Psi_y\,x', y'\,z' \qquad \text{et} \qquad y'\,z' \in \mathrm{H}_0.$$

H_0 est donc une partie stable de H, donc un sous-groupe. En outre, si on écrit : $\Psi_y\,x', e' = \tau_y\,(x')$ on a montré que $\tau_y\,x'\,y' = \tau_y\,x'\,\tau_y\,y'$. Si $y' \in \mathrm{H}_0$ donc τ_y est un homomorphisme de H_0 dans H. Enfin, $\tau_y\,(x')$ appartient à H_0 si x' est dans H_0 car :

$$\Psi_y\,(\Psi_z\,(y', x'), \Psi_z\,(x', e')) = \Psi_{yz}\,(y', x') = \Psi_{yz}\,(y', e') = \Psi_y\,(\Psi_z\,(y', e'), e') = \Psi_y\,(\Psi_z\,(y', x'), e')$$

d'où le résultat, puisque $\Psi_y\,(y', x')$ est un élément arbitraire de H quand y' varie τ_y étant bijective (4.2.6.), est donc un automorphisme de H_0.

4.2.8. *Remarque*

H_0 est la classe de l'élément neutre e' de H', pour la relation d'équivalence suivante dans H $\quad \Psi_y\,(x', y') = \Psi_y\,(x', z')$, pour tous y, x'.

4.2.9. *Proposition*

$$x' \equiv y' \ (\mathrm{H}_0) \Rightarrow \tau_y \ (x') \equiv \tau \ y \ (y') \ (\mathrm{H}_0).$$

C'est aisé.

On a donc le diagramme suivant, pour tout $y \in \mathrm{G}$:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H} \arrow[r, "\tau_y"] \arrow[d, "\Pi"'] & \mathrm{H} \arrow[d, "\Pi"] \\ {}^{\mathrm{H}}/\mathrm{H}_0 \arrow[r, "\xi_y"'] & \mathrm{H}/_{\mathrm{H}_0} \end{tikzcd}$$

et ξ_y est une permutation de $\mathrm{H}/_{\mathrm{H}_0}$ de la relation (4.2.4.) $\tau_y \, z = \tau_{yz} = \tau_y \circ \tau_z$ on déduit $\xi_{yz} = \xi_y \circ \xi_z$.

4.2.10. Soit s une section de $\mathrm{H}/_{\mathrm{H}_0} \rightarrow_{\mathrm{H}}$, si $y' \in \mathrm{H}$ on peut écrire:

$$y' = \mathrm{s} \ \Pi \ (y') \ x'_0 \qquad x'_0 \in \mathrm{H}_0.$$

Alors:

$$\tau_y \ (y') = \mathrm{s} \ y \ \Pi \ (y') \ \tau_y \ (x'_0).$$

Comme $\Psi_y \ (x', y')$ est connu dès que l'on connaît $\tau_y \ (x')$, on voit que la donnée des automorphismes τ_y de H_0, et des bijections ξ_y détermine la famille des Ψ_y, donc Ψ de manière précise.

4.2.11. *Proposition*

Soit η une représentation de G dans le groupe des automorphismes d'un sous-groupe donné H_0 de H, s une section de $\mathrm{H}/_{\mathrm{H}_0}$, ξ une représentation de G dans le groupe symétrique de l'ensemble $\mathrm{H}/_{\mathrm{H}_0}$. Pour tout $x' \in \mathrm{H}$ posons:

$$\tau_y \ (x') = \mathrm{s} \ \xi_y \ \Pi \ (x') \ {}_y(x')_0 \qquad \text{si} \qquad x' = \mathrm{s} \ \Pi \ (x') \ x'_0 \ x'_0 \ x'_0 \in \mathrm{H}_0$$

si $x', y' \in \mathrm{H}$ posons:

$$\Psi_y \ (x', y') = \tau_y \ (x' \, y') \ \tau_y \ (y')^{-1} \ \Psi \ (x', y, y') = \Psi_y \ (x', \Psi) \ ;$$

alors l'application $\Psi \ \mathrm{H} \times \mathrm{G} \times \mathrm{H} \rightarrow \mathrm{H}$ satisfait aux conditions (4.2.2.) à (4.2.4.) posées au début de ce numéro.

4.3. Étude de φ

4.3.1. Une hypothèse simplificative assez naturelle sera d'abord faite. En 4.2., nous avons montré qu'on pouvait associer à Ψ une représentation τ de G dans le groupe des permutations de l'ensemble H. Nous supposerons τ injective, c'est-à-dire que G s'identifie à un sous-groupe du groupe symétrique de l'ensemble H.

4.3.2. Posons maintenant, si:

$$z' \in \mathrm{H} \ \varphi_{z'} \ (x, y) = \varphi \ (x, y, y')$$

on sait (4.1.2.) que $\varphi_{z'} \ (x, y) = x \, y^{-1}$ l'hypothèse 4.3.1. et 4.1.5. entraînent :

4.3.3. *Proposition*

Pour tous:

$$z' \in H \qquad y \in G \qquad \varphi_{z'}(y, e) = y.$$

De cette proposition et de 4.1.4. on déduit encore:

4.3.4. *Proposition*

Pour tous: $x, z \in G$; $z' \in H$ $\qquad \varphi_{z'}(x, z) = x\, \varphi_{z'}(e, z)$.

4.3.5. La proposition 4.3.4. montre que $\varphi_{z'}$ est connue dès que l'on connaît $\varphi_{z'}(e, z)$ pour tout $z \in G$. Posons alors $\sigma_{z'}(z) = \sigma_{z'}(e, z)$. Par recours de nouveau à [4.1.5.] on voit que $1_H = \tau\sigma_{z'(z)} \circ \tau_z$. Il s'ensuit (4.3.1.).

4.3.6. *Proposition.*

$$\tau_{z'}(z) = z^{-1}.$$

En résumé:

4.3.7. *Proposition*

Si τ G $\rightarrow$ Hom H, H est une application injective l'application φ est entièrement déterminée, et l'on a:

$$\varphi(x, h, y') = x\, y^{-1}.$$

4.4. Un modèle non standard d'association cohérente

Utilisant les résultats des numéros précédents, supposons que $H_0 = H$ (4.2.7.) G s'identifie (4.3.1.) à un sous-groupe du groupe des automorphismes de H. Si $y \in G$, $x' \in H$, notons $y(x')$ la valeur de y au point x' alors

4.4.1. *Proposition*

Si l'on pose:

$$a((x, x')(y, y')) = ((y, x' y'), (x\, y^{-1}, y(x'))),$$

on définit sur $\Omega = G \times H$ une association cohérente bijective non standard.

5. SUR LA DÉTERMINATION DE TOUTES LES ASSOCIATIONS COHÉRENTES BIJECTIVES SUR UN ENSEMBLE FINI

5.1. État de la question

Les résultats précédents sont extrêmement fragmentaires. L'étude faite § 4. et la proposition 3.2.1. permettent de traiter le cas particulier où g est un semi-groupe à gauche; rien ne garantit que la bijectivité de a implique cette propriété.

5.2. L'application inverse de l'association a

Selon une suggestion de J. P. Benzécri (∘) 2), il pourra être utile d'examiner les données résultant de l'existence de l'inverse à de a. On voit facilement que à $= (\bar{g}, \bar{d})$ est une association cohérente sur Ω, bijective, et que les lois $\bar{g}$, $\bar{d}$, g, d sont liées par les quatre relations :

$$\begin{aligned}
(i)\quad & \bar{g}\, g\, \alpha\, \beta\, d\, \alpha\, \beta = \alpha \\
& \bar{d}\, g\, \alpha\, \beta\, d\, \alpha\, \beta = \beta \\
(ii)\quad & g\, \bar{g}\, \alpha\, \beta\, \bar{d}\, \alpha\, \beta = \alpha \\
& d\, \bar{g}\, \alpha\, \beta\, \bar{d}\, \alpha\, \beta = \beta.
\end{aligned}$$

BIBLIOGRAPHIE

BENABOU, J., *Thèse*, Cahiers de topologie différentielle, vol. IX, 1968.

BENZÉCRI, J. P., a) *Cours de linguistique*, deuxième leçon, Faculté des Sciences de Rennes, Laboratoire de calcul, 1964. b) *Sur la théorie des associations*, 1967 (non publié).

ROUBAUD, J., *Morphismes rationnels et algébriques dans les types d'A-algèbres discrètes à une dimension*, Thèse, Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, vol. XVII, fasc. 4, 1968, pp. 1-77.