MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

M. EYTAN

Convexité dans les ensembles ordonnés

Mathématiques et sciences humaines, tome 30 (1970), p. 35-42
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1970__30__35_0>

M.S.H. (8e année; n° 30, 1970, p. 35-42)

CONVEXITÉ DANS LES ENSEMBLES ORDONNÉS [1]

par

M. EYTAN [2]

INTRODUCTION

On se propose de définir la convexité dans les ensembles ordonnés (non nécessairement totalement) et de l'étudier.

Après quelques préliminaires, on reprend le résultat de Kirby A. Baker [1] sur un analogue au théorème de Krein-Millman et on explore les analogues de quelques résultats classiques sous la forme présentée par Bourbaki [2].

Rappels et notations : soit X un ensemble

— un préordre sur X est une relation binaire réflexive et transitive dans X ;

— un ordre sur X est un préordre antisymétrique ;

— un préordre (resp. ordre) est total si pour tout $(x, y) \in X^2$ soit (x, y) soit (y, x) appartient à la relation.

Les notations suivantes seront utilisées dans un ensemble X muni d'un préordre noté $\leqslant$ (on suppose $a \leqslant b$) ; elles restent valables pour un préordre qui est un ordre.

$$[a, b] = \{x \in X : a \leqslant x \leqslant b\}$$
$$[a, b[\ = \{x \in X : a \leqslant x < b\} \qquad \text{où « } x < b \text{ » signifie « } x \leqslant b \text{ et } x \neq b \text{ »}$$
$$]a, b] = \{x \in X : a < x \leqslant b\}$$
$$]a, b[\ = \{x \in X : a < x < b\}$$
$$[a, \rightarrow[\ = \{x \in X : a \leqslant x\}$$
$$]\leftarrow, b] = \{x \in X : x \leqslant b\}$$
$$]a, \rightarrow[\ = \{x \in X : a < x\}$$
$$]\leftarrow, b[\ = \{x \in X : x < b\}.$$

Par convention, lorsque $a \not\leqslant b$, $[a, b] = \emptyset$.

— Un ensemble X muni d'un préordre (resp. ordre) est dit préordonné (resp. ordonné). Si la relation en question est totale, on ajoute « totalement ».

— Un espace topologique X est quasi-compact si de tout recouvrement ouvert de X on peut extraire un recouvrement fini.

1. Texte d'un exposé présenté à Intermediaix, Aix-en-Provence (septembre 1969).
2. Maison des sciences de l'homme, Centre de mathématiques appliquées et de calcul.

— Un espace topologique est compact s'il est quasi-compact et séparé.

— Une partie A d'un espace topologique X est quasi-compacte (resp. compacte) si elle est quasi-compacte (resp. compacte) pour la topologie induite sur A par celle de X.

1. TOPOLOGIES SUR UN ENSEMBLE PRÉORDONNÉ X

1.1. *Topologie droite (resp. gauche).*

Elle a pour base les ensembles $[x, \rightarrow[$ (resp. $]\leftarrow, x]$), x décrivant X.

On démontre que pour la topologie droite toute intersection d'ouverts est un ouvert (la topologie est « saturée» selon la terminologie de F. Lorrain [3]), et X muni de la topologie droite est un espace de Kolmogoroff (c'est-à-dire pour deux points distincts il y a un voisinage de l'un ne contenant pas l'autre) dans lequel l'adhérence de $\{ x \}$ est $]\leftarrow, x]$. Réciproquement, si X est un espace de Kolmogoroff saturé, alors la relation $x \in \overline{\{ y \}}$ est un ordre sur X et la topologie droite correspondante coïncide avec celle donnée au départ.

Autrement dit, il est équivalent de se donner un ordre sur X ou une topologie de Kolmogoroff saturée sur X.

1.2. *Topologie des intervalles*

Elle est appelée $\mathcal{C}_0$ par Bourbaki [4] et topologie de l'ordre par Kelley [5].

Elle est engendrée par les intervalles ouverts $]x, y[$, $]x, \rightarrow[$ et $]\leftarrow, y[$, x et y décrivant X.

Si X est totalement ordonné, on vérifie que la topologie des intervalles a pour base l'ensemble des générateurs ci-dessus. De plus, dans ce cas les intervalles fermés sont des fermés de la topologie. Enfin la topologie est régulière (séparée et telle que les voisinages fermés d'un point forment un système fondamental de voisinages de ce point).

Si X est bien ordonné (toute partie de X a un plus petit élément) on vérifie qu'il est localement compact pour la topologie des intervalles ; X est compact si et seulement si il possède un plus grand élément.

2. THÉORÈME DE KIRBY A. BAKER

2.1. *Parties convexes d'un ensemble ordonné X*

On dira qu'une partie A de X, ordonné, est convexe si la condition suivante est vérifiée :

(C) $$x \in A, y \in A, x \leqslant y \Rightarrow [x, y] \subset A.$$

Soit B une partie quelconque de X. L'enveloppe convexe de B, notée [B] est l'ensemble :

$$[B] = \{ z : \exists x \in B \ \exists \ y \in B \ (z \in [x, y]) \} = \bigcup_{(x,\, y) \in B^2} [x, y].$$

Il est immédiat que l'enveloppe convexe d'un ensemble est le plus petit convexe le contenant et donc qu'un ensemble est convexe si et seulement s'il coïncide avec son enveloppe convexe.

Un point z d'une partie convexe A de X est extrémal si :

$$[x, y] \subset A \quad \text{et} \quad z \in [x, y] \Rightarrow z = x \quad \text{ou} \quad z = y,$$

autrement dit, si z est extrémal pour l'ordre de X. Le profil d'un convexe sera par définition l'ensemble de ses points extrémaux.

2.2. *Résultats de Kirby A. Baker*

Théorème I

Soit A une partie convexe d'un ensemble ordonné X. quasi-compacte pour la topologie des intervalles de X. Alors A est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

En effet soit $z \in A$; pour démontrer le théorème il suffit de montrer que $z \in [x, y]$, x et y étant extrémaux. On se bornera à montrer $z \leqslant y$, l'inégalité $x \leqslant z$ s'obtenant par un raisonnement dual.

Soit C une chaîne maximale de $[z, \rightarrow[_A = [z, \rightarrow[\cap A$ et posons $M = \bigcap_{c \in C} [c, \rightarrow[$.

Les intervalles $[c, \rightarrow[$ sont fermés et forment une famille décroissante. Leur intersection avec le quasi-compact A étant non vide, $M \cap A$ est également non vide (quasi-compacité). Il existe donc $y \in M \cap A$ et par suite $z \leqslant y$ ($C \subset [z, \rightarrow[$ donc $[c, \rightarrow[\subset [z, \rightarrow[$ pour tout $c \in C$ et donc $y \in [z, \rightarrow[$). Reste à voir que y est maximal : or pour tout $c \in C$, $c \leqslant y$ (qui appartient à l'intersection des $[c, \rightarrow[$), donc y est maximal dans C, donc dans A puisque C est une chaîne maximale.

On remarquera que la différence avec le théorème de Krein-Millman est que le convexe A n'est pas supposé compact mais seulement quasi-compact (X pouvant ne pas être séparé), et par suite n'est pas l'enveloppe convexe *fermée* de ses points extrémaux.

Théorème II

Soit T un treillis, A un fermé de T muni de la topologie des intervalles. Alors l'ensemble M (A) des éléments maximaux de A est séparé pour la topologie induite ; de même pour l'ensemble m (A) des éléments minimaux de A.

Soient x et y deux points distincts de M (A). Pour montrer qu'on peut les séparer par des ouverts disjoints de M (A), il suffit de montrer qu'il y a deux fermés F, G de M (A) tels que $x \notin F$, $y \notin G$ et $F \cup G = M(A)$. Pour cela on va montrer qu'il existe deux ensembles K, L fermés dans T tels que $x \notin K$, $y \notin L$ et $A \subset K \cup L$; alors $F = K \cap M(A)$, $G = L \cap M(A)$ vérifient les conditions précédentes, x et y étant maximaux et distincts dans A, $x \vee y \in A$. A étant fermé et les intervalles fermés illimités à gauche ou à droite constituant un système de générateurs pour les fermés de la topologie, il y a un ensemble B, fermé, contenant A et ne contenant pas $x \vee y$ tel que $B = R_1 \cup \ldots \cup R_n$ R_i étant un intervalle fermé illimité d'un côté (B élément d'une base de fermés).

Soit : $K = \{ R_i : x \notin R_i \}$ $\quad L = \{ R_i : y \notin R_i \}$.

Manifestement K et L sont fermés et $x \notin K$, $y \notin L$. Enfin, $A \subset K \cup L$, car si un j existe pour lequel R_j n'est contenu ni dans K ni dans L, alors $x \in R_j$ et $y \in R_j$ donc (R_j intervalle fermé illimité) $x \vee y \in R_j$ si bien que $x \vee y \in B$, absurde. Donc chaque R_i, et par suite B et par suite A, est contenu dans $K \cup L$.

Démonstration duale pour m (A).

Appelant horizontal un ensemble d'éléments incomparables de T, on a le corollaire suivant :

Corollaire

Une partie convexe, quasi-compacte, fermée A d'un treillis T muni de la topologie des intervalles est un « sandwich » constitué de tous les éléments de T compris entre deux sous-espaces séparés horizontaux de T.

Remarque

La topologie des intervalles étant la plus faible des topologies habituellement définies sur un ensemble ordonné (i.e. la topologie gauche et droite, la topologie des idéaux, la topologie de la convergence, etc., Cf. [6]), le théorème I subsiste pour les autres topologies.

3. SÉPARATION DE LA TOPOLOGIE DES INTERVALLES

3.1 *Topologie des intervalles sur X*

On a vu au paragraphe précédent que le théorème de Kirby A. Baker n'était pas l'analogue exact de celui de Krein-Millman à cause du problème de la séparation de X. Il est donc intéressant de se demander dans quels cas particuliers la topologie des intervalles sur X est séparée. C'est ce que nous essayons de faire ci-dessous.

3.2. *Résultats*

1) Remarquons avant toute chose que tout espace X fini séparé est discret (Bourbaki [4]). Le problème de la séparation ne se pose donc que si X est infini. Par ailleurs, si X est fini, il est manifeste que la topologie des intervalles est discrète car : $\{x\} = \bigcap_{\{y : x \leq y\}} [x, y]$ est un fermé par intersection finie de fermés.

2) Ensembles totalement ordonnés.

Proposition 1. — Si X est totalement ordonné, il est séparé pour la topologie des intervalles.

En effet, dans ce cas les intervalles $]x, y[$ forment une base donc un système fondamental de voisinages. Par ailleurs, si $a \neq b$ alors $a < b$ (à une transposition des lettres près).

i) Si b couvre a (pas d'intermédiaire entre eux) alors $]\leftarrow, b[$ et $]a, \rightarrow[$ constituent des voisinages disjoints de a et b respectivement ;

ii) Si b ne couvre pas a i-e $\exists\, c : a < c < b$, alors $]\leftarrow, c[$ et $]c, \rightarrow[$ sont des voisinages disjoints de a et b respectivement.

Corollaire 1

Si X est un produit fini d'ensembles totalement ordonnés $X = \prod_{i \leq n} C_i$ alors X est séparé.

La topologie des intervalles de X est le produit de la topologie des intervalles des C_i puisque $]x, y[= \prod]x_i, y_i[$ d'où le résultat (Bourbaki [4]).

Corollaire 2

Si $X = C^I$, I ensemble fini, C totalement ordonné alors X est séparé. Cas du corollaire 1 avec $C_i = C$ pour tout $i \in I$.

3) Demi-treillis (pour l'opération inf).

Proposition 2. — Un inf-demi-treillis D est séparé pour la topologie des intervalles si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées.

i) Il n'y a pas d'éléments maximaux u et v dans D tels que les sections ouvertes commençantes qu'ils définissent soient toutes deux égales à une même troisième section fermée commençante définie par un élément s de D ;

ii) Il n'y a pas d'éléments non-maximaux u et v dans D tels que les sections ouvertes commençantes (resp. finissantes) qu'ils définissent soient égales toutes deux à une même troisième section fermée commençante (resp. finissante) définie par un élément s (resp. t) de D.

Ou encore :

i') $\nexists$ u, v $\in$ D (u, v maximaux et $]\leftarrow, u[\ = \ ]\leftarrow, v[\ = \ ]\leftarrow, s]$ pour un s $\in$ D) ;

ii') $\nexists$ u, v $\in$ D (u, v non maximaux et $]\leftarrow, u[\ = \ ]\leftarrow, v[\ = \ ]\leftarrow, s]$ pour un s $\in$ D et $]u, \rightarrow[\ = \ ]v, \rightarrow[\ = [t, \rightarrow[$ pour un t $\in$ D).

La démonstration est triviale, tout voisinage de u et de v ayant en commun au moins u et v.

Bien entendu on a un résultat dual pour les sup-demi-treillis.

4) Treillis.

Proposition 3. — Un treillis T est séparé pour la topologie des intervalles si et seulement si la condition suivante est vérifiée :

Il n'y a pas d'éléments x, y, z de T tels que la section ouverte commençante déterminée par x (resp. z) soit égale à celle fermée déterminée par un élément t (resp. v) de T ; que celle ouverte déterminée par y soit égale à l'union de celles fermées déterminées par t ou v et dualement.

Ou encore : $\nexists$ x, y, z $\in$ T ($]x, \rightarrow[\ = [t, \rightarrow[$ pour un t $\in$ T et $]z, \rightarrow[\ = [v, \rightarrow[$ pour un v $\in$ T et $]y, \rightarrow[\ = [t, \rightarrow[\ \cup [v, \rightarrow[$ et $]\leftarrow, x[\ = \ ]\leftarrow, s]$ pour un s $\in$ T et $]\leftarrow, z[\ = \ ]\leftarrow, u]$ pour un u $\in$ T et $]\leftarrow, y[\ = \ ]\leftarrow, s] \cup]\leftarrow, u]$).

La démonstration est immédiate, car si la condition n'est pas réalisée tout voisinage de x et de y ont y au moins en commun.

4. RÉSULTATS DIVERS

Proposition 4. — L'opération $A \mapsto [A]$ qui à une partie A de X, supposé ordonné, associe sa fermeture convexe au sens du paragraphe 2.1 est une fermeture algébrique.

Trivial.

Théorème III (Kakutani)

Soit X un ensemble pré-ordonné, A et B des ensembles convexes disjoints dans X. Alors il existe des convexes C_0, D_0 contenant respectivement A et B formant une partition de X.

Posons en effet $\mathscr{C} = \{ (C, D) : C, D$ convexes disjoints contenant respectivement A et B $\}$. $\mathscr{C}$ n'est pas vide car $(A, B) \in \mathscr{C}$. Si on pose $(C, D) \leqslant (C', D')$ si et seulement si $C \subset C'$ et $D \subset D'$ alors $\mathscr{C}$ est ordonné par la relation $\leqslant$. Toute famille totalement ordonnée de $\mathscr{C}$ $((C_k, D_k))_{k \in K}$ est majorée par $(\bigcup C_k, \bigcup D_k)$ qui manifestement est dans $\mathscr{C}$. Le lemme de Zorn indique alors qu'il y a un élément maximal dans $\mathscr{C}$, (C_0, D_0). Autrement dit :

$$C \supset C_0, D \supset D_0, (C, D) \in \mathscr{C} \Rightarrow C = C_0, D = D_0.$$

Reste à montrer que $C_0 \cup D_0 = X$.

Soit donc $x_0 \in X$. On ne peut avoir à la fois les conditions *i*) et *ii*) suivantes :

i) $\exists\, c \in C_0 \;\exists\, d \in D_0 \qquad (c \in [x_0, d])$;

ii) $\exists\, d_0 \in C_0 \;\exists\, c_0 \in D_0 \qquad (d_0 \in [x_0, c_0])$.

Sinon on aurait : $[c, c_0] \cap [d, d_0] = [d, d_0] \neq \varnothing$ et donc : $C_0 \cap D_0 \neq \varnothing$, contrairement à ce qui précède.

Supposons donc qu'on a (négation de *i*)) :

$$\forall c \in C_0 \qquad \forall d \in D_0 \qquad (c \notin [x_0, d]).$$

Si on pose : $D = [D_0 \cup \{ x_0 \}]$ on a $C_0 \cap D = \varnothing$, donc $(C_0, D) \in \mathscr{C}$ avec $D \supset D_0$ et donc $D = D_0$ i.e. $x_0 \in D_0$.

Autrement dit, soit $x_0 \in D_0$ soit $x_0 \in C_0$ et donc $C_0 \cup D_0 = X$. La démonstration est analogue si c'est la négation de *ii*) qui a lieu.

Proposition 5. — Soit $(A_i)_{i \in I}$, une famille de convexes dans un ensemble ordonné X. Alors $\bigcap_{i \in I} A_i$ est convexe.

Trivial.

Proposition 6. — Soit A_i un convexe de X_i, ordonné ($i \in I$). Alors $\prod_{i \in I} A_i$ est un convexe de $\prod_{i \in I} X_i$ (muni de l'ordre produit).

Trivial.

Proposition 7. — Soit A un convexe de X, ordonné et f une application monotone de X dans Y, ordonné. Alors f (A) est convexe.

Trivial.

Proposition 8. — L'adhérence (dans la topologie des intervalles) d'un convexe A est un convexe.

Il faut démontrer que si $x, y \in \overline{A}$ et $x < z < y$ alors $z \in \overline{A}$ aussi.

En effet, si $z \notin \overline{A}$ il y a un voisinage de z disjoint de A ; on peut supposer que ce voisinage est de la forme $]\alpha, \beta[$ (les intervalles ouverts forment un système fondamental de voisinages) avec $z \in]\alpha. \beta[$.

Or $]\leftarrow, z[$ est un voisinage de x ; comme $x \in \overline{A}$ ce voisinage coupe A en au moins un point $x_0 \in]\rightarrow, z[\cup A$. De même pour $y_0 \in]z, \rightarrow[\cap A$. Par conséquent on a $x_0 < z < y_0$, avec $x_0 \in A$ et $y_0 \in A$. Mais alors la convexité de A entraîne $z \in A$ et l'hypothèse $]\alpha, \beta[\cap A = \varnothing$ est absurde.

Proposition 9. — Soit A un convexe (d'un ensemble ordonné X) ayant au moins un point intérieur x_0. Si $x \in \bar{A}$ alors $[x_0, x[\subset \mathring{A}$ ou $]x, x_0] \subset \mathring{A}$ (selon que $x_0 \leqslant x$ resp. $x \leqslant x_0$). De plus $\mathring{A}$ est convexe.

On suppose, pour faire la démonstration, que $x_0 < x$, la démonstration étant strictement duale dans le cas $x < x_0$. Rappelons par ailleurs que si x_0 et x sont incomparables, alors :

$$[x_0, x[\, = \,]x, x_0] = \emptyset.$$

Soit alors $x \in \bar{A}$ i.e. tout voisinage de x coupe A. En particulier si $y \in]x_0, x[$ l'intervalle $]y, \rightarrow[$ est un voisinage de x qui coupe A ; soit z un point de l'intersection. A étant convexe, $x_0 \in A$ et $z \in A$ entraîne $[x_0, z] \subset A$. Or $[x_0, z]$ est un voisinage de y contenu tout entier dans A, autrement dit $y \in \mathring{A}$. D'où $[x_0, x[\subset \mathring{A}$.

En passant on a démontré la convexité de $\mathring{A}$, puisque :

$$[x_0, y] \subset \mathring{A} \qquad \text{pour} \qquad y \in \mathring{A} \subset \bar{\mathring{A}}.$$

Introduisons maintenant une nouvelle définition : un ensemble ordonné X sera dit *quasi-compact par intervalles* si tout intervalle fermé $[x, y]$ de X est quasi-compact.

Exemples d'ensembles quasi-compacts par intervalles :

— les ensembles ordonnés localement finis (tout intervalle $[x, y]$ est fini) ;
— les ensembles bien ordonnés (cf. Bourbaki [4]) ;
— les treillis relativement complets (Birkhoff [6]).

Proposition 10. — Soit A un quasi-compact d'un ensemble X quasi-compact par intervalles. Alors l'enveloppe convexe de A, [A] est quasi-compacte.

On va utiliser pour la démonstration le théorème d'Alexandre (Kelley [5]) : si $\mathscr{G}$ est un système de générateurs de la topologie de Y et si tout recouvrement ouvert de Y formé d'ensembles de $\mathscr{G}$ contient un sous-recouvrement fini de Y, alors Y est quasi-compact.

Pour la topologie des intervalles de X, un système de générateurs est constitué par les intervalles ouverts I_α, éventuellement illimités. On va appliquer le théorème d'Alexandre à un recouvrement de [A] par des intervalles ouverts.

Soit donc $(I_k)_{k \in K}$ un recouvrement ouvert de [A] par des intervalles ouverts. C'est a fortiori un recouvrement ouvert de A, quasi-compact par hypothèse. On peut donc en extraire un recouvrement ouvert fini de A, $(I_k)_{k \in L}$ ($L \subset K$, L fini).

Or :

$$[A] = \bigcup [x, y] \quad ((x, y) \in A \times A).$$

On peut même ne considérer que les $(x, y) \in A \times A$ tels que $x \leqslant y$ (les autres sont vides)

$$\text{i.e. } [A] = \bigcup [x, y] \quad ((x, y) \in (A \times A) \cap \leqslant)$$

(on confond la relation $\leqslant$ avec son graphe).

Posons maintenant :

$$B = \{ (x, y) \in (A \times A) \cap \leqslant : \exists\, k \in L \, (x \in I_k \text{ et } y \in I_k) \}$$

$$[A]' = \{ z \in [A] : (x, y) \in B \text{ et } z \in [x, y] \}.$$

Appelons enfin L′ la partie de L constituée d'indices d'intervalles I_k recouvrant $pr_1 B \cup pr_2 B$ (qui est une partie de A).

Manifestement, si $(x, y) \in B$ et si k est l'indice vérifiant la condition figurant dans la définition de B, alors $[x, y] \subset I_k$. Par suite $(I_k)_{k \in L'}$ est un recouvrement ouvert fini de $[A]'$ extrait du recouvrement donné au départ $(L' \subset L \subset K)$.

Soit maintenant :

$$C = ((A \times A) \cap \leqslant) - B, \qquad [A]'' = [A] - [A]', \qquad L'' = L - L'$$

et considérons un couple $(x, y) \in C$. X étant quasi-compact par intervalles, on peut extraire du recouvrement ouvert $(I_k)_{k \in K}$ de $[A]$ un recouvrement fini $(I_k)_{k \in L_{xy}}$ de $[x, y] \subset [A]$.

Remarquant que card C est au plus égal à $(\text{card } L'')^2 < +\infty$ et que $(I_k)_{k \in \bigcup_{x,y\,(\in C)} L_{xy}}$ recouvre $[A]''$, on en déduit que le recouvrement ouvert de $[A]$ constitué des I_k avec $k \in L'$ ou $k \in \bigcup_{(x,y) \in C} L_{xy}$ est un recouvrement ouvert fini extrait du recouvrement initial. Donc $[A]$ est quasi-compact.

Corollaire 1

Soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ une famille finie de convexes quasi-compacts de X, quasi-compact par intervalles. Alors l'enveloppe convexe de l'union des A_i est quasi-compacte. Si de plus X est séparé pour la topologie des intervalles l'union des A_i a une enveloppe convexe compacte et est donc égale à l'enveloppe fermée convexe de l'union des A_i.

En effet si les $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ sont quasi-compactes, $\bigcup_{i=1}^{m} A_i$ est trivialement quasi-compacte.

Corollaire 2

Dans un ensemble X ordonné compact par intervalles, l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points est quasi-compacte. Si de plus X est séparé pour la topologie des intervalles, cette enveloppe est compacte.

Trivial.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Baker K. A. — « A Krein-Millman theorem for partially ordered sets », *Amer. math. Monthly*, vol. 76, nº 3, p. 282-283.

[2] Bourbaki. — *Espaces vectoriels topologiques*, chap. 1, Paris, Hermann.

[3] Lorrain F. — « Notes on topological spaces with minimum neighbourhoods », *Amer. math. Monthly*, vol. 76, nº 6, pp. 616-626.

[4] Bourbaki. — *Topologie générale*, chap. 1, Paris, Hermann.

[5] Kelley. — *General topology*, New York, Van Nostrand.

[6] Birkhoff. — *Lattice theory*, A.M.S., New York.