B. MONJARDET

Tresses, fuseaux, préordres et topologies

Mathématiques et sciences humaines, tome 30 (1970), p. 11-22

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1970__30__11_0>

M.S.H. (8e année, nº 30, 1970, p. 11-22)

TRESSES, FUSEAUX, PRÉORDRES ET TOPOLOGIES

par

B. MONJARDET [1]

INTRODUCTION

Le développement en sciences humaines de l'utilisation d'enquêtes par questionnaires a conduit naturellement à s'interroger sur les méthodes d'analyse de ces enquêtes. Ainsi, en analyse hiérarchique on cherche à mesurer par une variable ordonnée l'attitude d'un individu au moyen de ses réponses à un questionnaire; depuis les premiers travaux de Gutmann sur ce sujet, on a élaboré plusieurs techniques pour construire des échelles de Gutmann et mesurer leur adéquation aux réponses obtenues; en même temps un travail de critique et de généralisation des méthodes ou des modèles utilisés a été entrepris (cf. [10]). Plus récemment (cf. [6] et [4]), ces recherches ont été placées dans un cadre abstrait permettant d'utiliser des instruments mathématiques classiques : algèbre de Boole, relations d'ordres, métriques... Ces instruments sont évidemment aussi utiles dans d'autres domaines et pour se limiter aux relations d'ordres, un cas particulièrement intéressant est celui de « l'analyse ordinale » (cf. [8]). Or il se trouve que les problèmes sur les relations d'ordres rencontrés en analyse des questionnaires et en analyse ordinale sont similaires, et des chercheurs ont établi à ce propos des résultats mathématiques rendant compte de cette similitude; ces résultats peuvent se résumer en disant que les notions de tresses et de fuseaux sont équivalentes (cf. [5]). Ces chercheurs ont ainsi rencontré un thème connu des mathématiciens sous le nom de correspondance entre les relations depréordres et les topologies; ce thème n'est pas nouveau : il remonte à un article de Birkhoff en 1937 (cf. [2]) et même plus loin si l'on considère le cas particulier et bien connu de la correspondance entre équivalence et partition. Mais ce thème a fait dernièrement l'objet de résultats nouveaux (cf. [3]) permettant une expression très simple des faits fondamentaux; à l'aide d'autres résultats (cf. [9]), on peut ainsi retrouver d'une façon particulièrement aisée et plus profonde la correspondance entre tresse et fuseau.

L'objet de cet article est donc :

1) De présenter les notions de tresse et de fuseau telles qu'elles apparaissent en analyse hiérarchique et en analyse ordinale;

2) De faire le point sur les résultats mathématiques acquis, résultats se résumant dans l'existence de deux correspondances de Galois; d'utiliser ces résultats pour montrer l'isomorphisme entre tresses et fuseaux;

3) De présenter certains problèmes ouverts autour des notions précédentes, problèmes posés par les mathématiciens ou par les chercheurs en sciences humaines.

N.B. — Dans tout cet article, nous supposerons que les ensembles considérés sont finis, bien que certains résultats soient vrais dans des cas plus généraux.

---

1. Centre de Mathématique Sociale, E.P.H.E., 6e section.

Analyse de questionnaire et tresse

On considère un questionnaire où l'ensemble $E = \{1, 2, \dots i, \dots n\}$ des questions est composé de questions dichotomiques : chaque question comporte deux réponses, par exemple, oui ou non, codées 0 et 1. La réponse d'un sujet α à ce questionnaire se traduit donc par une suite de 0 et de 1 ; on l'appelle aussi le *patron de réponses* du sujet α et on la note :

$$r_\alpha = (r_\alpha^1, \dots r_\alpha^i, \dots r_\alpha^n).$$

A un patron de réponse r_α nous faisons correspondre deux autres objets mathématiques :

1) Une partie X_α de l'ensemble E des questions, composée des questions où la réponse du sujet est 0 :

$$X_\alpha = \{\, i : r_\alpha^i = 0 \,\};$$

2) Un préordre $P\alpha$ sur l'ensemble des questions (c'est-à-dire une relation réflexive et transitive sur E); on pose :

$$(i, j) \in P_\alpha$$

si et seulement si :

$$r_\alpha^i \leqq r_\alpha^j.$$

On vérifie immédiatement que P_α est un préordre, admettant deux classes d'éléments équivalents, X_α et $\complement X_\alpha$; si $r_\alpha^i \leqq r_\alpha^j$ on dit aussi que le patron de réponses obtenu est compatible avec la proposition : la question j est « préférée » à la question i, et le préordre P_α s'appelle aussi *préordre de compatibilité* du patron r_α.

La figure 1 montre un exemple dans le cas d'un questionnaire à sept questions.

0	1	1	0	0	0	1
1	2	3	4	5	6	7

r_α

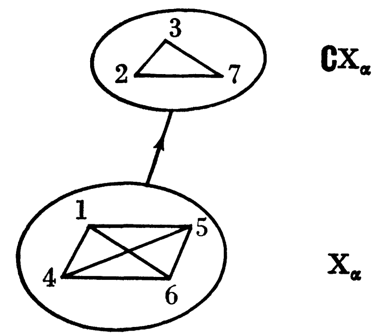

Fig. 1

Considérons maintenant l'ensemble des patrons de réponses obtenus dans une enquête auprès d'un ensemble S de sujets, c'est-à-dire ce que les sociologues appellent le *protocole* de réponses de l'enquête. Il lui correspond :

1) La famille F de toutes les parties X_α de E, associées aux différents patrons r_α. (*N.B.* — Nous utilisons le mot famille de préférence au mot ensemble, lorsque nous considérons des ensembles de sous-ensembles d'un ensemble E.)

2) Le préordre de compatibilité du protocole obtenu par intersection des préordres P_α associés aux différents patrons r_α : $P = \bigcap_{\alpha \in S} P_\alpha$.

On a :

$$[(i, j) \in P] \Leftrightarrow [(i, j) \in P_\alpha, \quad \text{pour tout } \alpha] \Leftrightarrow$$

$$[r_\alpha^i \leqq r_\alpha^j, \quad \text{pour tout } \alpha] \Leftrightarrow [Y^i \supseteq Y^j]$$

où l'on a posé :

$$Y^i = \{\alpha \in S : r_\alpha^i = 0\}.$$

Autrement dit, à chaque question i, on associe la partie Y^i de l'ensemble S des sujets ayant répondu 0 à cette question ; le préordre P de compatibilité sur l'ensemble des questions est le préordre induit par l'ordre d'inclusion $\supseteq$ entre les parties Y^i. Deux questions sont équivalentes pour ce préordre si et seulement si tous les sujets leur ont donné les mêmes réponses. Nous supposerons dans la suite que ce dernier cas n'est pas réalisé ; le préordre de comptabilité est alors un ordre noté O (on peut aussi passer à l'ordre quotient du préordre, défini entre les classes de questions équivalentes).

La figure 2 montre pour un protocole de sept questions la famille F et le préordre de compatibilité O correspondant ; la famille F est un ensemble ordonné pour la relation d'inclusion et on a représenté le diagramme de cet ensemble ordonné (F, $\subseteq$).

1	2	3	4	5
1	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	1	0	0	0
0	0	0	0	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1

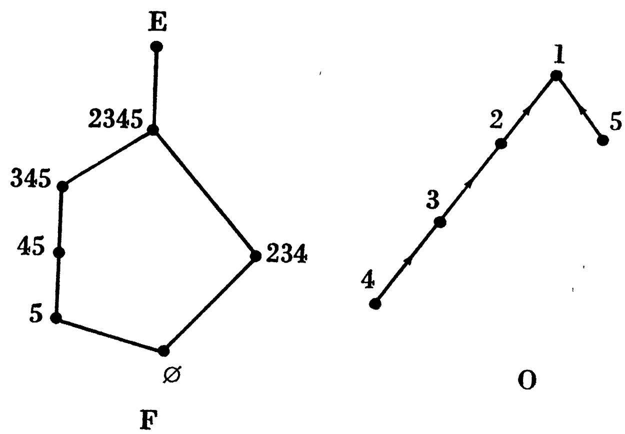

Fig. 2

N. B. — On a considéré ci-dessus l'ensemble E des questions; on peut également considérer l'ensemble S des sujets; il est clair que la famille des parties et le préordre de compatibilité qu'on peut définir sur S correspondent respectivement au préordre de compatibilité et à la famille de parties définies sur E.

Considérons la famille de parties de E associée à un protocole; cette famille peut être absolument quelconque; en particulier elle ne contient pas nécessairement l'intersection ou la réunion de deux des parties qu'elle contient; ainsi dans l'exemple de la figure 2, $\{4, 5\} \cap \{2, 3, 4\} = \{4\}$ n'appartient pas à la famille F.

On dira qu'un *protocole est fermé pour l'union* si la famille F correspondante est stable pour l'union :

$$X \in F, Y \in F \Rightarrow X \cup Y \in F$$

autrement dit F est un sous-treillis pour l'union du treillis booléen P (E); le protocole de la figure 2 est fermé pour l'union. On définit de même un protocole fermé pour l'intersection.

Ces protocoles fermés apparaissent dans les modèles disjonctifs-conjonctifs de Coombs-Kao (cf. [10]); un tel modèle explique la réponse d'un sujet à une question comme résultant d'une combinaison — disjonctive ou conjonctive — des réponses partielles du sujet suivant différents points de vue totalement ordonnés; les protocoles obtenus sont alors fermés pour l'union ou l'intersection.

Un *protocole doublement fermé*, c'est-à-dire fermé à la fois pour l'union et l'intersection est appelé une *tresse de Gutmann*. La famille F est donc dans ce cas un sous-treillis de P (E), c'est-à-dire un treillis distributif; on supposera également que les parties $\emptyset$ et E appartiennent à F (ce qui revient simplement à ajouter deux réponses particulières au protocole, s'il ne les contient pas). Les tresses de Gutmann s'introduisent aussi de la manière suivante: il est clair que différents protocoles peuvent conduire au même ordre de compatibilité; il est alors intéressant pour un ordre donné O de caractériser le protocole le plus vaste — s'il existe — ayant cet ordre comme ordre de compatibilité; on verra au paragraphe suivant que ce protocole est une tresse de Gutmann (la « T_0-topologie» correspondant à l'ordre O). Plus généralement, on établira une correspondance entre les familles de parties d'un ensemble E et les relations binaires sur cet ensemble, correspondance explicitant l'association à un protocole d'une famille F, d'un ordre O et d'une tresse contenant F.

Exercice.

Quelle est la plus petite tresse de Gutmann contenant le protocole de la figure 2 ? Quel ordre de compatibilité lui est-il associé ?

Analyse ordinale et fuseau

L'analyse ordinale a pour but de fournir des méthodes d'investigation d'un « donné» présentant des caractères ordonnés. Il peut s'agir d'infirmer ou de confirmer des hypothèses explicatives de ce donné, comme ce fut le cas pour un problème synoptique (cf. [7]). Les données sont les trois évangiles synoptiques et il s'agit d'expliquer leurs ressemblances et leurs divergences, problème qui a suscité plusieurs systèmes explicatifs opposés. L'analyse ordinale commence par privilégier les relations d'ordres formelles existant dans ces évangiles, c'est-à-dire l'ordre dans lequel sont mentionnés les divers épisodes communs à deux ou trois synoptiques. L'analyse de ces relations permet d'éliminer certaines hypothèses. On construit ensuite un modèle reflétant l'hypothèse de la « documentation multiple », c'est-à-dire de l'utilisation de plusieurs sources au cours de la rédaction d'un récit. L'hypothèse de base est que le rédacteur procède par insertions de témoignages pris à des sources différentes mais en respectant l'ordre de succession de chaque source.

On s'intéresse alors à tous les récits qu'on peut construire par insertion à partir des sources. On formalise facilement ce modèle en assimilant chaque source à une séquence totalement ordonnée et le récit final à un ordre total construit à partir de ces séquences.

Ainsi, si T_A et T_B sont deux ordres totaux définis sur deux ensembles disjoints A et B, on appelle ordre d'insertion de ces deux séquences, un ordre total T défini sur l'ensemble $E = A \cup B$ et compatible avec l'ordre partiel $T_A \cup T_B$; on appelle *fuseau d'insertion* des deux séquences l'ensemble de ces ordres d'insertion. Parmi les ordres d'insertion il y a en particulier les deux ordres obtenus en « mettant bout à bout» les ordres T_A et T_B. De façon précise on pose :

$$R = T_A \cup T_B \cup (A \times B)$$

(où $A \times B$ est l'ordre où tout élément de A est inférieur à tout élément de B) :

$$R' = T_A \cup T_B \cup (B \times A).$$

On a donc :

$$R \cap R' = T_A \cup T_B$$

(cf. l'exemple de la fig. 3).

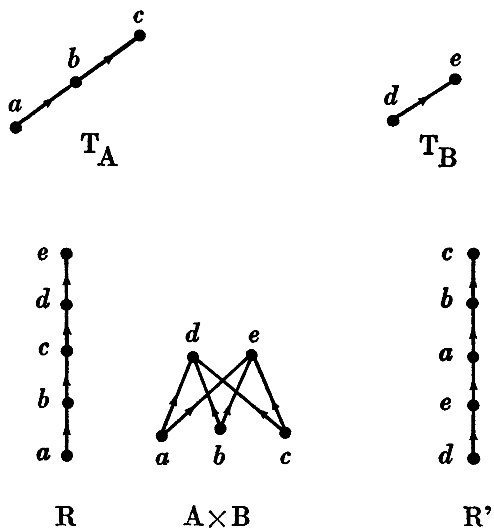

Fig. 3

Le fuseau d'insertion est donc l'ensemble des ordres totaux contenant l'ordre partiel, intersection des deux ordres totaux R et R′, dits pôles du fuseau.

De façon plus générale, on appelle fuseau associé à deux ordres totaux quelconques R_1 et R_2, l'ensemble des ordres totaux compatibles avec l'ordre partiel $R_1 \cap R_2$. De même, le *fuseau associé à n ordres totaux* $R_1, \ldots, R_i, \ldots, R_n$, est l'ensemble des ordres totaux contenant l'ordre partiel $\bigcap_{i=1}^{n} R_i$; ces fuseaux comprennent en particulier les fuseaux d'insertions à *n* séquences.

N. B. — Tout ordre partiel étant intersection d'ordres totaux, l'étude des fuseaux contient en particulier le problème classique mais très difficile, de la détermination de tous les ordres totaux contenant un ordre partiel.

PRÉORDRES ET TOPOLOGIES

Les résultats mathématiques fondamentaux s'appuyant sur l'existence de deux correspondances de Galois, nous allons d'abord rappeler la définition de ce concept. On a une correspondance de Galois entre deux ensembles ordonnés E et F, s'il existe un couple (f, g) d'applications vérifiant les propriétés suivantes :

— f est une application de E dans F, g une application de F dans E ;

— f et g sont deux applications antitones :

$$\forall x, \forall x' \in E, \quad x \leqq x' \Rightarrow fx \geqq fx'$$

$$\forall y, \forall y' \in F, \quad y \leqq y' \Rightarrow fy \geqq fy'$$

Soit h l'application de E dans E, composée de f et g : $h = g \circ f$; soit de même k l'application de F dans F, composée de g et f : $k = f \circ g$; h et k sont extensives :

$$\forall x \in E, \quad x \leqq hx \qquad\qquad \forall y \in F, \quad y \leqq ky.$$

On déduit classiquement de ces propriétés (cf. [1], chapitre V), que h est une application de fermeture dans E, c'est-à-dire que h est extensive, isotone ($\forall x, \forall x' \in E, x \leqq x' \Rightarrow hx \leqq hx'$) et idempotente ($\forall x \in E, hhx = hx$) ; de même k est une fermeture de F. Les éléments égaux à leur fermeture ($hx = x$ ou $ky = y$) sont appelés fermés. Les fermés de E, qui sont les éléments de gF, sont en bijection antitone avec les fermés de F, c'est-à-dire les éléments de fE. Si de plus les ensembles ordonnés E et F sont deux treillis (avec plus grand élément), leurs fermés forment deux treillis duaux :

$$\forall x, \forall x' \text{ fermés de E}, \quad f(x \wedge x') = f(x) \vee f(x')$$

$$f(x \vee x') = f(x) \wedge f(x')$$

Nous allons d'abord définir une correspondance de Galois entre deux treillis booléens : celui P (E^2) de toutes les parties du produit cartésien de l'ensemble E par lui-même, c'est-à-dire le treillis de toutes les relations binaires sur E ; celui P^2 (E) de toutes les familles (ou ensembles) de parties de E.

Définissons d'abord une application f de P (E^2) dans P^2 (E) ; soit R une relation binaire sur E ; on dit qu'une partie S de E est saturée à gauche pour la relation R si :

$$\forall y \in S, [(x, y) \in R \Rightarrow x \in S].$$

On définit l'image f (R) de la relation R par l'application f, comme la famille des parties saturées à gauche de la relation R. (Exemple, fig. 4.)

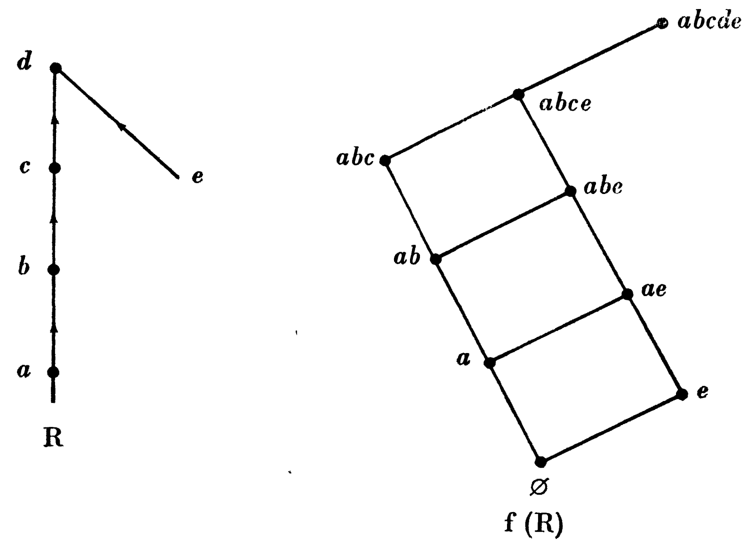

Fig. 4

Définissons maintenant une application p de P^2 (E) dans P (E^2) ; soit F une famille de parties de E ; à x, élément de E, on associe la famille F_x des parties de F contenant x :

$$F_x = \{ X \in F : x \in X \}.$$

On définit ensuite la relation binaire p (F) associée à la famille F en posant :

$$[(x, y) \in \mathrm{p}\,(\mathrm{F})] \Leftrightarrow [\mathrm{F}_y \subseteq \mathrm{F}_x].$$

Autrement dit, le couple (x, y) est dans la relation p(F) si et seulement si toutes les parties de la famille F contenant l'élément y contiennent aussi l'élément x. (Exemple, fig. 5.)

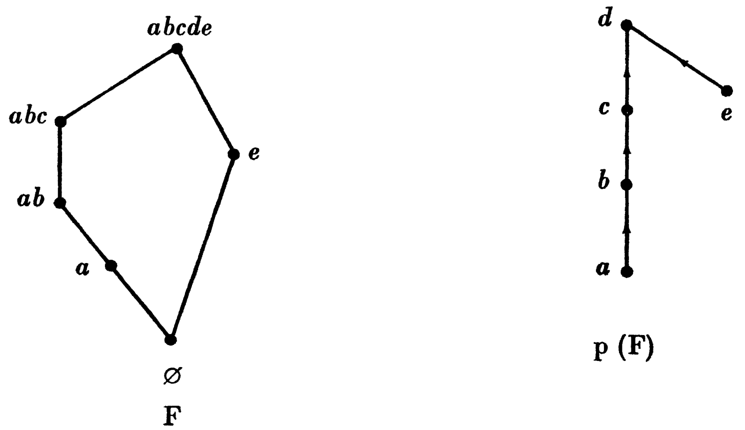

Fig. 5

On vérifie ensuite sans difficultés que le couple d'applications (f, p) est une correspondance de Galois entre P (E^2) et P^2 (E), c'est-à-dire qu'on a :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{R}_1 \subseteq \mathrm{R}_2 \Rightarrow \mathrm{f}\,(\mathrm{R}_2) \subseteq \mathrm{f}\,(\mathrm{R}_1)\\
&\mathrm{F}_1 \subseteq \mathrm{F}_2 \Rightarrow \mathrm{p}\,(\mathrm{F}_2) \subseteq \mathrm{p}\,(\mathrm{F}_1)\\
&\mathrm{R} \subseteq \mathrm{p}\,[\mathrm{f}\,(\mathrm{R})]\\
&\mathrm{F} \subseteq \mathrm{f}\,[\mathrm{p}\,(\mathrm{R})]
\end{aligned}$$

On a donc deux fermetures et deux treillis de fermés duaux dans P (E^2) et P^2 (E). Les fermés de P (E^2) sont les images p (F) des familles de parties de E ; on vérifie immédiatement que p (F) est une relation de préordre sur E (relation réflexive et transitive) ; la fermeture correspondante est la fermeture « réflexo-transitive », associant à une relation binaire R le plus petit préordre $\hat{\mathrm{R}}$ la contenant ; le treillis des fermés est le treillis des préordres : l'infimum de deux préordres P_1 et P_2 est leur intersection ensembliste : $\mathrm{P}_1 \wedge \mathrm{P}_2 = \mathrm{P}_1 \cap \mathrm{P}_2$, leur supremum est la fermeture de leur union : $\mathrm{P}_1 \vee \mathrm{P}_2 = \widehat{(\mathrm{P}_1 \cup \mathrm{P}_2)}$.

Les fermés de P^2 (E) sont les images f (R) des relations binaires ; or, on vérifie facilement que la famille f (R) des parties saturées à gauche pour la relation R vérifie :

$$\varnothing \in \mathrm{f}\,(\mathrm{R}), \quad \mathrm{E} \in \mathrm{f}\,(\mathrm{R})$$

$$\forall\, \mathrm{S}, \forall\, \mathrm{S}' \in \mathrm{f}\,(\mathrm{R}), \quad \mathrm{S} \cap \mathrm{S}' \in \mathrm{f}\,(\mathrm{R}) \quad \text{et} \quad \mathrm{S} \cup \mathrm{S}' \in \mathrm{f}\,(\mathrm{R}).$$

Une telle famille s'appelle une topologie sur E (*rappelons que E est un ensemble fini*) ; les fermés de cette topologie sont les parties saturées ; pour la relation d'inclusion, cette topologie est un sous-treillis de P (E) contenant les parties E et ∅. Le treillis des fermés de P^2 (E) est donc le treillis des topologies de E ; la fermeture correspondante est l'application qui à une famille F de parties de E, associe la plus petite topologie $\overline{\mathrm{F}}$ contenant F.

On peut donc énoncer le résultat suivant :

Théorème I

Le treillis des préordres sur un ensemble E est dual du treillis des topologies sur E.

Dans cette dualité l'intersection de deux préordres correspond au supremum des deux topologies images, leur supremum à l'intersection (ensembliste) des deux topologies. Les préordres maximaux (différents du préordre universel) correspondent aux topologies minimales : ce sont les préordres où E est partitionné en deux classes A et B, tout élément de A étant inférieur à tout élément de B ; il leur correspond la topologie $\{ \emptyset, A, E \}$; on retrouve ici la correspondance qui à tout patron de réponse à un ensemble E de questions, associe soit une partie de E, soit un préordre sur E.

On trouvera des détails sur cette dualité préordres, topologies et sur l'étude des treillis correspondants dans la référence [1], chapitre VI. Pour les applications que nous visons, nous nous intéressons seulement aux relations d'ordres ; il faut donc chercher quelles sont les topologies images des relations d'ordres. Soit x un élément de E ; par rapport à l'ordre $\leqq$, la plus petite partie saturée, c'est-à-dire le plus petit fermé contenant x, est $t(x) = \{ y \in E : y \leqq x \}$; si l'élément x est différent de l'élément y, on a évidemment $t(x)$ différent de $t(y)$; il en résulte que pour deux éléments distincts de E, il existe toujours un ouvert contenant un de ces éléments et non l'autre ; du fait de cette propriété de séparation, on dit que cette topologie est une T_0-topologie. Inversement, le préordre associé à une T_0-topologie est un ordre. Il y a donc bijection entre les ordres et les T_0-topologies sur l'ensemble E. D'autre part, l'ensemble $\mathcal{O}$ des ordres sur E est muni d'une structure d'inf-demi-treillis : l'infimum de deux ordres O_1 et O_2 est leur intersection ensembliste $O_1 \cap O_2$; les ordres maximaux sont les ordres totaux. Dualement, l'ensemble des T_0-topologies est un sup-demi-treillis et on a le résultat :

Théorème II

L'inf-demi-treillis des relations d'ordres sur un ensemble E est dual du sup-demi-treillis des T_0-topologies sur E.

La notion de T_0-topologie est équivalente à celle de tresse de Gutmann ; en effet, on a défini une tresse comme un protocole dont la famille F est un sous-treillis de P (E) contenant E et $\emptyset$, c'est-à-dire une topologie ; quant à la condition de T_0-séparation elle provient de l'hypothèse faite que deux questions n'ont pas eu les mêmes réponses pour tous les sujets ; on verra plus loin que cette hypothèse est aussi équivalente à ce que la longueur des chaînes maximales entre $\emptyset$ et E dans le treillis F est égale au nombre n des questions. Dans le théorème précédent on peut donc remplacer « T_0-topologies » par « tresses ».

Nous allons maintenant définir une deuxième correspondance de Galois entre le demi-treillis $\mathcal{O}$ des ordres et le treillis booléen $P(\mathcal{O}^t)$ des ensembles d'ordres totaux (cf. [9]).

$$\mathcal{O} \longrightarrow P(\mathcal{O}^t) \qquad\qquad P(\mathcal{O}^t) \longrightarrow \mathcal{O}$$

$$O \longrightarrow \{ T \in \mathcal{O}^t : T \supset O \} \qquad\qquad \{ T_1, \ldots T_i, \ldots T_r \} \longrightarrow \bigcap_{i=1}^{r} T_i$$

Autrement dit, à un ordre on fait correspondre l'ensemble des ordres totaux le contenant, et à un ensemble d'ordres totaux on fait correspondre l'ordre intersection de ces ordres totaux ; on vérifie facilement qu'on a bien aussi défini une correspondance de Galois entre l'ensemble des ordres et l'ensemble des parties d'ordres totaux. On a donc deux ensembles de fermés en bijection dans $\mathcal{O}$ et dans $P(\mathcal{O}^t)$. Tout ordre étant intersection des ordres totaux le contenant, l'ensemble des fermés de $\mathcal{O}$ est l'ensemble $\mathcal{O}$ lui-même ; quant aux parties fermées de $\mathcal{O}^t$ ce sont les ensembles $F = \{ T_1, \ldots T_i, \ldots T_r \}$ d'ordres totaux vérifiant :

$$\forall\, T \in \mathcal{O}^t, \qquad [T \supset \bigcap T_i \Rightarrow T \in F]$$

Ce sont de tels ensembles d'ordres totaux qu'on a appelés des fuseaux d'ordres au paragraphe 1. Enfin du fait de la correspondance de Galois, l'ensemble des fuseaux peut être muni d'une structure de sup-demi-treillis duale de celle des ordres, ce qui s'énonce :

Théorème III

L'inf-demi-treillis des ordres sur un ensemble E est dual du sup-demi-treillis des fuseaux d'ordres totaux sur cet ensemble.

La correspondance de Galois précédente est classique dans l'étude des treillis, ou demi-treillis, atomiques ou coatomiques. Par contre, le résultat suivant montré également dans la référence [9], n'a rien de classique : il n'est d'ailleurs pas vérifié en général. Il s'énonce : l'ensemble des fuseaux d'ordres totaux sur un ensemble E est identique à l'ensemble des parties convexes de l'ensemble des ordres totaux; un ensemble d'ordres totaux est dit convexe si, lorsque cet ensemble contient deux ordres totaux T_1 et T_2, il contient l'intervalle $[T_1, T_2]$, c'est-à-dire tous les ordres totaux contenant $T_1 \cap T_2$:

$$[F = \{ T_i, T_i \in \mathcal{O}^t \} \text{ convexe}] \Leftrightarrow [\forall T_1, \forall T_2 \in F, \forall T \supset T_1 \cap T_2 \Rightarrow T \in F]$$

Il est clair qu'un fuseau est une partie convexe; la réciproque est montrée dans [9]. On parlera donc indifféremment de fuseau ou de partie convexe de $\mathcal{O}^t$.

On peut maintenant en comparant les théorèmes II et III obtenir le résultat suivant :

Théorème IV

Le sup-demi-treillis des T_0-topologies (ou tresses) sur un ensemble E est isomorphe au sup-demi-treillis des parties convexes (ou fuseaux) d'ordres totaux sur E et anti-isomorphe à l'inf-demi-treillis des ordres sur E.

L'isomorphisme énoncé dans ce théorème s'explicite facilement.

Soit une T_0-topologie sur l'ensemble $E = \{ x_1, \dots x_i, \dots x_n \}$; c'est un sous-treillis distributif de P (E) ayant la partie vide comme plus petit élément, la partie E comme le plus grand élément; soit O l'ordre sur E image de cette T_0-topologie; on va montrer que les ordres totaux contenant l'ordre O correspondent aux chaînes maximales de Ø à E dans le treillis précédent.

Soit :

$$T = x_1 < x_2, \dots < x_i, \dots < x_n,$$

un ordre total contenant l'ordre O; à cet ordre T correspond la T_0-topologie :

$$\emptyset \subset S_1 = \{ x_1 \} \subset S_2 = \{ x_1, x_2 \}, \dots \subset S_i = \{ x_1, \dots x_i \} \subset \dots S_n = E.$$

Les S_i sont des parties saturées pour l'ordre T, donc a fortiori des parties saturées pour O

$$(O \subset T \Rightarrow f(T) \subset f(O));$$

on a donc obtenu une chaîne maximale de Ø à E dans le treillis des parties saturées de l'ordre O; on remarque aussi que cette chaîne maximale est de longueur n et donc que toutes les autres chaînes maximales de Ø à E dans le treillis des parties saturées sont de longueur n (puisque ce treillis est distributif). Inversement, soit une chaîne maximale dans ce treillis :

$$\emptyset \subset S_1 \dots \subset S_i \subset S_{i+1} \dots \subset S_n = E,$$

elle forme une T_0-topologie. Posons :

$$S_{i+1} = S_i \cup \{ x_{i+1} \}.$$

L'image de la T_0-topologie précédente est l'ordre total :

$$T : x_1 < x_2 \dots < x_i < x_{i+1} \dots < x_n ;$$

il est clair qu'il contient l'ordre O (puisque $F \subseteq F' \Rightarrow r(F') \subseteq r(F)$).

Ainsi si l'on considère une tresse, le fuseau correspondant est déterminé par l'ensemble des chaînes maximales de la tresse.

Dans l'exemple suivant, on a représenté un ordre ainsi que la tresse et le fuseau correspondants.

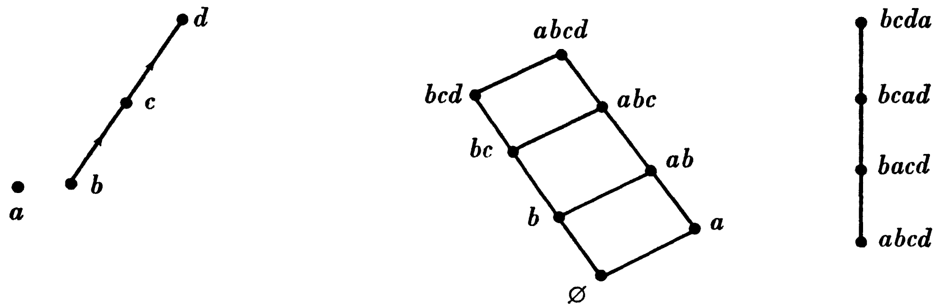

Fig. 6

Remarque

On a supposé plus haut que deux questions du questionnaire E n'ont pas toujours les mêmes réponses ; ceci permettait d'identifier tresse et T_0-topologie. Si on ne fait pas cette hypothèse, une tresse s'identifie à une topologie quelconque. Au théorème IV correspond alors le théorème suivant :

Le treillis des topologies (ou tresses) sur un ensemble E est isomorphe au treillis des fuseaux de préordres maximaux sur E et anti-isomorphe au treillis des préordres sur E.

Un fuseau de préordres maximaux est ici un ensemble de préordres maximaux contenant un préordre donné ; un fuseau est aussi un ensemble convexe de préordres maximaux (la réciproque est à étudier).

PROBLÈMES OUVERTS

Nous commençons par signaler quelques problèmes mathématiques relatifs aux questions précédentes ; d'abord, l'étude des treillis ou demi-treillis définis ci-dessus : préordres, équivalences, ordres,... ; si pour le treillis des équivalences, on connaît de nombreux résultats depuis assez longtemps (cf. par ex. *M.S.H.* n° 22), l'étude des autres treillis est beaucoup moins avancée ; on trouvera l'état actuel des travaux dans [1] au chapitre VI. Dans le demi-treillis des ordres, on peut s'intéresser aux intervalles [P, → [, c'est-à-dire à l'ensemble des ordres contenant un ordre P ; cet intervalle contient en particulier tous les ordres totaux compatibles avec P ; on montre facilement que l'ordre P est intersection de tous ces ordres totaux ; on dit que les ordres totaux compatibles avec P constituent une représentation (par intersection) de P ; les représentations minimales de P (comme intersections d'ordres totaux) constituent les « bases » de l'ordre P ; on appelle dimension de l'ordre P le cardinal minimal des bases, c'est-à-dire le nombre minimum d'ordres totaux dont l'intersection est P. La recherche de la dimension d'un ordre et des propriétés de la fonction dimension est un problème difficile ; c'est ainsi qu'on peut remarquer que toutes les bases d'un ordre n'ont pas même cardinal et que la fonction dimension n'est pas isotone ; c'est-à-dire qu'on n'est ni dans le cadre de la théorie des matroïdes (ou treillis géométriques) ni même dans celui des treillis gradués.

Aux problèmes précédents correspondent des problèmes difficiles de dénombrement : nombre des ordres, nombre des ordres totaux contenant un ordre partiel, nombre des bases d'un ordre ; remarquer que le problème de dénombrement des ordres totaux contenant un ordre est équivalent au problème de dénombrement des chaînes maximales d'un treillis distributif (la tresse associée à l'ordre).

Nous considérons maintenant les problèmes posés par l'analyse hiérarchique. D'abord, les techniques d'analyse hiérarchique effectivement utilisées conduisent à un ordre total, une échelle de Gutmann, sur l'ensemble des questions ; cet ordre n'est pas toujours un ordre de la tresse associée au questionnaire ; pourquoi ? et comment définir une technique d'analyse conduisant toujours à des ordres de la tresse ?

Dans [1] et [10], M. Barbut propose une méthode pour rechercher toutes les « échelles de Gutmann » pouvant être « associées » à un protocole ; pour cela, il considère la relation entre les ensembles E de questions et S de sujets définie par : « Tel sujet a répondu positivement à telle réponse » ; à cette relation est associée une correspondance de Galois entre P (E) et P (S) et donc un treillis ; à une chaîne maximale de ce treillis, on peut associer un réarrangement des lignes et des colonnes du tableau des réponses faisant apparaître une configuration « proche » de celle d'une échelle de Gutmann parfaite (disposition des 0 en « escalier ») ; inversement, tous les réarrangements de ce type sont obtenus au moyen d'une chaîne maximale du treillis ; aux réarrangements précédents correspondent des ordres totaux sur E (et sur S), qu'on appelle les échelles de Gutmann associées au protocole.

Que peut-on dire des ordres totaux ainsi obtenus sur l'ensemble des questions, par rapport à ceux déterminés par la tresse associée au protocole ?

On constate facilement qu'en général, tous les ordres totaux de la tresse ne sont pas obtenus et qu'inversement, on obtient des ordres non dans la tresse. Les deux méthodes donnent donc des résultats différents ; elles présentent cependant une certaine analogie qui justifie une étude comparée plus approfondie que nous proposons comme thème de recherche (il faut comparer les treillis associés aux deux méthodes, mais ils ne semblent pas avoir de relations simples).

Dans la généralisation de l'analyse hiérarchique proposée par Flament, le modèle d'échelle de Gutmann est remplacé par celui de tresse de Gutmann ; on est donc amené à étudier certains problèmes sur les tresses ou de façon équivalente sur les ordres partiels ; ainsi la recherche des générateurs d'une tresse est le problème de trouver des « bases » (pour les opérations $\vee$ *et* $\wedge$) d'un treillis distributif ou encore le problème de la représentation d'un ordre partiel comme intersection de préordres maximaux. Un autre problème est celui de comparer les différents modèles utilisables, c'est-à-dire ici de comparer les tresses. Peut-on établir une distance ou plus faiblement un indice d'écart ou de similitude entre elles ; dans [4], on caractérise les tresses par leur « largeur » qui est simplement le nombre de couples d'éléments comparables dans l'ordre partiel associé (à un coefficient près) ; mais il reste à différencier les tresses de même largeur.

Dans tout cet article, on a considéré que les réponses au questionnaire étaient dichotomiques ; mais on peut aussi bien considérer que les réponses à la question q_i appartiennent à un ensemble R_i totalement ordonné quelconque; un patron de réponse sera alors un élément du produit direct $R = \prod R_i$;

et l'ensemble des patrons de réponses possibles sera isomorphe à un treillis distributif produit direct d'ordres totaux. Les notions étudiées dans cet article se généraliseront facilement à ce cas.

Pour terminer, remarquons que nous n'avons pas du tout parlé des problèmes d'ajustement, qui consistent à approximer un protocole réel observé par un modèle théorique (cf. [4]) ; ils posent cependant d'intéressantes questions sur le choix des distances ou la définition des coefficients d'ajustement à adopter, et il faudra y revenir.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Barbut M., Monjardet B. — *Ordre et classification*, Hachette, Paris, 1970.

[2] Birkhoff G. — « Ring of sets », *Duke Math. J.* 3, 1937, p. 443-454.

[3] Chacron. — « Les relations de préordre, les ensembles de parties stables pour l'intersection et la réunion finies ou infinies », thèse, 3e cycle, Paris.

[4] Degenne A. — *L'analyse ordinale de données, méthodes statistiques et métriques*, Hachette, 1971.

[5] Flament C. — Tresses de Gutmann dans « Ordres : Travaux du séminaire sur les ordres totaux finis », Aix-en-Provence, juillet 1967, Mouton et Gauthier-Villars, Paris, 1970.

[6] [Flament C. — *L'analyse algébrique de questionnaires*, Thèse et *Mathématiques et sciences humaines*, Paris, 12, 1965.

[7] Frey L., *A propos des évangiles synoptiques* dans *Calcul et formalisation dans les sciences humaines*, C.N.R.S. Paris, 1968.

[8] Frey L. — *L'analyse ordinale des données, méthodes algébriques*, Hachette, Paris, 1971.

[9] Feldman-Högaasen J. — « Ordres partiels et permutoèdre », *Mathématiques et sciences humaines*, Paris, 28, 1970.

[10] Matalon B. — *L'analyse hiérarchique*, Mouton et Gauthier-Villars, Paris, 1965.