MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

H. DURUP

Éléments pour l'étude de relations localement définies (« infra-relations »). Infra-ordres et relation ternaire d'intermédiarité

Mathématiques et sciences humaines, tome 29 (1970), p. 17-32

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1970__29__17_0>

M.S.H. (9e année, n° 29, 1970, p. 17-32)

ÉLÉMENTS POUR L'ÉTUDE DE RELATIONS LOCALEMENT DÉFINIES (« INFRA-RELATIONS »). INFRA-ORDRES ET RELATION TERNAIRE D'INTERMÉDIARITÉ.

par

H. DURUP *

INTRODUCTION ET RÉSUMÉ

Dans les sciences de la Nature, et en particulier dans les sciences du comportement, on rencontre fréquemment des relations caractérisées par des propriétés locales. *Une famille très vaste de telles relations rassemble celles qui sont définies uniquement par des propriétés portant sur les* ensembles d'éléments liés à un même élément, *soit par la relation* (« *points vus d'un même point* »), *soit par son inverse* (« *points d'où l'on voit un même point* »). *A tout type de relation correspondent ainsi plusieurs types de relations localement définies, que nous avons appelées* « infra-relations ». *Nous démontrerons un certain nombre de propriétés des infra-relations binaires. Nous serons amené d'autre part à définir une relation que nous appellerons* « *méta-relation* », *associée à toute relation binaire et qui présente des propriétés intéressantes pour l'étude des infra-relations. Nous ne chercherons pas à pousser la systématisation plus loin : ce serait de la compétence d'un mathématicien.*

Nous envisagerons ensuite plus spécialement le cas des infra-relations d'ordre, *à partir desquelles nous pourrons définir une* relation ternaire d'intermédiarité *plus faible que les relations habituellement envisagées, relation qui permet en particulier de caractériser des intermédiaires locaux sur un graphe à structure globale circulaire.*

REMARQUE SUR LES NOTATIONS.

Afin de simplifier l'écriture des expressions, nous utiliserons la virgule à la place du signe « *et* ». *Nous nous dispenserons d'autre part d'écrire des parenthèses dans la mesure permise par la hiérarchie suivante entre les signes:*

1) $\left\{ \begin{array}{l} \Leftrightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \right.$ 2) , 3) *ou* 4) *autres signes*

1. — INFRA-RELATIONS.

Soient des types $\mathscr{P}$, $\mathscr{R}$, etc., de relations binaires dans des ensembles (exemples de *types de relations* : « la relation d'équivalence », « la relation d'ordre total », ...). X étant un ensemble, nous

* C.N.R.S. Institut de Neurophysiologie et Psychophysiologie. Département du Comportement Animal. Marseille.

désignons par (P, X) la correspondance entre X et lui-même définie par la relations $P\{x, x'\}$[1] avec $(x, x') \in X^2$. Nous considérerons, pour un élément $a \in X$, l'ensemble $P(a)$, *coupe* de la relation P suivant a (c'est-à-dire l'ensemble des images de a par P) et la relation $P_a(P, X)$, *restriction* de la relation P à l'ensemble $P(a)$ (ou « trace » de P sur $P(a)$).

1.1. — *Définitions.*

1.1.1. — *Types généraux d'infra-relations.*

Nous appelons « *type général d'infra-$\mathscr{R}$ à droite* » le type de relation $\mathscr{P}$ défini en fonction du type de relation $\mathscr{R}$ par :

$$\forall\ (P, X), \quad \forall\ a \in X, \quad (P \in \mathscr{P} \Leftrightarrow P_a \in \mathscr{R}) \tag{1}$$

En considérant de façon analogue la relation P^{-1}, la coupe $P^{-1}(a)$ et la restriction P_{-a} de P à $P^{-1}(a)$, nous appelons « *type général d'infra-$\mathscr{R}$ à gauche* » le type de relation $\mathscr{P}$ défini en fonction de $\mathscr{R}$ par :

$$\forall\ (P, X), \quad \forall\ a \in X, \quad (P \in \mathscr{P} \Leftrightarrow P_{-a} \in \mathscr{R}) \tag{2}$$

Enfin, nous appelons « *type général d'infra-$\mathscr{R}$* » le type de relation $\mathscr{P}$ défini en fonction de $\mathscr{R}$ par :

$$\forall\ (P, X), \quad \forall\ a \in X, \quad (P \in \mathscr{P} \Leftrightarrow P_a \in \mathscr{R}, \quad P_{-a} \in \mathscr{R}). \tag{3}$$

1.1.2. — *Types d'infra-relations.*

D'autre part, nous appelons « *type d'infra-$\mathscr{R}$ à droite* », « *type d'infra-$\mathscr{R}$ à gauche* » ou « *type d'infra-$\mathscr{R}$* » tout type de relation $\mathscr{P}$ qui vérifie respectivement :

$$\forall\ (P, X), \quad \forall\ a \in X, \quad (P \in \mathscr{P} \Rightarrow P_a \in \mathscr{R}) \tag{4}$$

$$\forall\ (P, X), \quad \forall\ a \in X, \quad (P \in \mathscr{P} \Rightarrow P_{-a} \in \mathscr{R}) \tag{5}$$

$$\forall\ (P, X), \quad \forall\ a \in X, \quad (P \in \mathscr{P} \Rightarrow P_a \in \mathscr{R}, \quad P_{-a} \in \mathscr{R}). \tag{6}$$

A tout type de relation $\mathscr{R}$ correspond une famille de types d'infra-$\mathscr{R}$ qui contient le type général d'infra-$\mathscr{R}$, unique. La notation fonctionnelle $\mathscr{P}(\mathscr{R})$ ne pourra donc désigner que le type général d'infra-$\mathscr{R}$.

1.2. — *Caractérisation axiomatique directe d'un type d'infra-relation.*

Chacune des relations (1), (2) et (3) permet, pour un type de relation $\mathscr{R}$ défini par un produit d'axiomes $(R_1, \ldots, R_n)$, d'écrire un produit d'axiomes caractérisant le type général d'infra-$\mathscr{R}$ correspondant. Le mode de production évident de ces axiomes consiste à écrire que chaque axiome de $\mathscr{R}$ est vrai dans $P_x(P, X)$ ou dans $P_{-x}(P, X)$, ou dans les deux, pour tout $x \in X$.

1.2.1. — Nous supposerons d'abord que ces axiomes ne comportent pas le quantificateur $\exists$. Considérons les axiomes A'_k et A''_k définis de la façon suivante à partir de l'axiome R_k portant sur un nombre e d'éléments distincts, B_k désignant l'axiome obtenu en remplaçant R ($\in \mathscr{R}$) par P dans R_k:

$$A'_k : \quad P\{a, x_1\}, \quad P\{a, x_2\}, \ \ldots, \ P\{a, x_e\} \Rightarrow B_k(x_1, x_2, \ldots, x_e) \tag{7}$$

$$A''_k : \quad P\{x_1, a\}, \quad P\{x_2, a\}, \ \ldots, \ P\{x_e, a\} \Rightarrow B_k(x_1, x_2, \ldots, x_e). \tag{8}$$

1. Pour des raisons typographiques, la notation classique $P\ \}x, x'\{$ a été remplacé ici par $P\ \{x, x'\}$; cette écriture ne doit pas donner à penser que x et x' peuvent être écrit dans n'importe quel ordre.

Le produit d'axiomes $(A'_1, \ldots, A'_n)$ définit, de façon parfois inutilement lourde, le type général d'infra-$\mathscr{R}$ à droite. De même, le produit $(A''_1, \ldots, A''_n)$ définit le type général d'infra-$\mathscr{R}$ à gauche. Enfin, le produit $(A'_1, A''_1, \ldots, A'_n, A''_n)$ définit le type général d'infra-$\mathscr{R}$.

L'axiome B_k est le plus souvent sous la forme $T \Rightarrow T'$; dans ce cas, l'axiome A'_k prend la forme:

$$A'_k : \quad P\{a, x_1\}, \quad P\{a, x_2\}, \ \ldots, \ P\{a, x_e\}, \ T \Rightarrow T' \ ; \tag{9}$$

La même remarque s'applique à A''_k. L'axiome A_k s'écrit alors :

$$A_k : \quad (P\{a, x_1\}, P\{a, x_2\}, \ \ldots, \ P\{a, x_e\}) \text{ ou } (P\{x_1, a\}, P\{x_2, a\}, \ \ldots, \ P\{x_e, a\}), \ T \Rightarrow T' \tag{10}$$

1.2.2. — Lorsqu'un axiome de $\mathscr{R}$ comporte le quantificateur $\exists$ sous la forme :

$$R_k : \quad \exists \ (y_1, \ldots, y_f), R'_k(x_1, \ldots, x_e, y_1, \ldots, y_f),$$

l'axiome A'_k correspondant s'écrit, si B'_k désigne R'_k dans lequel R est remplacé par P :

$$P\{a, x_1\}, \ldots, P\{a, x_e\} \Rightarrow \exists \ (y_1, \ldots, y_f), P\{a, y_1\}, \ldots, P\{a, y_f\}, B'_k(x_1, \ldots, x_e, y_1, \ldots, y_f). \tag{11}$$

Il en va de même pour l'axiome A''_k. L'axiome A_k s'en déduit comme au paragraphe précédent.

1.3. — *Propriétés communes à diverses relations.*

Une propriété comme la réflexivité ou la transitivité représente en fait un type de relation, qui a la particularité d'être défini par un seul axiome. Afin de suivre l'usage, nous traiterons ce type de relation en tant que propriété éventuelle d'un type de relation moins élémentaire. Au lieu de parler du type de relation d'infra-transitivité, nous parlerons de la propriété (ou relation) d'infra-transitivité, mais les définitions seront exactement celles du paragraphe 1.1. Nous envisagerons toujours, non pas des relations par rapport à des lettres mais des relations dans un ensemble, tout en omettant le plus souvent d'écrire les relations d'appartenance à l'ensemble, afin d'alléger l'écriture.

1.3.1. — *Infra-réflexivité.*

De la relation de réflexivité dans un ensemble :

$$R_1 : \quad R\{x, x\} \Leftrightarrow x \in X,$$

on déduit la relation d'infra-réflexivité à droite (par exemple) :

$$A'_1 : \quad P\{t, x\} \Rightarrow P\{x, x\},$$

et la relation d'infra-réflexivité :

$$A_1 : \quad P\{t, x\} \Rightarrow P\{t, t\}, \ P\{x, x\}.$$

La relation d'infra-réflexivité dans un ensemble est identique à la relation de réflexivité par rapport à deux lettres.

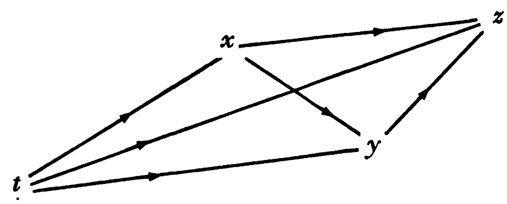
1.3.2. — *Infra-transitivité.*

De la relation de transivité :

$$R_2 : \quad R\{x, y\}, \quad R\{y, z\} \Rightarrow R\{x, z\},$$

on déduit la relation d'infra-transitivité à droite :

$$A'_2 : \quad P\{t, x\}, \quad P\{t, y\}, \quad P\{t, z\}, \quad P\{x, y\}, \quad P\{y, z\} \Rightarrow P\{x, z\}$$



et la relation d'infra-transitivité :

$$A_2 : \quad (P\{t, x\}, \ P\{t, y\}, \ P\{t, z\}) \quad \text{ou} \quad (P\{x, t\}, \ P\{y, t\}, \ P\{z, t\}), \ P\{x, y\}, \ P\{y, z\} \Rightarrow P\{x, z\}.$$

1.3.3. — *Infra-symétrie.*

De la relation de symétrie :

$$R_3 : \quad R\{x, y\} \Rightarrow R\{y, x\},$$

on déduit la relation d'infra-symétrie à droite :

$$A'_3 : \quad P\{t, x\}, \ P\{t, y\}, \ P\{x, y\} \Rightarrow P\{y, x\},$$

et la relation d'infra-symétrie :

$$A_3 : \quad (P\{t, x\}, \ P\{t, y\}) \quad \text{ou} \quad (P\{x, t\}, \ P\{y, t\}), \ P\{x, y\} \Rightarrow P(y, x\},$$

qui est équivalente à la relation suivante :

$$A_3 \ bis : \quad P\{x, y\}, \ P\{y, z\}, \ P\{x, z\} \Rightarrow P\{y, x\}, \ P\{z, y\}, \ P\{z, x\}.$$

1.3.4. — *Infra-antisymétrie.*

De la relation d'antisymétrie :

$$R_4 : \quad R\{x, y\}, \quad R\{y, x\} \Rightarrow x = y$$

on déduit la relation d'infra-antisymétrie à droite :

$$A'_4 : \quad P\{t, x\}, \ P\{t, y\}, \ P\{x, y\}, \ P\{y, x\} \Rightarrow x = y,$$

ainsi que les relations A''_4 et A_4 correspondantes.

1.3.5. — *Infra-comparabilité.*

De la relation de comparabilité dans un ensemble :

$$\mathrm{R}_5 : \quad R\{x, y\} \quad \text{ou} \quad R\{y, x\} \Leftrightarrow (x, y) \in X^2,$$

on déduit la relation d'infra-comparabilité à droite :

$$A'_5 : \quad P\{t, x\}, \ P\{t, y\} \Rightarrow P\{x, y\} \quad \text{ou} \quad P\{y, x\},$$

ainsi que A''_5 et A_5.

1.4. — *Infra-stabilité.*

1.4.1. — Nous dirons qu'un type de relation $\mathcal{R}$ est *infra-stable* à droite lorsque :

$$\forall\ (R,\ X),\quad \forall\ a \in X,\quad (R \in \mathcal{R} \Rightarrow R_a \in \mathcal{R}). \tag{12}$$

Les relations déduites des relations (5) et (6) de la même façon que (12) s'obtient de (4) définissent l'infra-stabilité à gauche et l'infra-stabilité.

1.4.2. — De nombreux types de relations vérifient la propriété suivante, *plus forte* que l'infra-stabilité (et sont donc a fortiori infra-stables) :

$$\forall\ (R,\ X),\quad \forall\ A \subset X,\quad (R \in \mathcal{R} \Rightarrow R_{\mathrm{A}} \in \mathcal{R}), \tag{13}$$

R_{A} désignant la trace de R sur A.

C'est, par exemple, le cas des relations de *réflexivité*, de *transitivité*, de *symétrie*, *d'antisymétrie*, de *comparabilité*, et par conséquent des relations d'*équivalence*, de *préordre* et d'*ordre*, toutes définies par des axiomes ne comportant pas le signe $\exists$.

1.4.3. — Si $\mathcal{R}$ est un type de relation infra-stable et si $\mathcal{P}(\mathcal{R})$ est le type général d'infra-$\mathcal{R}$, alors $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\mathcal{R})$. Certains types d'infra-$\mathcal{R}$ se présentent dans ce cas comme des affaiblissements du type de relation $\mathcal{R}$ intermédiaires entre ce type et le type général d'infra-$\mathcal{R}$: $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}_i \subset \mathcal{P}(\mathcal{R})$. Les autres types d'infra-$\mathcal{R}$ se présentent comme des relations qui sont plus fortes que $\mathcal{P}(\mathcal{R})$ dans une direction qui ne conduit pas à $\mathcal{R}$: on a seulement la relation générale $\mathcal{P}_j \subset \mathcal{P}(\mathcal{R})$.

Une sous-famille de types d'infra-$\mathcal{R}$ intermédiaires entre $\mathcal{P}(\mathcal{R})$ et $\mathcal{R}$ (supposé infra-stable) est l'ensemble des types de relations définis par le produit d'axiomes $(C_1, \ldots, C_n)$, où C_k est identique à l'un des axiomes A_k et B_k figurant dans les produits d'axiomes $(A_1, \ldots, A_n)$ et $(B_1, \ldots, B_n)$, qui définissent respectivement le type général d'infra-$\mathcal{R}$ et le type de relation $\mathcal{R}$ et qui se correspondent, pour un même indice, comme il a été indiqué au paragraphe 1.2. Tout produit $(C_1, \ldots, C_n)$ définit bien un type d'infra-$\mathcal{R}$, intermédiaire entre $\mathcal{R}$ et $\mathcal{P}(\mathcal{R})$, puisque $B_k \Rightarrow A_k$ lorsque $\mathcal{R}$ est infra-stable. Il arrive que, C_k étant associé avec une combinaison déterminée des autres axiomes, le même type de relation soit défini pour $C_k = A_k$ et pour $C_k = B_k$.

1.5. — *Infra-connexité.*

1.5.1. — *Infra-connexité forte.*

Nous disons qu'une relation est fortement connexe dans un ensemble si son graphe est fortement connexe [1]. Nous désignerons par $(a \ldots x_i \ldots b)$ un chemin allant de a vers b, éventuellement réduit à (ab), et par $(a \ldots x_i \ldots b)_t$ [respectivement $(a \ldots x_i \ldots b)_{-t}$] un chemin dont tous les éléments satisfont à $P\,\{t,\ x_i\}$ [respectivement $P\,\{x_i,\ t\}$].

La condition d'infra-connexité forte s'écrit alors .

$$(P\,\{t,\ a\},\ P\,\{t,\ b\} \Rightarrow \exists\ (a \ldots x_i \ldots b)_t),\ (P\,\{a,\ t\},\ P\,\{b,\ t\} \Rightarrow \exists\ (a \ldots x_j \ldots b)_{-t}). \tag{14}$$

La connexité forte n'est évidemment pas infra-stable. L'infra-connexité forte n'implique pas non plus la connexité forte, elle implique une propriété plus faible, que nous allons établir.

1. Un graphe est fortement connexe lorsque pour tout couple d'éléments il existe toujours un chemin allant du premier au second, ce qui implique qu'il existe toujours un circuit passant par les deux éléments.

LEMME. — *P étant une relation fortement infra-connexe, si* $(a, b) \in P$, *alors il existe sur le graphe de P un chemin qui part de b et aboutit en a.*

En effet, l'infra-connexité forte implique que :

$$P\{a, b\} \Rightarrow \exists\ (b \dots x_i \dots b)_a, \tag{15}$$

c'est-à-dire :

$$P\{a, b\} \Rightarrow \exists\ x_n, \quad P\{x_n, b\}, \quad P\{a, x_n\}; \tag{16}$$

l'infra-connexité forte implique alors que :

$$P\{x_n, b\},\ P\{a, b\} \Rightarrow \exists\ (x_n \dots x_j \dots a)_{-b}\ ; \tag{17}$$

il existe donc un chemin $(b \dots x_n b)$ et un chemin $(a x_n \dots a)$, et par conséquent :

$$P\{a, b\} \Rightarrow \exists\ (b \dots x_n \dots a). \tag{18}$$

COROLLAIRE. — *P étant une relation fortement infra-connexe, s'il existe sur le graphe de P un chemin allant de a vers b, alors il existe aussi un chemin allant de b vers a, et donc un circuit passant par a et b.*

En effet, à chaque couple d'éléments consécutifs (x_i, x_j) du chemin $(a x_1 \dots x_n b)$ correspond un chemin $(x_j \dots x_i)$. Il existe donc au moins un chemin $(b \dots x_n \dots x_{n-1} \dots \dots x_j \dots x_i \dots \dots x_1 \dots a)$, formé d'une succession de chemins comme $(x_j \dots x_i)$, qui répond à la question.

PROPOSITION. — *P étant une relation fortement infra-connexe, s'il existe une relation produit de facteurs P et de facteurs* P^{-1} *à laquelle satisfait le couple* (a, b), *alors il existe sur le graphe de P un circuit passant par a et b.*

Autrement dit, si le couple (a, b) satisfait à une condition de *connexité faible*[1], il existe sur le graphe de la relation fortement infra-connexe P un circuit passant par a et b.

En effet, pour chaque couple d'éléments adjacents x_i et x_j de la chaîne $(a \dots x_i x_j \dots b)$, ou bien $(x_i, x_j) \in$ P et il existe au moins un entier p_{ji} tel que $(x_j, x_i) \in P^{p_{ji}}$, ou bien $(x_j, x_i) \in P$ et il existe au moins en entier p_{ij} tel que $(x_i, x_j) \in P^{p_{ij}}$. Il existe donc au moins un chemin allant de a vers b et un chemin allant de b vers a.

COROLLAIRE. — *Si P est une relation à la fois faiblement connexe et fortement infra-connexe, elle est fortement connexe.*

En effet, tout couple (a, b), satisfaisant dans ce cas la condition de connexité faible, est, d'après la proposition précédente, sur un circuit, ce qui caractérise la connexité forte.

Par analogie avec le concept d'infra-stabilité, on pourrait dire que, dans le domaine des relations faiblement connexes, la propriété d'infra-connexité forte est « supra-stable ».

1.5.2. — *Infra-connexité faible.*

La connexité faible n'est pas une propriété infra-stable. L'infra-connexité faible n'implique pas la connexité faible. Aucune de ces propriétés n'inclut l'autre.

---

1. Rappelons qu'une relation P est faiblement connexe dans un ensemble X si elle détermine une correspondance (P, X) telle que : $\forall\ x_0 \in X$ et $\forall\ x_k \in X$, il existe une chaîne $x_0, \dots, x_k$ dont tout couple de 2 éléments consécutifs x_i et x_j satisfait à :

$$P\{x_i, x_j\} \quad \text{ou} \quad P\{x_j, x_i\}.$$

Nous remarquerons que toute relation infra-réflexive, donc a fortiori toute relation réflexive, présente la propriété d'infra-connexité faible. La réciproque n'est pas vraie. Par ailleurs, toute relation qui est à la fois faiblement connexe et infra-réflexive est réflexive.

1.6. — *Connexité faible et graphes disjoints.*

Si X_1, X_2, ..., X_n sont des ensembles *disjoints* sur lesquels sont respectivement définies des relations d'infra-$\mathscr{R}$ P_1, P_2, ..., P_n, la correspondance entre $\cup X_i$ et lui-même définie par $(P, \cup X_i) \Leftrightarrow \cup (P_i, X_i)$ est telle que P est une relation d'infra-$\mathscr{R}$. Autrement dit, toute juxtaposition de graphes disjoints du type $\mathscr{P}$ est du type $\mathscr{P}$; il en résulte qu'il est suffisant d'étudier les propriétés des relations d'infra-$\mathscr{R}$ faiblement connexes.

Soit $\mathscr{P}$ un type d'infra-$\mathscr{R}$. Quel que soit $\mathscr{R}$, $\mathscr{P}$ comprend des relations P qui peuvent être réparties en deux classes non vides : celles qui sont *faiblement connexes* et celles qui ne sont le pas ; ces classes sont elles-mêmes des types d'infra-$\mathscr{R}$. Nous appellerons « type faiblement connexe général d'infra-$\mathscr{R}$ » la classe des relations faiblement connexes appartenant au type général d'infra-$\mathscr{R}$, et « type faiblement connexe d'infra-$\mathscr{R}$ » tout type d'infra-$\mathscr{R}$ faiblement connexe. Lorsqu'il n'y aura pas à craindre de confusion, nous abrégerons ces expressions en « *infra-$\mathscr{R}$ connexe général* » et « *infra-$\mathscr{R}$ connexe* ».

Pour alléger l'exposé, compte tenu des remarques faites au début de ce paragraphe, *nous nous limiterons souvent aux types faiblement connexes d'infra-relations*, le passage au cas général ne présentant aucune difficulté.

1.7. — *Méta-relation associée à une relation binaire.*

1.7.1. — *Définition.*

Soit une relation binaire quelconque P définie dans un ensemble E. Nous poserons :

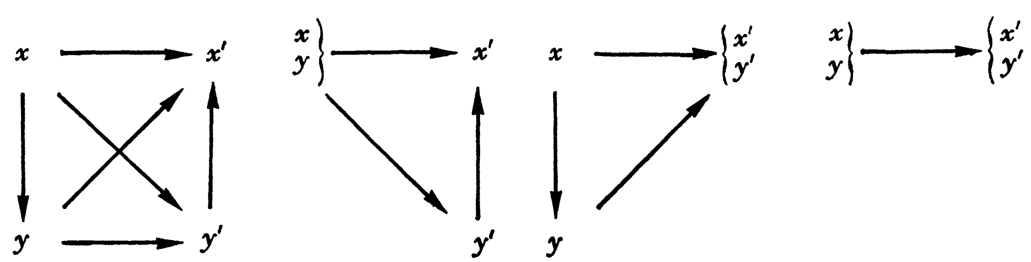
$$P_1 \{a, b\} \Leftrightarrow P \{a, b\} \quad \text{ou} \quad a = b. \tag{19}$$

Nous appellerons « méta-relation » associée à la relation P, la relation Q définie en fonction de P par l'équivalence suivante :

$$Q \{x, x'; y, y'\} \Leftrightarrow P \{x, x'\},\ P \{y, y'\},\ P \{x, y'\},\ P \{y, x'\},\ P_1 \{x, y\},\ P_1 \{y', x'\} \tag{20}$$

Cette relation sera considérée comme une relation *binaire* portant sur des éléments qui sont des couples appartenant à E^2. En désignant par $pr_1 [\,]$ et $pr_2 [\,]$ les première et seconde projections d'un graphe (ensemble de définition et ensemble des valeurs), G étant le graphe de P et H le graphe de Q, on a : $pr_1 [H] \subset G$ et $pr_2 [H] \subset G$; de sorte que H n'est pas restreint si on se limite à la considération des couples appartenant à $G \subset E^2$.

Les divers « cas de figure » de la relation $Q \{x, x'; y, y'\}$ sont décrits par les schémas ci-après, où les flèches représentent les couples (a, b) pour lesquels il est nécessaire que $P \{a, b\}$ soit vrai pour que Q le soit. (L'accolade indique deux éléments confondus).



Nous examinerons les propriétés de P qui correspondent à certaines propriétés de Q.

1.7.2. — *Réflexivité.*

La relation $P_1\{a, a\}$ est universellement vraie, d'où :

$$Q\{a, a'; a, a'\} \Leftrightarrow P\{a, a'\}. \tag{21}$$

Il résulte alors directement de la définition de Q que :

$$Q\{x, x'; y, y'\} \Rightarrow Q\{x, x'; x, x'\},\ Q\{y, y'; y, y'\}. \tag{22}$$

La relation Q est donc réflexive par rapport aux couples (x, x') et (y, y') quelle que soit P.

Dans un ensemble A, la réflexivité de Q s'écrit :

$$Q\{x, x'; x, x'\} \Leftrightarrow (x,x') \in A.$$

Il en résulte que, dans l'ensemble E^2, Q est réflexive si et seulement si P est universelle; par contre, dans l'ensemble G, partie de E^2 définie comme graphe de la relation P, Q est réflexive quelle que soit P.

Si la relation P est elle-même infra-réflexive dans E^2, c'est-à-dire si :

$$P\{x, x'\} \Rightarrow P\{x, x\},\ P\{x', x'\},$$

il en résulte que :

$$P\{x, x'\},\ x = y \Rightarrow P\{x, y\}, \tag{23}$$

$$P\{x, x'\},\ x' = y' \Rightarrow P\{y', x'\}. \tag{24}$$

et donc :

$$P\{x, x'\},\ P_1\{x, y\},\ P_1\{y', x'\} \Leftrightarrow P\{x, x'\},\ P\{x, y\},\ P\{y', x'\}. \tag{25}$$

Donc, si P est infra-réflexive (ou a fortiori réflexive) :

$$Q\{x, x'; y, y'\} \Leftrightarrow P\{x,x'\},\ P\{y, y'\},\ P\{x, y'\},\ P\{y, x'\},\ P\{x, y\},\ P\{y' x'\}. \tag{26}$$

1.7.3. — *Transitivité.*

Par définition, la relation Q est transitive (nous désignerons par T cette proposition) si, et seulement si :

$$Q\{x, x'; y, y'\},\ Q\{y, y'; z, z'\} \Rightarrow Q\{x, x'; z, z'\}, \tag{27}$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{gathered} P\{x, x'\},\ P\{y, y'\},\ P\{z, z'\},\ P\{x, y'\},\ P\{y, x'\},\ P\{y, z'\},\ P\{z, y'\}, \\ P_1\{x, y\},\ P_1\{y, z\},\ P_1\{z', y'\},\ P_1\{y', x'\} \Rightarrow P\{x, z'\},\ P\{z, x'\},\ P_1\{x, z\},\ P_1\{z', x'\}. \end{gathered} \tag{28}$$

Considérons le cas particulier où $x = y$ et $z' = y'$, tout en tenant compte de ce que $(\mathrm{P}_1\{a, b\} \Rightarrow \mathrm{K}) \Rightarrow (\mathrm{P}\{a, b\} \Rightarrow \mathrm{K})$:

$$T \Rightarrow (P\{y, x'\},\ P\{y, y'\},\ P\{z, y'\},\ P\{y, z\},\ P\{y', x'\} \Rightarrow P\{z, x'\}), \tag{29}$$

ce qui signifie que T implique l'infra-transitivité à droite. De même, en considérant le cas où $y = z$ et $y' = x'$, on voit que T implique l'infra-transitivité à gauche. Donc, si Q est transitive, P est infra-transitive.

Réciproquement, supposons que P soit infra-transitive, c'est-à-dire que (cf. paragraphe 1.3.2.):

$$A_2 : (P\{t, x\},\ P\{t, y\},\ P\{t, z\}) \quad \text{ou} \quad (P\{x, t\},\ P\{y, t\},\ P\{z, t\}),\ P\{x, y\},\ P\{y, z\} \Rightarrow P\{x, z\};$$

on a d'autre part :

$$x = y \quad \text{ou} \quad z = t,\ P\{x, t\},\ P\{y, t\},\ P\{y, z\} \Rightarrow P\{x, z\}, \tag{30}$$

$$x = t \quad \text{ou} \quad z = y,\ P\{t, y\},\ P\{t, z\},\ P\{x, y\} \Rightarrow P\{x, z\}, \tag{31}$$

$$(x = y,\ P\{y, z\}) \quad \text{ou} \quad (y = z,\ P\{x, y\}) \Rightarrow P\{x, z\}, \tag{32}$$

$$x = y, \quad y = z \Rightarrow x = z. \tag{33}$$

Il résulte de A_2 et (30) que :

$$P\{x, t\},\ P\{y, t\},\ P_1\{z, t\},\ P_1\{x, y\},\ P\{y, z\} \Rightarrow P\{x, z\}, \tag{34}$$

de A_2 et (31) que :

$$P_1\{t, x\},\ P\{t, y\},\ P\{t, z\},\ P\{x, y\},\ P_1\{y, z\} \Rightarrow P\{x, z\}, \tag{35}$$

de A_2, (32) et (33) que :

$$\begin{gathered}(P\{t, x\},\ P\{t, y\},\ P\{t, z\}) \quad \text{ou} \quad (P\{x, t\},\ P\{y, t\},\ P\{z, t\}),\\ P_1\{x, y\},\ P_1\{y, z\} \Rightarrow P_1\{x, z\}.\end{gathered} \tag{36}$$

En particulier, on a donc, si P est infra-transitive :

$$P\{x, y'\},\ P\{y, y'\},\ P_1\{z', y'\},\ P_1\{x, y\},\ P\{y, z'\} \Rightarrow P\{x, z'\}, \tag{37}$$

$$P_1\{y, z\},\ P\{y, y'\},\ P\{y, x'\},\ P\{z, y'\},\ P_1\{y', x'\} \Rightarrow P\{z, x'\}, \tag{38}$$

$$P\{x, y'\},\ P\{y, y'\},\ P\{z, y'\},\ P_1\{x, y\},\ P_1\{y, z\} \Rightarrow P_1\{x, z\}, \tag{39}$$

$$P\{y, z'\},\ P\{y, y'\},\ P\{y, x'\},\ P_1\{z', y'\},\ P_1\{y', x'\} \Rightarrow P_1\{z', x'\}. \tag{40}$$

Les relations (37) à (40) impliquent la relation T (28) : si P est infra-transitive, Q est donc transitive.

Nous avons ainsi démontré que *les propositions* « *Q est transitive* » et « *P est infra-transitive* » *sont équivalentes*.

1.7.4. *Symétrie.*

Par définition, la relation Q est symétrique (proposition S) si et seulement si :

$$Q\{x, x'; y, y'\} \Rightarrow Q\{y, y'; x, x'\}, \tag{41}$$

ce qui est équivalent à :

$$P\{x, x'\},\ P\{y, y'\},\ P\{x, y'\},\ P\{y, x'\},\ P_1\{x, y\},\ P_1\{y', x'\} \Rightarrow P_1\{y, x\},\ P_1\{x', y'\}. \tag{42}$$

Considérons le cas particulier où $y' = x'$, tout en tenant compte de ce que

$$(P_1\{a, b\} \Rightarrow \mathrm{K}) \Rightarrow (P\{a, b\} \Rightarrow \mathrm{K})$$

et de ce que

$$(P\{x, y\},\ x = y) \Rightarrow P\{y, x\} :$$

$$S \Rightarrow (P\{x, x'\},\ P\{y, x'\},\ P\{x, y\} \Rightarrow P_1\{y, x\}) \tag{43}$$
$$\Leftrightarrow (P\{x, x'\},\ P\{y, x'\},\ P\{x, y\} \Rightarrow P\{y, x\}),$$

ce qui signifie que S implique l'infra-symétrie à gauche. De même, en considérant le cas où $y = x$, on voit que S implique l'infra-symétrie à droite. Donc, si Q est symétrique, P est infra-symétrique.

Réciproquement, supposons que P soit infra-symétrique, c'est-à-dire (cf. § 1.3.3) :

$$A_3 : (P\{t, x\},\ P\{t, y\}) \quad \text{ou} \quad (P\{x, t\},\ P\{y, t\}),\ P\{x, y\} \Rightarrow P\{y, x\}$$

d'où :

$$(P\{t, x\},\ P\{t, y\}) \quad \text{ou} \quad (P\{x, t\},\ P\{y, t\}),\ P_1\{x, y\} \Rightarrow P_1\{y, x\}. \tag{44}$$

Il en résulte immédiatement la relation (42). Donc, si P est infra-symétrique, Q est symétrique.

Nous avons ainsi démontré que *les propositions* « *Q est symétrique* » et « *P est infra-symétrique* » *sont équivalentes.*

1.7.5. *Antisymétrie.*

Par définition, la relation Q est antisymétrique (proposition A) si et seulement si :

$$Q\{x, x'; y, y'\},\ Q\{y, y'; x, x'\} \Rightarrow (x, x') = (y, y'), \tag{45}$$

ce qui est équivalent à :

$$P\{x, x'\},\ P\{y, y'\},\ P\{x, y'\},\ P\{y, x'\},\ P_1\{x, y\},\ P_1\{y, x\},\ P_1\{y', x'\},\ P_1\{x', y'\} \Rightarrow x = y, x' = y' \tag{46}$$

En considérant le cas $x = y$, puis le cas $x' = y'$, on voit que A implique l'infra-antisymétrie à droite, puis l'infra-antisymétrie à gauche, donc l'infra-antisymétrie.

Réciproquement, l'infra-antisymétrie (cf. § 1.3.4) implique que :

$$(P\{t, x\},\ P\{t, y\}) \quad \text{ou} \quad (P\{x, t\},\ P\{y, t\}),\ P_1\{x, y\},\ P_1\{y, x\} \Rightarrow x = y, \tag{47}$$

d'où résulte immédiatement la relation A (46).

Nous avons ainsi démontré que *les propositions* « *Q est antisymétrique* » *et* « *P est infra-antisymétrique* » *sont équivalentes.*

1.7.6. *Comparabilité.*

Par définition, la relation Q possède la propriété de comparabilité dans G, graphe de la relation P (proposition C), si et seulement si :

$$Q\{x, x'; y, y'\} \quad \text{ou} \quad Q\{y, y'; x, x'\} \Leftrightarrow (x, x') \in G, (y, y') \in G, \tag{48}$$

ce qui est équivalent à :

$$P\{x, x'\}, P\{y, y'\}, P\{x, y'\}, P\{y, x'\}, (P_1\{x, y\}, P_1\{y', x'\}) \text{ ou } (P_1\{y, x\}, P_1\{x', y'\}) \Leftrightarrow P\{x, x'\}, P\{y, y'\}, \quad (49)$$

ou encore à :

$$P\{x, x'\}, \; P\{y, y'\} \Rightarrow P\{x, y'\}, P\{y, x'\}, (P_1\{x, y\}, P_1\{y', x'\}) \text{ ou } (P_1\{y, x\}, P_1\{x', y'\}) \quad (50)$$

En considérant le cas $x = y$, on voit que C implique que :

$$\mathrm{P}\,\{x, x'\}, \; P\,\{x, y'\} \Rightarrow P_1\,\{y', x'\} \text{ ou } P_1\,\{x', y'\}; \quad (51)$$

de même le cas $x' = y'$ conduit à :

$$C \Rightarrow (P\,\{x, x'\}, \; P\,\{y, x'\} \Rightarrow P_1\,\{x, y\} \text{ ou } P_1\,\{y, x\}. \quad (52)$$

Nous montrons ainsi que C implique pour P une propriété plus faible que l'infra-comparabilité: l'infra-comparabilité d'éléments *distincts*.

La comparabilité (ou a fortiori l'infra-comparabilité) de P dans E n'implique pas la comparabilité de Q dans G.

1.7.7. *Théorème.*

Si $\mathscr{R}$ est un type de relation défini par un certain nombre d'axiomes pris parmi les seuls axiomes de réflexivité, transitivité, symétrie et antisymétrie, la méta-relation Q associée à un type d'infra-$\mathscr{R}$ est elle-même une relation de type $\mathscr{R}$.

Ce théorème résulte directement des propositions démontrées dans les paragraphes 1.7.2, 1.7.3, 1.7.4. et 1.7.5. Il s'applique en particulier aux relations d'équivalence, de pré-ordre et d'ordre.

1.8. *Relations d'équivalence et apparentées.*

La relation infra-universelle est la relation d'équivalence. La relation d'infra-équivalence est aussi la relation d'équivalence (l'infra-équivalence impliquant l'infra-universalité).

Ces infra-relations sont donc triviales, mais il faut souligner que les types correspondants d'infra-relations *à gauche* ou *à droite*, que nous n'envisagerons pas dans le cadre de cet article, offrent des modèles moins forts et *plus variés*, donc plus intéressants quant aux applications éventuelles (en particulier comme modèles de processus).

1.9. *Infra-préordres.*

Le type général d'infra-préordre est défini par les relations d'infra-réflexivité et d'infra-transitivité. Il en résulte (cf. § 1.7.7) que la méta-relation associée à une relation d'infra-préordre est un préordre.

Certaines des propriétés intéressantes que nous établirons par les infra-ordres sont généralisables, sous un forme affaiblie, aux infra-préordres. Nous ne nous y attarderons pas.

2. — INFRA-ORDRES.

2.1. — *Axiomatique.*

Le type général d'infra-ordre est défini par les axiomes d'infra-réflexivité, infra-transitivité et infra-antisymétrie (axiomes A_1, A_2 et A_4 des §§ 1.3.1, 1.3.2 et 1.3.4). Compte tenu de A_1 (infra-réflexivité),

A_4 (infra-antisymétrie) peut être remplacé par R_4 (antisymétrie), ce qui conduit à l'axiomatique plus légère :

$$\begin{cases} A_1 : P\{t, x\} \Rightarrow P\{t, t\},\ P\{x, x\} ; \\ A_2 : (P\{t, x\},\ P\{t, y\},\ P\{t, z\}) \text{ ou } (P\{x, t\},\ P\{y, t\},\ P\{z, t\}),\ P\{x, y\},\ P\{y, z\} \Rightarrow P\{x, y\} ; \\ R_4 : P\{x, y\},\ P\{y, x\} \Rightarrow x = y. \end{cases}$$

2.2. — *Méta-relation associée, nervure, frontière.*

La méta-relation Q associée à la relation d'infra-ordre P est une relation d'ordre (cf. § 1.7.7.). Nous considérerons que (x, x') est *supérieur* à (y, y') lorsque la relation $Q\{x, x' ; y, y'\}$ est vraie.

Comme il s'agit d'une relation P infra-réflexive, il est important de noter la propriété générale suivante présentée par Q (quelle que soit P) :

$$P\{x, x\},\ P\{x, x'\} \Rightarrow Q\{x, x' ; x, x\}, \tag{53}$$

$$P\{x', x'\},\ P\{x, x'\} \Rightarrow Q\{x, x' ; x', x'\}. \tag{54}$$

La relation P étant antisymétrique, on a d'autre part :

$$Q\{x, x ; y, y'\} \Rightarrow (y, y') = (x, x). \tag{55}$$

Il en résulte que les « boucles » (x, x) sont des éléments *minimaux* pour Q. Les relations (53) et (54) jointes à l'infra-réflexivité de P montrent que seules les boucles sont éléments minimaux pour Q.

Nous nommerons « éléments quasi-minimaux » les éléments (n, n') tels que $n \neq n'$ et que :

$$Q\{n, n' ; y, y'\} \Rightarrow (y, y') = (n, n) \quad \text{ou} \quad (y, y') = (n', n'). \tag{56}$$

Nous appellerons « *nervure* » du graphe de la relation P l'ensemble des couples (n, n') qui sont des éléments quasi-minimaux pour Q. Nous dirons alors que les éléments n et n' sont « *consécutifs* ».

Nous appellerons « *frontière* » du graphe de la relation P l'ensemble des couples (f, f') qui sont des éléments maximaux pour Q. Nous dirons alors que les éléments f et f' sont « *diagonaux* » et nous appellerons « *diagonale* » le couple (f, f').

Soit un couple (f, f') appartenant à la frontière de P. Considérons tous les éléments y qui sont tels que le couple (y, y') soit un minorant de (f, f') pour la méta-relation Q, donc tels que $Q\{f, f' ; y, y'\}$, d'où $P\{f, y\}$ et $P\{y, f'\}$. Nous dirons que ces éléments y sont « couverts » par la diagonale (f, f') [1]. Tous ces éléments appartiennent donc à la fois à la coupe $P(f)$ et à la coupe $P^{-1}(f')$. Autrement dit, car réciproquement $(P\{f, y\},\ P\{y, f'\}) \Rightarrow Q\{f, f' ; y, y\}$, ce sont tous les éléments « compris » (pour la relation P) entre les éléments diagonaux f et f'. Ils constituent une *partie convexe* de l'ensemble X dans lequel est défini P; en effet, si y et y'' sont deux de ces éléments, avec $P\{y, y''\}$, et si y' est tel que $P\{y, y'\}$ et $P\{y', y''\}$, la relation $Q\{y, y'' ; y', y'\}$ qui s'en déduit implique, par transitivité, que (y', y') est un minorant de (f, f').

La relation P détermine donc un *ordre* sur les éléments couverts par une diagonale. Cet ordre est *complètement défini par la trace de la nervure* sur leur ensemble. Cet ensemble d'éléments est *maximal* pour toutes ces propriétés qui sont directement liées à l'existence du couple maximal (f, f').

1. Si deux éléments y et y' sont couverts par une même diagonale (f, f') et si $P\{y, y'\}$, cela signifie que le couple (y, y') est inférieur au couple (f, f') pour la relation Q. Par commodité, nous dirons aussi que le *couple* (y, y') est « couvert » par cette diagonale.

L'infra-ordre P est entièrement défini par sa nervure et sa frontière, qui représente la limite au-delà de laquelle la transitivité ne s'applique plus aux éléments de l'ensemble X.

La frontière couvre par définition tous les éléments (couples) du graphe G; elle peut se confondre partiellement avec la nervure (si elle se confond totalement avec la nervure, on a un infra-ordre total dégénéré en simple relation de concaténation).

2.3. — *Infra-ordre total.*

Le type d'infra-ordre total est défini par les axiomes du type général d'infra-ordre (A_1, A_2, R_4), complétés par l'axiome d'infra-comparabilité A_5 (cf. § 1.3.5) :

$$A_5 : (P\{t, x\},\ P\{t, y\}) \text{ ou } (P\{x, t\},\ P\{y, t\}) \Rightarrow P\{x, y\} \text{ ou } P\{y, x\}.$$

Compte tenu de A_5, A_2 peut être remplacé par :

$$A_2\ bis : (P\{t, x\},\ P\{t, y\},\ P\{t, z\}) \text{ ou } (P\{x, t\},\ P\{y, t\},\ P\{z, t\}) \Rightarrow$$
$$((P\{x, y\},\ P\{y, z\},\ P\{z, x\}) \text{ ou } (P\{x, z\},\ P\{z, y\},\ P\{y, x\}) \Rightarrow x = y = z).$$

Si maintenant on remplace l'axiome A_2 *bis* par l'axiome suivant :

$$R_2\ bis : P\{x, y\},\ P\{y, z\},\ P\{z, x\} \Rightarrow x = y = z,$$

qui est plus fort que l'axiome A_2 *bis* et plus faible que l'axiome R_2 (cf. 1.3.2), on définit un type *particulier* d'infra-ordre total, celui que nous avons introduit sous le nom de « relation d'infra-ordre » dans notre communication de 1967 au Séminaire d'Aix sur les Ordres totaux (Durup, 1970).

Soient (x, x') et (y, y') deux couples appartenant au graphe G de la relation P et couverts par une même diagonale (f, f'). Les éléments x, x', y et y', qui appartiennent alors à $P(f)$ et $P^{-1}(f')$, sont donc totalement ordonnés. Il en résulte que, si la borne supérieure des couples (x, x') et (y, y'), pour la relation Q, n'est pas l'un de ces couples ($Q\{x, x'; y, y'\}$ ou $Q\{y, y'; x, x'\}$), l'un des couples (x, y') et (y, x') est supérieur à l'autre ($Q\{x, y'; y, x'\}$ ou $Q\{y, x'; x, y'\}$) et constitue la borne supérieure de (x, x') et (y, y'). La *méta-relation Q* définie sur les couples de G est donc un *ordre (partiel) dont la trace sur les couples couverts par une même diagonale est un demi-treillis.*

Sous une diagonale, l'ordre total qui est la trace de l'infra-ordre total P est défini par la nervure de l'infra-ordre. La partie de nervure comprise entre deux éléments diagonaux constitue un chemin maximal sur lequel l'infra-ordre P détermine un ordre total. Cette notion de chemin maximal à ordre total, rencontrée ici pour un infra-ordre, est classique pour un ordre partiel (autre affaiblissement de l'ordre total), avec la même propriété de convexité.

L'axiome A_5 implique que la nervure ne peut présenter aucune bifurcation : si par exemple (t, x) et (t, y) appartiennent au graphe G, il existe un couple (x, y), inférieur à (t, y), ou un couple (y, x), inférieur à (t, x), qui appartient à G, de sorte que (t, x) et (t, y) ne peuvent appartenir tous deux à la nervure s'ils sont distincts. *La nervure d'un infra-ordre total est donc un chemin élémentaire, soit ouvert, soit fermé (circuit élémentaire)* [1]. *Dans le cas d'un circuit, incompatible avec toute relation d'ordre globale, l'infra-ordre total définit des ordres totaux locaux.*

La typologie de ces relations d'infra-ordre total a été esquissée dans la publication déjà citée : « mèches » (nervure ouverte) et « nattes » (nervure fermée), strictes (cf. ordre strict) ou non. La « longueur » d'un infra-ordre total est celle de sa nervure, qui est un chemin (ou un circuit) hamiltonien

1. Nous nous restreignons ici au cas faiblement connexe, le cas général s'en déduisant par réunion de graphes disjoints.

sur le graphe G. Son « épaisseur » est la longueur de la plus longue partie de nervure comprise entre deux éléments diagonaux ; si cette longueur est constante pour toutes les diagonales, la « natte » est d'épaisseur « uniforme » ; la relation de concaténation est d'épaisseur 1 ; la relation d'ordre total sur n éléments est une « mèche » d'épaisseur $n - 1$; la « natte uniforme » la plus courte d'épaisseur e a pour longueur $2e + 1$ dans le cas du type général d'infra-ordre total et $3e + 1$ dans le cas du type particulier correspondant à l'axiome R_2 *bis*.

Les propriétés des infra-ordres totaux *à gauche* (ou *à droite*) sont très voisines de celles des infra-ordres totaux. La nervure peut alors être soit circulaire, soit linéaire, comme précédemment, soit encore arborescente.

3. — INTERMÉDIAIRES

3.1. *Définition.*

Pour une relation P d'*infra-ordre*, la relation N d'*intermédiarité* orientée (« y est intermédiaire entre x et z avec l'ordre $x \geqslant y \geqslant$ ») sera définie ainsi :

$$N\{x, y, z\} \Leftrightarrow P\{x, y\},\ P\{y, z\},\ P\{x, z\}. \tag{57}$$

Il est commode de raisonner sur cette relation orientée, à partir de laquelle la relation N' d'*intermédiarité symétrique* (« y est intermédiaire entre x et z ») est définie par :

$$N'\{x, y, z\} \Leftrightarrow N'\{z, y, x\} \Leftrightarrow N\{x, y, z\} \text{ ou } N\{z, y, x\}. \tag{58}$$

3.2. — *Propriétés.*

La condition essentielle qui doit être satisfaite par une relation d'intermédiarité est celle de l'*unicité* ; trois éléments étant donnés, un au plus possède la propriété d'être intermédiaire entre les deux autres, ce qui s'exprime ici par :

$$N'\{x, y, z\},\ N'\{y, x, z\} \Rightarrow x = y. \tag{59}$$

Effectivement, pour toute relation P antisymétrique :

$$\begin{aligned}
&(P\{x, y\},\ P\{y, z\},\ P\{x, z\}) \text{ ou } (P\{y, x\},\ P\{z, y\},\ P\{z, x\}),\\
&(P\{y, x\},\ P\{y, z\},\ P\{x, z\}) \text{ ou } (P\{x, y\},\ P\{z, y\},\ P\{z, x\})\\
\Rightarrow\ &(P\{x, y\},\ P\{y, x\}) \text{ ou } (P\{x, z\},\ P\{z, x\},\ P\{y, z\},\ P\{z, y\})\\
\Rightarrow\ &x = y \text{ ou } (x = z,\ z = y) \Rightarrow x = y.
\end{aligned} \tag{60}$$

La condition de *totalité*, qui exigerait qu'un intermédiaire existe toujours parmi trois éléments quelconques, n'est évidemment pas remplie, sauf dans le cas très particulier où l'infra-ordre se réduit à un ordre total.

La condition de *transitivité* des types T_1 et T_2 :

$$(T_1)\quad N\{x, y, z\},\ N\{x, z, t\} \Rightarrow N\{y, z, t\},$$

$$(T_2)\quad N\{x, y, z\},\ N\{x, z, t\} \Rightarrow N\{x, y, t\},$$

sont satisfaites, car elles sont équivalentes à :

$$P\{x, y\},\ P\{y, z\},\ P\{x, z\},\ P\{z, t\},\ P\{x, t\} \Rightarrow P\{y, t\}, \tag{61}$$

qui est vérifiée par toute relation infra-transitive. La condition de *transivité* du type T_4 :

$$(T_4) \quad N\{x, y, t\},\ N\{x, z, t\},\ N\{y, u, z\} \Rightarrow N\{x, u, t\},$$

est aussi satisfaite, car l'infra-transitivité de P implique les deux relations suivantes, lesquelles impliquent T_4 :

$$P\{x, y\},\ P\{x, z\},\ P\{y, u\},\ P\{u, z\},\ P\{y, z\} \Rightarrow P\{x, u\}, \tag{62}$$

$$P\{y, t\},\ P\{z, t\},\ P\{y, u\},\ P\{u, z\},\ P\{y, z\} \Rightarrow P\{u, t\}. \tag{63}$$

La condition de *transitivité* du type T_3 n'est pas vérifiée, sauf pour le cas particulier d'un infra-ordre réduit à un ordre total. En général :

$$(\text{non } T_3) \qquad N\{x, y, z\},\ N\{y, z, t\} \not\Rightarrow N\{x, y, t\}.$$

La condition suivante :

$$(P_1) \qquad N\{x, y, t\},\ N\{x, z, t\} \Rightarrow N\{x, y, z\} \quad \text{ou} \quad N\{z, y, t\}$$

est équivalente à :

$$P\{x, y\},\ P\{x, z\},\ P\{y, t\},\ P\{z, t\},\ P\{x, t\} \Rightarrow P\{y, z\} \quad \text{ou} \quad P\{z, y\}, \tag{64}$$

qui est impliquée par la relation d'infra-comparabilité. La condition P_1 est donc satisfaite pour un *infra-ordre total.*

La condition P_2 suivante n'est pas vérifiée, même pour un infra-ordre total, sauf s'il se réduit à un ordre total. En général :

$$(\text{non } P_2) \qquad \forall\, t,\ N\{x, y, z\} \not\Rightarrow N\{t, y, z\} \quad \text{ou} \quad N\{x, y, t\}.$$

3.3. — *Axiomatique ternaire des infra-ordres.*

Certains axiomes caractéristiques des infra-ordres peuvent s'exprimer de façon condensée au moyen de la relation ternaire N. Ainsi l'axiome d'infra-transitivité, sous la forme d'un axiome de type T_2:

$$A_2\ ter : \quad (N\{t, x, y\},\ N\{t, y, z\}) \text{ ou } (N\{x, y, t\},\ N\{y, z, t\}) \Rightarrow N\{x, y, z\}.$$

Un type d'infra-ordre plus faible que l'infra-ordre total est caractérisé par l'axiome P_1 donné au § 3.2 à la place de l'axiome A_5 d'infra-comparabilité.

3.4. — *Conclusion.*

En définissant une relation d'intermédiarité sur une structure infra-ordonnée, nous nous appuyons sur une structure plus faible que celles qui autorisent habituellement la prise en considération d'intermédiaires. Mais par contre nous introduisons la comparaison des extrêmes comme condition faisant intrinsèquement partie de la définition d'un intermédiaire, ce qui revient à ne définir cet intermédiaire que lorsque les trois éléments appartiennent à un sous-ensemble dans lequel la trace de la relation d'infra-ordre est un ordre. La relation d'intermédiarité est ainsi définie à une échelle où la transitivité interne (axiomes T_1, T_2, T_4) est réalisée (cependant que la transitivité externe — axiome T_3 — ne l'est pas). L'intermédiaire est alors plus ou moins localement défini : très localement là où la structure est pauvre, beaucoup moins localement là où la structure est riche. L'intérêt réside dans la possibilité de dégager des intermédiaires entre certains éléments dans un ensemble globalement structuré de façon par exemple circulaire.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.

H. Durup, 1970, Structure algébrique des plans d'expériences à transitions restreintes ; infra-ordres ; mots circulaires exhaustifs. *Ordres*, Travaux du Séminaire sur les ordres totaux finis, Aix-en-Provence, juillet 1967 ; Mouton, Gauthier-Villars (à paraître 1970).