MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

JACQUELINE FELDMAN HÖGAASEN

Ordres partiels et permutoèdre

Mathématiques et sciences humaines, tome 28 (1969), p. 27-38
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1969__28__27_0>

M.S.H. (7e année, nº 28, 1969, p. 27-38)

ORDRES PARTIELS ET PERMUTOÈDRE

par

Jacqueline FELDMAN HÖGAASEN

INTRODUCTION : ORDRES PARTIELS ET ORDRES TOTAUX

Il est bien connu [1], [2], que tout ordre partiel sur un ensemble E peut être complété de manière à former un ordre total. Cette propriété s'appuie sur le lemme suivant :

Lemme.

Soit un ordre partiel P sur un ensemble E fini. Si a et b, appartenant à E, ne sont pas comparables dans P, la relation $R = P \cup (ab)$ est acyclique. (Autrement dit, on peut ajouter un arc joignant deux éléments non comparables de P sans créer de cycles.)

Démonstration.

Si l'introduction de ab créait un cycle, on aurait

$$ab, bc_1, c_1\, c_2, \ldots, c_n\, a \in P \cup ab$$

d'où :

$$bc_1, c_1\, c_2 \ldots, c_n\, a \in P.$$

Or P est transitif, donc ba $\in$ P, contrairement à l'hypothèse.

D'où un *procédé de construction* des ordres totaux contenant P : pour tout couple non comparable a, b, ajouter soit ab, soit ba, fermer transitivement et recommencer.

Théorème [2].

Toute intersection d'ordres totaux est un ordre partiel et tout ordre partiel est l'intersection des ordres totaux le contenant.

Démonstration.

La première partie du théorème provient de la transitivité de la relation d'ordre; d'autre part, d'après le procédé de construction, pour tout couple a, b non comparable dans un ordre partiel P, il existe (au moins) deux ordres totaux prolongeant P, dont l'un contient ab et l'autre ba.

Les paragraphes qui suivent, étudient les propriétés de cette correspondance entre un ordre partiel, et plus généralement, une relation et l'ensemble des ordres totaux contenant cette relation.

On commencera d'abord par une étude de la structure de l'ensemble des ordres totaux qui nous permettra d'introduire la notion d'intermédiaire dans le permutoèdre.

I. — INTERMÉDIARITÉ ET PERMUTOÈDRE.

L'intermédiaire entre deux ordres totaux se définit à partir de la relation de *contiguïté :* il est commode de définir celle-ci à partir des transpositions d'éléments voisins, P_i, $i = 1, 2, \dots |E| - 1$, que nous nommerons inversions.

Ce sont des générateurs pour le groupe des permutations, avec leurs relations :

$$\begin{cases} p_i^2 = 1 & & [A] \\ p_i\, p_k = p_k\, p_i & | i - k | \geqslant 2 & [B] \\ p_i\, p_{i+1}\, p_i = p_{i+1}\, p_i\, p_{i+1} & & [C] \end{cases}$$

Définition.

Soient t_1 et t_2, deux ordres totaux sur E.

t_1 est *contigu* à t_2 s'il existe $p \in \{ p_i \}$, tel que $t_2 = pt_1$. Nous disons que la distance entre t_1 et t_2 est égale à 1 : $d(t_1, t_2) = 1$.

Le *permutoèdre* [3] est l'ensemble des ordres totaux sur E, muni de la relation de contiguïté. Pour deux permutations[1] quelconques t_1 et t_2, il existe toujours un ensemble ordonné d'inversions tel que : $t_1 = p_{(n)} \cdots p_{(2)}\, p_{(1)}\, t_2 = \Pi\, t_2$.

Définitions.

On appelle, sur le permutoèdre :

— *chemin* entre deux points t et t' : un ensemble ordonné de permutations t_i $i = 1, m$ tel que :

1. $t_1 = t$;
2. $t_m = t'$;
3. $d(t_i, t_{i-1}) = 1 \qquad 1 < i \leqslant m$;

— *distance* entre deux points t_1 et t_2 : l'infimum des cardinaux de tous les chemins entre t_1 et t_2;
— *chemin minimal* entre t_1 et t_2 : un chemin dont le cardinal est égal à la distance entre t_1 et t_2.

Proposition.

La distance entre deux permutations est égale au nombre de leurs couples non communs :

$$d(t_1, t_2) = \frac{| t_1 \cup t_2 | - | t_1 \cap t_2 |}{2}.$$

Démonstration.

Supposons $t_1 = abc \dots$ (ordre alphabétique),
$t_2 = x_1\, x_2 \dots$

prenons dans t_2, à partir de la gauche par exemple, le premier couple qui viole l'ordre alphabétique. En le renversant, on obtient t_3, et un nombre de désaccords avec t_1 diminué de 1. On recommence avec $t_3 \dots$, etc.

On obtient ainsi un *procédé de construction d'un chemin minimal* qu'on utilisera par la suite.

---

1. On emploiera indifféremment les mots « ordre total » et « permutation ». Dans ce dernier cas, on sous-entend un ordre total donné pris comme référence.

Proposition.

1. On peut obtenir un chemin minimal à partir d'un chemin non minimal en utilisant les relations [B] ou [C], puis [A].

2. On passe d'un chemin minimal à un autre en utilisant les relations [B] ou [C].

En effet, si $t_1 = \Pi\, t_2 = \Pi'\, t_2$, où Π et Π' représentent des chemins distincts, on a $\Pi = \Pi'$, qui est une relation entre les générateurs p_i . Or toutes les relations entre générateurs peuvent être engendrées par [A], [B], [C].

Corollaire.

1. La parité du cardinal de tout chemin entre deux permutations ne dépend que de ces deux permutations.

2. L'ensemble (non ordonné) des générateurs intervenant dans des chemins minimaux distincts est le même.

Définitions.

Intermédiaire entre deux permutations : toute permutation située sur un chemin minimal joignant ces deux permutations.

Intervalle entre deux permutations : l'ensemble des intermédiaires.

Si t_1 et t_2 sont deux permutations, on notera leur intervalle $[t_1 — t_2]$.

Si $t \in [t_1 — t_2]$, on a : $d(t_1, t_2) = d(t_1, t) + d(t_1, t_2)$.

II. — INTERVALLES ET ORDRES.

Notations.

Soit un ensemble $E : |E| = n$.

On considère les relations sur $E : R \subset E \times E \qquad R \in \mathcal{P}(E \times E)$.

On note : $\mathcal{C}$ l'ensemble des ordres totaux $\mathcal{C} = \{ t \mid t \text{ ordre total sur } E \}$,

$\mathcal{P}$ l'ensemble des ordres (totaux ou partiels) : $\mathcal{P} = \{ P \mid P \text{ antisymétrique, transitive} \}$,

$\mathcal{S}$ l'ensemble des relations possédant un cycle au moins (si $ab \in R$, et $ba \in R$, ceci est compté comme un cycle),

$\bar{\mathcal{S}}$ le complémentaire de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{P}(E \times E)$.

On a : $\varnothing \in \mathcal{P} \qquad \mathcal{C} \subset \mathcal{P} \subset \overline{\mathcal{S}} \qquad E \times E \in \mathcal{S}$.

On notera en général, un ordre total t, et un ensemble d'ordres totaux $T : T \in \mathcal{P}(\mathcal{C})$. Enfin, t^* sera l'ordre total inverse de t :

$$ab \in t \Leftrightarrow ba \in t^*.$$

On définit l'*application* φ *de* $\mathcal{P}(E \times E)$ *dans* $\mathcal{P}(\mathcal{C})$:

$$R \longrightarrow \varphi(R) : t \in \varphi(R) \Leftrightarrow t \supset R \Leftrightarrow R \cap t^* = \varnothing$$

On définit l'*application* ψ *de* $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ *dans* $\mathcal{P}(E \times E)$:

$$T = \bigcup_i \{ t_i \} \longrightarrow \psi(T) = \bigcap_i \{ t_i \}$$

Autrement dit, à une relation, on fait correspondre par φ l'ensemble des ordres totaux la contenant, et à un ensemble d'ordres totaux, on fait correspondre par ψ leur intersection.

Propositions.

Les propriétés suivantes sont vérifiées par les applications φ et ψ :

1. $\varphi(E \times E) = \varnothing$, et plus généralement, $R \in \varphi \longrightarrow \varphi(R) = \varnothing$.
2. $\psi(\mathcal{C}) = \varnothing$.
3. $\varphi(\varnothing) = \mathcal{C}$.

On y ajoutera, par une convention qui sera commode pour la suite, la ***définition*** de $\psi(\varnothing)$.

4. $\psi(\varnothing) = E \times E$.

On vérifiera de même aisément que :

5. $\varphi(R_1 \cup R_2) = \varphi(R_1) \cap \varphi(R_2)$.
6. $\psi(T_1 \cup T_2) = \psi(T_1) \cap \psi(T_2)$.

En revanche, il est plus délicat de considérer $\varphi(R_1 \cap R_2)$, pour tenter de l'écrire à partir de $\varphi(R_1)$ et $\varphi(R_2)$. Car on peut avoir R_1 et $R_2 \in \mathcal{S}$ d'où : $\varphi(R_1) = \varphi(R_2) = \varnothing$, tandis que $R_1 \cap R_2$ est un ordre.

Il est pourtant possible de considérer l'intersection d'ordres, grâce à la proposition suivante :

Proposition.

Tout ordre total qui contient $P = t_1 \cap t_2$, où t_1 et t_2 sont des ordres totaux, est intermédiaire entre t_1 et t_2. Autrement dit :

$$\varphi(t_1 \cap t_2) = [t_1 - t_2].$$

Démonstration.

Soit $t \in [t_1 - t_2]$: t est sur un chemin minimal entre t_1 et t_2. Pour aller de t_1 à t_2 sur un chemin minimal, on ne touchera pas aux couples communs à t_1 et t_2 donc $t \supset (t_1 \cap t_2)$.

Réciproquement, soit $t \supset (t_1 \cap t_2)$. On peut aller de t_1 à t sur un chemin minimal, sans toucher aux couples communs à t_1 et t_2, puisqu'ils le sont aussi à t_1 et t, mais en se rapprochant toujours de t_2. Aller de t_1 à t puis de t à t_2 constitue donc un chemin minimal.

Il est souvent commode d'utiliser la décomposition suivante :

$$t_1 = A^+ \cup B^+ \cup C^+ \qquad t_2 = A^+ \cup B^- \cup C^- \qquad t = A^+ \cup B^+ \cup C^-$$

avec :

$$A^+ = t_1 \cap t_2 \qquad A^+ B^+ = t_1 \cap t \qquad A^+ C^- = t_2 \cap t$$

qui concrétise bien le fait que t est intermédiaire entre t_1 et t_2.

Corollaire.

Soit t^* l'ordre opposé à t :

$$t \in [t_1 - t_2] \Leftrightarrow t^* \cap t_1 \cap t_2 = \varnothing.$$

La généralisation à l'intersection d'un nombre quelconque d'ordres totaux (donc aussi à l'intersection d'ordres partiels) sera obtenue à partir de la troisième partie du théorème qui suit. Auparavant, il nous faut introduire la notion de convexité [4].

Définition.

Soit T une partie de $\mathcal{C}$. T est *convexe* s'il possède la propriété suivante :

$$t_1 \in T \text{ et } t_2 \in T \Rightarrow [t_1 - t_2] \in T.$$

En particulier, si $|T| = 0$ ou 1, T est convexe.

Théorème.

1. Les applications φ et ψ forment une correspondance de Galois (définie ci-dessous).

2. L'opération de fermeture induite dans $\mathcal{P}(E \times E)$ est celle qui fait correspondre, à toute relation acyclique, sa fermeture transitive, et à toute relation cyclique $E \times E$.

On a donc : $\psi\,\varphi\,(\mathcal{P}(E \times E) = \mathcal{P} \cup (E \times E)$.

3. L'opération de fermeture induite dans $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ est la fermeture convexe.

Autrement dit, pour tout $T \subset \mathcal{C}$: $\varphi\,\psi\,(T) = \overline{T}$, où la barre signifie l'opération de fermeture convexe.

Démonstration.

1. On vérifie les propriétés qui définissent une correspondance de Galois [5].

1*a*. $R_1 \subset R_2 \Rightarrow \varphi(R_1) \supset \varphi(R_2)$, puisque $t \supset R_2 \Rightarrow t \supset R_1$;

1*b*. $T_1 \subset T_2 \Rightarrow \psi(T_1) \supset \psi(T_2)$,

car si :

$$T_1 = \bigcup_i \{t_i\},\ T_2 = \bigcup_i \{t_i\} \bigcup_j \{t_j\},$$

alors :

$$\bigcap_i \{t_i\} \bigcap_j \{t_j\} \subset \bigcap_i \{t_i\}.$$

2*a*. $\psi\,\varphi\,(R) \supset R$ car si $R \in \mathcal{S}$, $\varphi(R) = \varnothing$ et $\psi(\varphi(R)) = \psi(\varnothing) = E \times E \supset R$ et si $R \in \overline{\mathcal{S}}$, $\varphi(R) = \bigcup_i \{t_i\}$, où $t_i \supset R$, pour tout i, donc $R \subset \bigcap_i \{t_i\} = \psi\,\varphi\,(R)$.

2*b*. $\varphi\,\psi\,(T) \supset T$ car soit : $T = \bigcup_i \{t_i\}$, pour tout i : $t_i \supset \bigcap_j \{t_j\} = \psi(T)$ donc $t_i \in \varphi\psi(T)$.

Les applications φ et ψ induisent donc, comme toute correspondance de Galois, des opérations de « fermeture » que caractérise le reste du théorème.

2. Si $R \in \mathcal{S}$, $\varphi(R) = \varnothing$ et $\psi(\varphi(R)) = E \times E$.

Si $R \notin \mathcal{S}$, soit P la fermeture transitive de R. Il est facile de voir que $t \supset R \Rightarrow t \supset P$ et réciproquement. Il en résulte : $\psi(\varphi(R)) = P$.

3. Pour la dernière partie du théorème, il nous faut d'abord montrer la propriété suivante.

Proposition.

Pour tout $R \subset E \times E$, $\varphi(R)$ est convexe.

En effet :

— ou bien $\varphi(R)$ se réduit à l'ensemble vide ou à un élément et est convexe par convention;

— ou bien $\varphi(R)$ contient au moins deux éléments distincts :

$$\left.\begin{array}{l} t_1 \in \varphi(R) \Leftrightarrow t_1 \supset R \\ t_2 \in \varphi(R) \Leftrightarrow t_2 \supset R. \end{array}\right\} \Rightarrow t_1 \cap t_2 \supset R \Rightarrow \varphi(t_1 \cap t_2) \subset \varphi(R) \Leftrightarrow [t_1 - t_2] \subset \varphi(R)$$

Il en résulte immédiatement que : $\overline{T} \subset \varphi\, \psi\, (T)$.

Il reste à démontrer l'inverse. Soit : $T = \bigcup_i \{ t_i \}$ dans $\mathcal{C}$ et $P = \bigcap_i \{ t_i \} = \psi\,(T)$ dans $\mathcal{P}(E \times E)$.

Supposons qu'il existe $t \in \varphi\,(P)$ et n'appartenant pas à $\overline{T}$. Soit t_1 quelconque appartenant à $\overline{T}$. Puisque $\varphi\,(P)$ est convexe, il contient l'intervalle $[t - t_1]$. Sur un chemin minimal entre t et t_1 on trouve donc deux points $\tilde{t}$ et $\tilde{t}_1$ tels que $\tilde{t} \notin \overline{T}$, $\tilde{t}_1 \in \overline{T}$ et $d\,(\tilde{t}_1, \tilde{t}) = 1$, avec bien entendu $\tilde{t} \in \varphi\,(P)$ et $\tilde{t}_1 \in \varphi\,(P)$.

Soit c le seul couple dont diffèrent $\tilde{t}$ et $\tilde{t}_1$; on a : $c \in \tilde{t}_1$, $c^* \in \tilde{t}$ (où c^* est le couple inverse) et $\tilde{t}_1 \cap \tilde{t}^* = c$
$\tilde{t} \notin \overline{T} \Leftrightarrow \forall\, t_i, t_j \in \overline{T}, t_i \cap t_j \cap \tilde{t}^* \neq \varnothing$.

En particulier :

$\forall\, t_i \in \overline{T}, t_i \cap \tilde{t}_1 \cap \tilde{t}^* \neq \varnothing \Leftrightarrow \forall\, t_i \in \overline{T}, t_i \cap c \neq \varnothing \Leftrightarrow \forall\, t_i \in \overline{T}, c \in t_i \Rightarrow c \in \bigcap_i \{ t_i \} = P$.

Or, si $c \in P$ et que $P \subset \tilde{t}$, c'est que $c \in \tilde{t}$, ce qui est contraire à l'hypothèse, et il en résulte bien que $\varphi\,(P) \subset \overline{T}$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire.

La correspondance de Galois (φ, ψ) *définit une bijection entre les parties transitives antisymétriques (ordres) de* $E \times E$ *et les parties convexes non vides de* $\mathcal{C}$.

On voit qu'il y a *dualité* entre la propriété de *transitivité* définie dans φ et l'*intermédiarité* définie dans $\mathcal{C}$.

Le théorème permet d'autre part de parler d'*intervalle généralisé* dans $\mathcal{C}$ défini à partir d'un nombre quelconque de permutations, notion qui sera équivalente à celle de fermeture convexe.

Remarque.

La définition de l'intermédiarité utilisée ici est compatible avec celle qu'on définirait dans le treillis distributif $\mathcal{P}(E \times E)$, où l'on aurait : $t_1 \cap t_2 \subset t \subset t_1 \cup t_2$.

Pour des ordres totaux, on a l'équivalence des trois propriétés :

$$t \in [t_1 - t_2] \Leftrightarrow t \geqslant t_1 \cap t_2 \Leftrightarrow t \leqslant t_1 \cup t_2.$$

Après avoir fermé des ensembles (transitivement ou convexement), on peut essayer l'opération inverse, c'est-à-dire la recherche du plus petit ensemble contenu dans R ou T et dont la fermeture donne $\overline{R}$ et $\overline{T}$.

Pour $R \in \overline{\mathcal{S}}$, on obtient les *bases du graphe*.

Pour $R \in \mathcal{S}$, on peut choisir n'importe quel cycle de *longueur minimale*.

Pour $T \in \mathcal{P}(\mathcal{C})$, on obtient les *bases d'ordres totaux*, dont le cardinal est la *dimension* de l'ordre $\psi\,(T)$ (au sens de Dushnik et Miller [2]). Un ordre appartenant à une base sera appelé *pôle*.

III. — APPLICATIONS.

1. *Construction d'un intervalle* défini à partir d'un ensemble de permutations $t_1, \ldots, t_m$.

Il suffit de construire tous les intervalles entre les permutations, et de continuer jusqu'à ce qu'on ait obtenu la fermeture convexe.

Pour construire l'intervalle entre deux permutations, on obtiendra d'abord un chemin minimal — par exemple à l'aide du procédé décrit au paragraphe II — puis on appliquera toutes les fois que c'est possible, les relations de commutation [B] et [C] (graphiquement, cela consiste à compléter les quadrilatères et les hexagones dont au moins la moitié des sommets figurent dans le graphe).

Le procédé graphique s'avèrera pratique lorsque les distances entre permutations ne sont pas trop grandes, ou bien lorsque les graphes obtenus sont planaires. On en verra des exemples dans les paragraphes suivants.

2. *Les intervalles de* $\mathscr{C}_4$ (permutoèdre défini sur quatre lettres) (voir fig. 1).

Les différentes bases de pôles sont indiquées, sauf pour $\mathscr{C}_4$ où tout point est un pôle. On remarquera que la représentation de $\mathscr{C}_4$ obtenue est « presque » planaire, tout en respectant les distances du permutoèdre planté.

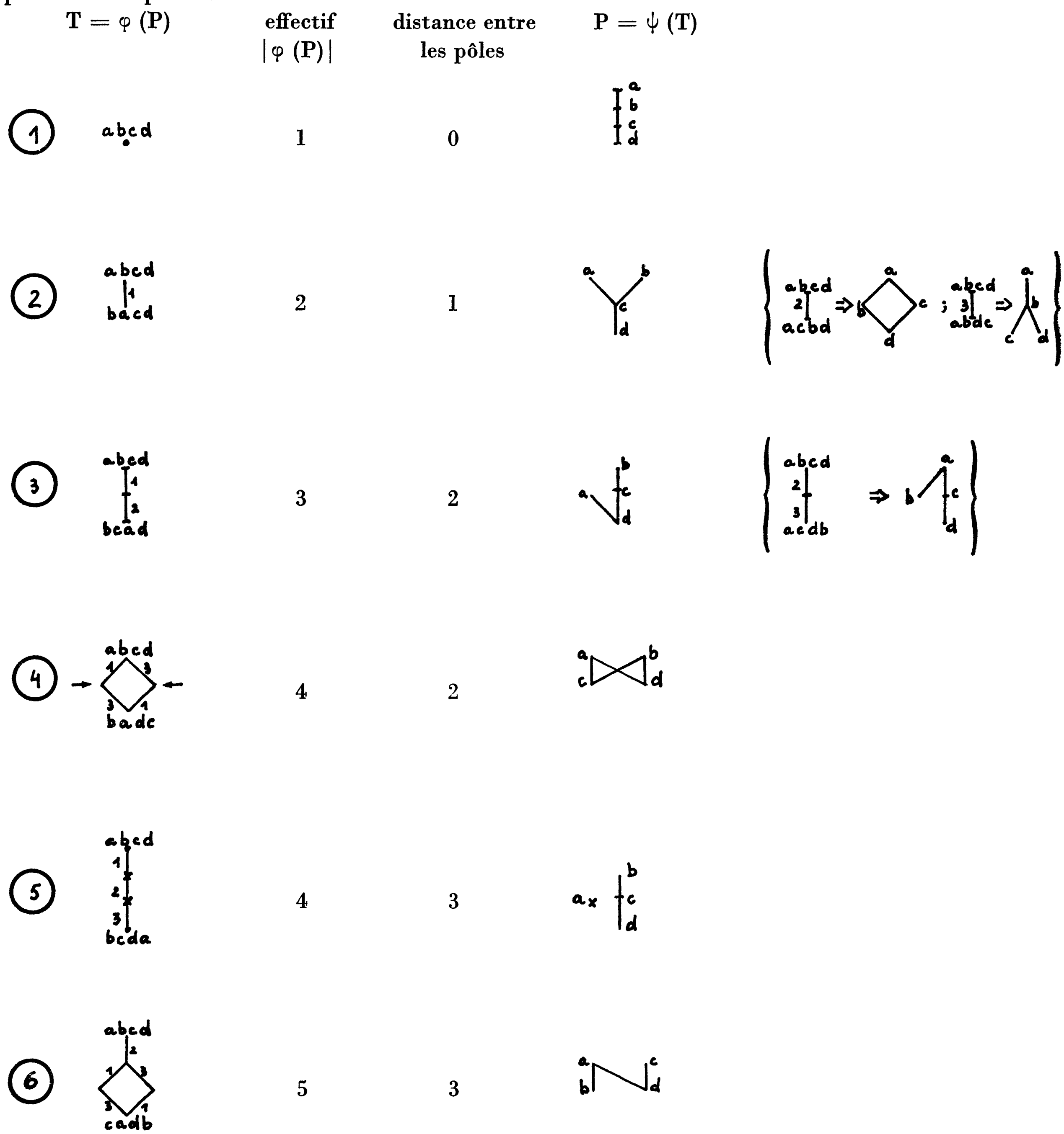


Fig. 1

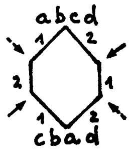
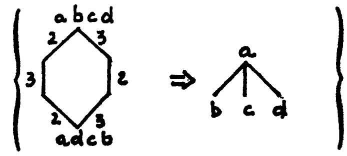
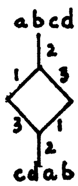
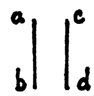
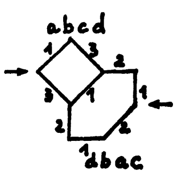
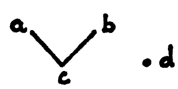
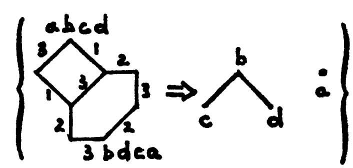
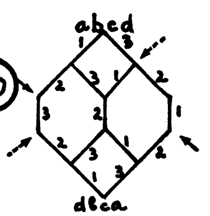
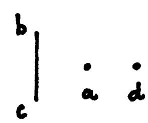
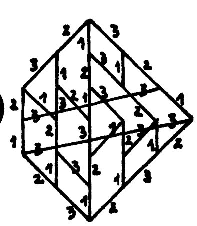
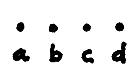
	T = φ (P)	effectif |φ (P)|	distance entre les pôles	P = ψ (T)	
7		6	3		
8		6	4		
9		8	4		
10		12	5		
11		42	6		

Fig. 1 (suite)

Tous les intervalles peuvent se construire à partir de deux pôles, donc la dimension des ordres sur quatre éléments ne dépasse jamais 2.

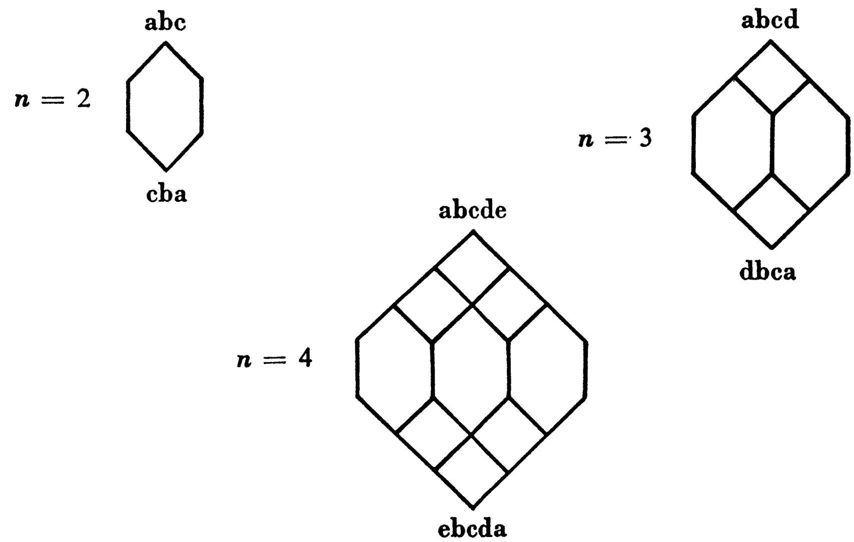
On obtient onze configurations distinctes, tandis qu'il y en a seize dans la représentation habituelle.

3. *Quelques intervalles remarquables.*

— Intervalle entre deux pôles t_1 et t_2 qui se déduisent l'un de l'autre par *permutation circulaire :* c'est une chaîne constituée de transpositions voisines contiguës. Exemples dans $\mathcal{C}_4$: [1], [2], [3], [5].

On voit facilement que ce sont les seuls « arbres » possibles (en tant qu'intervalles) dans n'importe quel permutoèdre. Si la permutation circulaire affecte n éléments, on a : $|\varphi(P)| = d(t_1, t_2) = n - 1$.

— Intervalles entre deux pôles se correspondant par une *transposition.* Soit $(n - 1)$ le nombre d'éléments situés entre les deux éléments qu'on permute. On a :



Dans le cas général, on obtient : $|\varphi(P)| = 2[1 + 2 + \ldots + n] = n(n + 1)$.

4. Lorsqu'on étudie des ordres partiels, il est souvent commode de les décomposer suivant leurs *composantes connexes.* Si chaque composante est un *ordre total*, on obtient les *fuseaux d'insertion* de Frey [6]. Dans le cas de deux composantes, ces fuseaux sont des sous-treillis distributifs du permutoèdre planté [3] (ils ne possèdent aucun hexagone), mais ce n'est pas vrai en général. Pour deux composantes de longueurs k et l, on a :

$$|\varphi(P)| = \frac{(k + l)!}{k!\,l!}$$

Soit (X, I) le graphe d'incomparabilité associé à un ordre partiel dont le graphe est (X, P). Soit $(X, \hat{I})$ le graphe tel que, si deux éléments a et b sont incomparables, les arcs ab et ba appartiennent à $\hat{I}$. Soient : X_i, $i = 1 \ldots m$, les *m composantes fortement connexes* de $(H, P + \hat{I})$[1].

Lemme.

Si deux éléments a et b appartiennent à deux composantes fortement connexes de $(X, P + \hat{I})$ distinctes : $a \in X_a$, $b \in X_b$, $X_a \neq X_b$, si $a > b$ dans P, alors pour tout $a' \in X_a$ et $b' \in X_b$, on a également $a' < b'$ dans P.

En effet, supposons qu'il existe $a' \in X_a$ et $b' \in X_b$ tel que $a' < b'$. Alors, dans $(X, P + \hat{I})$ on aurait le circuit abb'a'a; on pourrait donc aller de a à b ou de b à a : a et b appartiendraient alors à la même composante, ce qui serait contraire à l'hypothèse.

Supposons que les composantes soient indicées de sorte que : $X_1 > X_2 \ldots > X_m$, et soit P_i la restriction de P à X_i.

1. Pour simplifier, on parlera parfois des composantes fortement connexes de P.

Tous les ordres totaux contenant P respecteront les inégalités partant d'une composante à l'autre. Donc les inversions intervenant pour construire l'intervalle agiront soit dans X_1, soit dans X_2 ... soit dans X_m. En particulier, les inversions utilisées pour construire $\varphi(P_i)$ commuteront avec celles qui construisent $\varphi(P_j)$, pour $j \neq i$. L'intervalle $\varphi(P)$ sera donc obtenu comme le produit direct des intervalles $\varphi(P_i)$. On aura :

$$|\varphi(P)| = \prod_{i=1}^{m} |\varphi(P_i)|$$

et d'autre part, on sait que [7] :

$$\text{dimension } P = \max_i (\text{dimension } P_i, 2)$$

En particulier, si chaque composante ne comprend que des éléments incomparables entre eux dans P, $(X, P + \hat{I})$ est un *pré-ordre complet.* Les produits directs de ses composantes correspondent aux « faces » du permutoèdre [8].

Exemples dans $\mathcal{C}_4$:

— [8] est un fuseau d'insertion.

— Dans le cas de [2], [3], [7], une composante fortement connexe est réduite à un élément, et ne se représente donc pas : les intervalles appartiennent à des permutoèdres de dimension inférieure (ici $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$).

— [4] a deux composantes fortement connexes de deux éléments chacun, et l'intervalle est le produit direct de deux chaînes de longueur 1, c'est-à-dire un quadrilatère.

5. *Médiane d'ordres totaux* (relation de Condorcet). Si on considère $n = 2p + 1$ ordres totaux, la relation de Condorcet définie à partir de ces ordres est [9] :

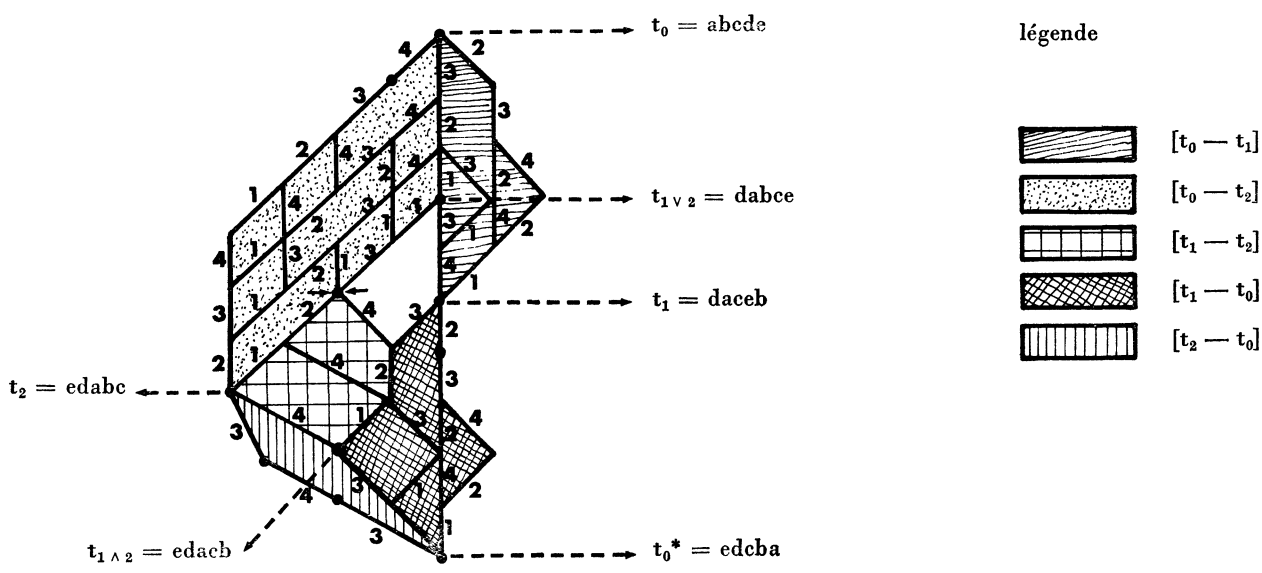
$$C = \bigcup_{|P| = p+1} \left(\bigcap_{i \in P} t_i\right), \qquad P \subset \{i, 2, \dots n\}.$$

En appliquant φ, il vient :

$$\varphi(C) = \bigcap_{|P| = p+1} [t_i;\, i \in P]$$

où $[t_i;\, i \in P]$ est l'intervalle généralisé construit sur les t_i. Ou bien l'intersection de ces intervalles sera vide, et on sera en présence d'un « effet Condorcet », ou bien elle n'est pas nulle, et se réduit à un point.

Prenons pour exemple le cas discuté par Guilbaud et Rosenstiehl [3].



$C\,(t_0, t_1, t_2) = [t_0 — t_1] \cap [t_0 — t_2] \cap [t_1 — t_2] = \varnothing$, il y a effet Condorcet.

$C(t_0{}^*, t_1, t_2) = [t_0{}^* — t_1] \cap \mid t_0{}^* — t_2] \cap [t_1 — t_2] = t_1 \wedge {}_2$, il n'y a pas effet Condorcet.

Pour choisir un ordre total dans le premier cas, on pourra :

1. Favoriser t_0, mais le moins possible : prendre, dans l'intersection de $[t_0 — t_1]$ avec $[t_0 — t_2]$, le point le plus loin de t_0 : on obtient $t_1 \vee {}_2$;

2. Favoriser t_1, mais le moins possible : en fait l'intersection entre $[t_1 — t_0]$ et $[t_1 — t_2]$ se réduit à t_1.

3. Favoriser t_2, mais le moins possible : l'intersection entre $[t_2 — t_0]$ et $[t_2 — t_1]$ comprend trois points, prendre celui qui est marqué de flèches.

On remarque qu'on a ainsi obtenu trois sommets (à distance 2 l'un de l'autre), de l'hexagone responsable de l'effet Condorcet.

D'une manière générale, on pourrait considérer que tous les points de cet hexagone donnent une solution au problème.

Annexe.

Quelques exemples d'utilisations de ces notions en sciences humaines.

1. On demande à un groupe d'individus de classer, par ordre de préférence, des objets. L'opinion collective, définie comme l'ensemble des jugements communs, est un *ordre partiel.* Si un individu sort du groupe, l'opinion collective du nouveau groupe peut différer de la première, ou ne pas être modifiée. Dans le premier cas, on dira que l'opinion de l'individu sortant est un *pôle*, sinon qu'elle est un *intermédiaire.*

Il sera intéressant, parmi les membres du groupe, de connaître ceux qui sont indispensables à la définition de l'ordre partiel résultant, et ceux dont on peut se passer.

On pourra aussi tenter de dégager de l'opinion collective un *ordre total* choisi parmi tous les ordres compatibles avec l'ordre partiel. On essaiera par exemple, la méthode de Condorcet, qui, comme on le sait, ne réussit pas toujours.

2. Par l'analyse booléenne des questionnaires telle que la conduit Flament (thèse d'État inédite), on obtient des *schémas d'implications*, qui peuvent être des ordres partiels. On peut se poser la question de trouver tous les ordres totaux (correspondant à des échelles de Guttman) compatibles avec un ordre partiel donné. Là encore, il sera intéressant de dégager, parmi tous ces ordres totaux, les ensembles minimaux suffisant à reproduire l'ordre partiel de départ.

3. Dans un problème d'*ordonnancement*, on a un ordre partiel sur un ensemble de tâches. L'ensemble des ordonnancements compatibles avec les contraintes est donc l'ensemble des ordres totaux contenant cet ordre partiel.

RÉFÉRENCES

[1] Szpilrajn, E., « Sur l'extension d'un ordre partiel », *Fund. Math.*, 16, 1930, pp. 386-389.

[2] Dushnik, B. et Miller, E. W., « Partially ordered sets », *Amer. J. Math.*, 63, 1941, pp. 600-610.

[3] Guilbaud, G. Th., et Rosenstiehl, P., « Analyse algébrique d'un scrutin », *M.S.H.*, *n*° 4, p. 9, Paris, 1963.

[4] Birkoff, G., *Lattice theory* (American Mathematical Society 1960), pp. 22 et 222.

[5] *Id.*, p. 56.

[6] Frey, L., *Parties distributives du treillis des permutations*, comptes rendus du Séminaire d'Aix, 1967, Mouton, Paris (sous presse).

[7] Ducamp, A., *Sur la dimension d'un ordre partiel. Théorie des graphes*. Journées Internationales d'Études, Dunod, Paris, 1967, pp. 103-112.

[8] Kreweras, G., « Représentation polyédrique des préordres complets finis et applications à l'agrégation des préférences », comptes rendus du Colloque CNRS : *La Décision : Agrégation et Dynamique des ordres de préférence.*

[9] Barbut, M., *Médianes Condorcet et Kendall*, SEMA, 35 boulevard Brune, Paris (14e).