MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

J. ROUBAUD

Un problème combinatoire posé par la poésie lyrique des troubadours

Mathématiques et sciences humaines, tome 27 (1969), p. 5-12

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1969__27__5_0>

M.S.H. (7e année, n° 27, 1969, p. 5-12)

UN PROBLÈME COMBINATOIRE POSÉ PAR LA POÉSIE LYRIQUE DES TROUBADOURS

par

J. ROUBAUD [1]

INTRODUCTION.

Une partie très importante de la poésie lyrique de langue romane des XIIe et XIIIe siècles est composée dans une forme que nous désignerons par le terme de *canso*, nom que lui ont donné ses probables inventeurs, les troubadours. Nous ne nous intéresserons pas du tout aux motivations et implications esthétiques (ou autres) des phénomènes que nous décrivons [2]. La situation, du point de vue formel, combinatoire, qui nous occupe, est exceptionnellement favorable, et ceci pour deux raisons :

a) Un corpus de textes, relativement peu étendu et bien défini (environ 2 500 poèmes ou fragments de poèmes pour les troubadours, 2 000 pour les trouvères,...) ;

b) Les contraintes explicites définissant la forme poétique qu'est la canso sont à la fois assez précises pour être décrites en termes abstraits, et assez souples pour laisser place à de très nombreuses variations. En outre si, comme nous le verrons, la liberté que laisse la définition de la canso est en définitive limitée par d'autres contraintes (explicites et implicites) qui en déterminent en grande partie l'évolution, ces contraintes ont précisément pour effet de donner naissance à un double jeu combinatoire dont nous allons essayer ici de préciser quelques données. Auparavant :

1. — PRÉCAUTIONS.

Les remarques qui suivent peuvent présenter quelque intérêt dans deux directions très distinctes : d'une part, elles donnent naissance à un problème combinatoire intrigant, dont la solution pourra exercer les amateurs ; un cas particulier, dû à R. Queneau [3] est traité avec quelque développement dans l'article qui suit la présente note. Elles devraient permettre d'autre part (convenablement précisées par les spécialistes), une présentation beaucoup plus maniable d'une partie des données métriques et prosodiques de la lyrique médiévale.

Mais il est clair qu'elles ne fournissent, en elles-mêmes, aucune espèce d'explication du phénomène que représente l'existence d'une telle forme poétique, moins encore de sa signification esthétique, pour nous en tenir à cet aspect des choses; leur seule vertu éventuelle, répétons-le, est descriptive. Elles ne dispensent pas d'une théorie.

---

1. Maître de Conférence de Mathématiques. Faculté des Sciences de Dijon.
2. Nous renvoyons, pour cette question, à notre article : « La sextine de Dante et d'Arnaut Daniel », in *Change 2* : La destruction, Seuil, 1969.
3. R. Queneau, « Note complémentaire sur la Sextine », in *Subsidia Pataphysica*, n° 1 (969), p. 79-80.

2. — LA CANSO.

2.1. — La forme poétique par excellence de la poésie courtoise, du *grand chant courtois*, première et magnifique manifestation de la poésie lyrique dans une des langues dites modernes, est la *chanson* des trouvères, la *canso* des troubadours.

2.2. — La *canso* est une suite de strophes (ou *coblas*), en nombre variable, terminée généralement par un (ou plusieurs) envois (*tornadas*).

2.3. — La *cobla :* chaque cobla est caractérisée par une formule comportant trois données :

a) Métrique : la *formule métrique* indiquant le nombre de syllabes de chaque vers [1] ;

b) Musicale : les différents membres de la mélodie ;

c) La *formule de rimes*, qui indique le nombre et la succession des rimes distinctes dans la strophe.

2.4. — C'est la formule de rimes que nous examinerons seule ici.

2.5. — Exemple :

7	5	7	7	8	10′	10′	8
a	b	a	a	c	d	d	c

Cette formule indique que la cobla est une cobla de 8 vers, le premier de 7 syllabes, ... (les vers de 10 syllabes étant à finale féminine), sur 4 rimes a, b, c, d. La première rime étant a, etc.

2.6. — *Règle fondamentale.* La formule de la strophe initiale d'une canso étant donnée, chaque strophe suivante reprend la *même formule ;* chacun des envois reproduit une partie de cette formule.

3. — CONDITIONS DU PROBLÈME.

3.1. — La seule variation formelle permise de strophe à strophe concerne la rime : soit en effet X l'ensemble des rimes distinctes figurant dans la formule (et désignées (cf. par exemple 2.5 ci-dessus) par des lettres a, b, c...), la formule de rimes est un mot du monoïde libre L(X) sur l'ensemble X ; mais la nature des rimes n'est pas imposée : chaque lettre $a \in X$ désigne donc une classe possible de rimes individuelles (que nous ne définirons pas). Un premier jeu combinatoire, auquel ont eu recours les troubadours est une exploitation de cette possibilité : répétition ou renouvellement de strophe en strophe des rimes de la formule.

3.2. — *Classification des cansos.* De ce point de vue on peut classer les cansos en deux grandes catégories :

a) La classe de référence est celle des cansos dites *unissonans ;* dans ces poèmes, les rimes sont les mêmes dans toutes les strophes (on ne fixe pas seulement la formule de rimes) ;

b) Les cansos qui ne sont pas unissonantes sont dites *singulars :* les rimes y sont renouvelées de strophe en strophe [2].

1. Avec l'indication du genre (finale masculine ou féminine). Pour toutes ces questions, voir I. Frank, *Répertoire métrique des troubadours*, Champion (2 vol.), 1955.
2. Nous simplifions un peu.

3.3. — Le jeu combinatoire s'exercera, dans les cansos singulars par la conservation de certaines rimes, le renouvellement ou le déplacement dans la formule de certaines autres. Avant de préciser l'élément moteur de ce jeu, disons que, pour que ce travail formel soit perceptible à l'oreille, la pratique de la canso doit tendre à éliminer ce qui pourrait le brouiller, c'est-à-dire toute répétition aléatoire de timbres dans les strophes d'une même canso. Autrement dit, toute répétition dans une strophe d'une rime d'une strophe précédente doit pouvoir être considérée comme intentionnelle : une fois répertoriés les procédés formels de ces répétitions, elle appartiendra à l'une des variétés ainsi identifiées.

Les troubadours n'ont pas de règle explicite à ce sujet (du moins aucune ne nous a été conservée [1]). Mais on constate que les exceptions sont rarissimes (elles sont numériquement du même ordre d'importance que celui des cansos où sont décelables des fautes patentes de versification, par exemple).

4. — LE MOUVEMENT DES RIMES.

4.1. — Le compositeur d'une canso, le « trouveur », choisit pour celle-ci un *mouvement* de rimes. Celui-ci est défini par deux données :

4.1.1. L'ensemble des rimes mises en mouvement : ce peut être tout ou partie de la formule et comporter éventuellement d'autres rimes que celles figurant dans la formule.

4.1.2. Le « mouvement » proprement dit, qui est une permutation de l'ensemble des rimes de 4.1.1.

De manière précise :

4.2. — Description formelle.

4.2.1. Si n est un entier positif, désignons par Δ_n l'ensemble totalement ordonné $1 \ldots n$ (Δ_0 est l'ensemble vide).

Une *n-formule F sur m-rimes* ($n \geqq m$) est la donnée d'une partition de Δ_n en m éléments et de l'application surjective f de $\Delta_n \longrightarrow \Delta_m$ qui s'en déduit en ordonnant le quotient de Δ_n par la relation d'équivalence associée à la partition de la manière suivante :

$$i \leqq j \Leftrightarrow \inf\{x, \mathrm{f}(x) = i\} \leqq \inf\{y, \mathrm{f}(y) = j\}$$

4.2.2. *Un mouvement de rimes* M est un quintuple $\mathrm{M} = (p, q, \varphi, \pi, \mathrm{F})$ où F est une formule de rimes (4.2.1.), p, q deux entiers tels que $q \leqq p$, $q \leqq m$, $p \leqq 2m - 1$; φ une application injective croissante de $\Delta_q \longrightarrow \Delta_m$, π une permutation de Δ_p.

4.2.3. *Choix de rimes.* Soit R l'ensemble (fini) des rimes possibles, n un entier. Un choix de n-rimes est une injection $\mathrm{C}^n : \Delta_n \longrightarrow \mathrm{R}$. Si F est une formule sur m-rimes un *choix de rimes pour F* est un couple $(\mathrm{F}, \mathrm{C}^m)$, où C^m est un choix de m rimes. $\mathrm{C} = (\mathrm{F}, \mathrm{C}^m)$ étant un choix de rimes pour la formule F, l'ensemble totalement ordonné S à n éléments de R dont le i^{eme} élément est $\mathrm{C}^m\,\mathrm{f}(i)$ s'appelle *strophe de formule F.*

1. Dans le traité de rhétorique et poétique du XIe siècle, les *leys d'Amor.*

4.2.4. Soit M un mouvement de rimes, C^o est un choix de p-rimes, C^m un choix de m-rimes. Ces données sont *compatibles* si :

$$\text{(i)}\ C^m \varphi(i) = C^o(i), \quad 1 \leqq i \leqq q;$$

$$\text{(ii)}\ \text{si } j \notin \varphi(\Delta_q)\ (1 \leqq j \leqq m) \text{ et } k > q \quad k \leqq p,$$

alors :

$$C^m(j) \neq C^o(k).$$

4.2.5. Construction d'un fragment de canso.

Soit M un mouvement de rimes, C^o et C^m des choix de rimes compatibles avec M. Soit r l'ordre de la permutation π. Un *fragment de canso* est un ensemble ordonné de r strophes de formule F, $S_1 \dots S_r$, défini par récurrence par les conditions :

(i) S_1 est une strophe de formule F ;

(ii) S_i $(1 \leqq i < r)$ étant construite S_{i+1} est une strophe de formule F telle que :

$$a)\ C^m_{i+1}(\varphi(i)) = C^o\,\pi(j),\ 1 \leqq j \leqq q;$$

$$b)\ C^m_{i+1}(k) \notin \bigcup_{1 \leqslant e \leqslant i} C^m_e(\Delta_m), \quad k \in \varphi(\Delta_q),\ 1 \leqq k \leqq m.$$

4.2.6. Une canso sera, en général, une suite de fragments de cansos.

4.2.7. En résumé, la construction d'une canso d'une formule donnée suppose deux types de choix : certaines rimes de la formule sont permutées, d'autres sont renouvelées à chaque strophe par des rimes prises en dehors de l'ensemble des rimes déjà utilisées. Ce mouvement (dû à la permutation) est interrompu au bout d'un nombre de strophes égal à l'ordre de la permutation envisagée. Si $m = p$ et si π est la permutation identique on retrouve la *canso unissonans*. Si $p = 0$, il n'y a pas de permutation de rimes, et la canso est singulars « pure » [1].

Il n'y a jamais de recours à deux permutations différentes dans la même canso. Le *choix d'une permutation* (éventuellement la permutation identique, ou l'absence d'une permutation) est un *trait formel essentiel* de la définition de la canso.

4.3. — *Permutations effectivement utilisées par les troubadours.*

En dehors de la permutation identique et de la transposition sur 2 lettres, on peut recenser les permutations suivantes :

— Sur 3 lettres :

les transpositions $\pi_1 = (12) \quad \pi_2 = (13) \quad \pi_3 = (23)$;
le cycle $\pi_4 = (123)$.

— Sur 4 lettres :

les transpositions $\pi_5 = (12) \quad \pi_6 = (13) \quad \pi_7 = (14) \quad \pi_8 = (34)$;
les permutations d'ordre 2 $\pi_9 = (13)\,(24)$ $\pi_{10} = (14)\,(23)$,
d'ordre 3 $\pi_{11} = (321) \quad \pi_{12} = (142) \quad \pi_{13} = (124)$,
d'ordre 4 $\pi_{14} = (1324) \quad \pi_{15} = (1234)$.

1. Cf. (2), p. 5.

— Sur 5 lettres :

transpositions $\pi_{16} = (15)$ $\pi_{17} = (23)$ $\pi_{18} = 25)$,
ordre 2 $\pi_{19} = (13)\,(24)$ $\pi_{20} = (15)\,(24)$ $\pi_{21} = (14)\,(25)$ $\pi_{22} = (25)\,(34)$,
ordre 3 $\pi_{23} = (253)$,
ordre 4 $\pi_{24} = (1425)$, [1],
ordre 5 $\pi_{25} = (12345)$,
ordre 6 $\pi_{26} = (124)\,(35)$.

— Sur 6 lettres :

$\pi_{27} = (56)$ $\pi_{28} = (16)\,(25)\,(34)$ $\pi_{29} = (12)\,(34)\,(56)$ $\pi_{30} = (15)\,(24)\,36)$
$\pi_{31} = (124536)$, d'ordre 6.

— Sur 7 lettres :

$\pi_{32} = (765321)$.

— Sur 8 lettres :

$\pi_{33} = (18)\,(27)\,(36)\,(45)$.

— Sur 10 lettres :

$\pi_{34} = (3456789)\,(10)\,(12)$.

6. — LA SEXTINE D'ARNAUT DANIEL ; ÉNONCÉ DU PROBLÈME.

5.1. — La permutation la plus intéressante est la permutation p_{31} :

$$p_{31} = \delta_6 = \frac{(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)}{(6\ 1\ 5\ 2\ 4\ 3)}, \text{ qui est d'ordre 6 sur 6 lettres.}$$

Elle est utilisée dans un poème célèbre, dû au troubadour Arnaut Daniel, honoré par Dante dans la *Divine Comédie*, et qui a reçu le nom de *sextine*. Dans ce texte, chaque strophe elle-même compte 6 vers, ce qui implique que les vers d'une strophe ne riment pas entre eux. En fait, les rimes elles-mêmes sont des mots-rimes, repris de strophe en strophe et permutés par δ_6. Ces mots ne riment pas, mais sont assonancés selon deux systèmes distincts d'assonances :

$$\text{(i)}\quad 1-4,\quad 2-5,\quad 3-6,$$
$$\text{(ii)}\quad 1-6,\quad 2-5,\quad 3-4.$$

Dans la première strophe, les deux triplets non assonancés 1 – 2 – 3 et 4 – 5 – 6 sont liés par le premier système (« formule d'assonances » a b c a b c). La sixième strophe a pour ordre de rimes 2 4 6 5 3 1, ce qui représente de nouveau deux triplets non assonancés liés (par la même formule d'assonances) cette fois par le système (ii).

Enfin, cette situation ne se retrouve dans aucune autre strophe : il y a toujours deux vers (parmi les trois premiers) assonancés selon l'un ou l'autre système.

Nous pouvons maintenant formuler notre problème.

1. Cette permutation n'est pas due à un troubadour mais à un de leurs imitateurs italiens antérieur à Dante, Guittone d'Arezzo.

5.2. — Problème :

(P) $2n$ étant un entier pair, quelles sont les permutations p_n, d'ordre $2n$ sur $2n$ lettres, satisfaisant aux conditions ci-dessous :

(Sa) pour tout couple $i, j \quad i \leqq n, j \leqq n$ on n'a pas $p_n(i) = n + p_n(j)$ (modulo $2n$) ;

(Sb) pour tout entier $k \quad 2 \leqq k < 2n$, il existe deux entiers i, j, entre 1 et n tels que :

$$p_n^k(i) = n + p_n^k(j)\ (2n)$$

ou bien tels que :

$$p_n^{k-1}(i) = n + p_n^{k-1}(j)\ (2n).$$

La solution du problème (P) n'est pas connue. Voici deux problèmes annexes.

(Pa) Problème de R. Queneau [1].

Soit δ_n la permutation sur n lettres définie par :

$$\delta_n(2p) = p \quad (2p \leqq n) \qquad \delta_n(2p+1) = n - p \quad (2p+1 \leqq n)$$

et d_n l'inverse de δ_n. Quels sont les entiers n pour lesquels δ_n est d'ordre n ?

(Pb) $2n$ étant solution du problème (Pa) la permutation d_{2n} est-elle une solution du problème (P) ?

Je pense que (Pb) doit avoir une réponse positive.

6. — CONDITIONS D'UN DEUXIÈME PROBLÈME.

Le problème concerne le corpus des formules de rimes utilisées par les troubadours. La très grande variété de formules de rimes que l'on constate [2] (850 environ pour quelque 2 500 textes conservés) est due à la règle suivante :

une canso doit avoir une formule originale [3].

Décrire de manière cohérente le corpus pour dégager éventuellement les mécanismes combinatoires de son évolution, tel serait le but de ce deuxième problème.

Nous nous contenterons ici d'une remarque.

On peut bien sûr, décrire une formule de rimes comme un mot d'un monoïde libre à un nombre fini de générateurs. L'ensemble (fini) des formules attestées apparaît dans ce cas comme une réalisation d'un mécanisme « génératif » potentiellement infini, engendrant les formules « possibles » compatibles avec l'ensemble des conditions (esthétiques ou autres) de la création lyrique. Cette situation présente de fortes analogies (qui ne sont pas que de surface) avec d'autres bien connues aujourd'hui.

Mais, ici comme ailleurs, et ici de manière beaucoup plus évidente, on constate qu'il est tout à fait impossible de s'en tenir, valablement, à cette caractérisation « rigide » de l'« expression » qu'impose le choix de l'objet mathématique monoïde, employé pour la description : une formule de rimes, comme a b a b est en fait, l'expression d'un *simplexe divisé* au sens de Benzécri [4], le résultat de l'imbrication des deux constituants $\prod_{aa}$ et $\prod_{bb}$; bien plus, elle doit même être considérée comme expression de deux simplexes divisés distincts (ambiguïté inhérente à la nature même de la strophe comme « musique ») : c'est-à-dire à la fois comme imbrication d'échos (cas précédent) et comme répétition du « tout » musical $\prod_{ab}$.

1. Cf. (3), p. 5, et l'article suivant. A. Tavera, « Arnaut Daniel et la Spirale », in *Subsidia Pataphysica*, n° 1, 1967, p. 3-79.
2. Pas seulement chez les troubadours.
3. Ici encore, nous simplifions, cf. (2), p. 5.
4. Cf. J. P. Benzécri, *Cours de linguistique*.

LA SEXTINE D'ARNAUT DANIEL.
Texte [1].

I Lo ferm voler q'el cor m'intra
no'm pot ies becs escoissendre ni ongla
de lausengier, qui pert per mal dir s'arma
e car non l'aus batr'ab ram ni ab verga
si vals a frau lai o non aurai oncle
jauzirai joi, en vergier o dinz cambra

II Qan mi soven de la cambra
on a mon dan sai que nuills hom non intra
anz me son tuich plus que fraire ni oncle
non ai membre no'm fremisca, neis l'ongla
aissi cum fai l'enfas denant la verga
tal paor ai no'l sia trop de l'arma

III Del cors li fos non de l'arma
e cossentis m'a celat dinz sa cambra
que plus mi nafra'l cor que colps de verga
car lo sieus sers lai on ill es non intra
totz temps serai ab lieis cum carns et ongla
e non creirai chastic d'amic ni d'oncle

IV Anc la seror de mon oncle
non amei plus ni tant per aqest'arma
c'aitant vezis cum es lo detz de l'ongla
s'a liei plagues volgr'esser de sa cambra
de mi pot far l'amors q'inz el cor m'intra
mieills a son vol c'om fortz de frevol verga

V Pois flori la seca verga
Ni d'en Adam mogron nebot ni oncle
tant fin'amors cum cella q'el cor m'intra
non cuig fos anc en cors ni eis en arma
on q'ill estei fors on plaz' o dins cambra
mos cors no' is part de lieis tant cum ten l'ongla

VI C'aissi s'enpren e s'enongla
mos cors en lei cum l'escorss'en la verga
q'ill m'es de joi tors e palaitz e cambra
e non am tant fraire paren ni oncle
q'en paradis n'aura doble joi m'arma
si ja nuills hom per ben amar lai intra

tornada Arnautz tramet sa chanson d'ongl'e d'oncle
a grat de lieis que de sa verg'a l'arma
son Desirat cui pretz en cambra intra

1. Voir *op. cit.*, dans (2), p. 8.

PARAPHRASE.

I

La ferme volonté qui dans mon cœur *entre*
ne peut ni langue la briser ni *ongle*
de *lausengier* qui perd à mal dire son *âme*
n'osant le battre de rameau ou de *verge*
en fraude seulement, où je n'ai nul *oncle*
je jouirai de ma joie, en verger ou *chambre*

II

Quand je me souviens de la chambre
où pour mon mal je sais que nul homme n'entre
[mais tous me sont pires que frère ou qu'oncle)
tremblent tous mes membres jusqu'à l'ongle
ainsi que fait l'enfant devant la verge
tant j'ai peur de n'être assez sien dans mon âme

III

Ah que je sois sien dans le corps non dans l'âme
et qu'elle m'accueille en secret dans sa chambre
plus me blesse le cœur que coup de verge
d'être son serf qui là où elle est n'entre
toujours je serai près d'elle chair et ongle
n'écoutant aucun reproche d'ami ni d'oncle

IV

Jamais la sœur de mon oncle
je n'aimerai tant ou plus, par mon âme !
Aussi proche qu'est le doigt de l'ongle
s'il lui plaisait, je voudrais être de sa chambre
il peut faire de moi l'amour qui dans mon cœur entre
à son gré comme homme fort de faible verge

V

Depuis qu'a fleuri la sèche verge
que du seigneur Adam est descendu du nain ou oncle
un amour comme celui qui dans mon cœur entre
je ne crois pas qu'il en fût dans un corps ni dans une âme
où qu'elle soit sur la place dans la chambre
mon cœur sera, moins loin que l'épaisseur d'un ongle

VI

Qu'ainsi s'enracine devienne ongle
mon cœur en elle comme écorce en la verge
elle m'est de la joie tour et palais et chambre
je n'aime tant frère parent ni oncle ;
en paradis aura double joie mon âme
si jamais homme d'avoir aimé y entre

Envoi

Arnaut finit sa chanson d'*ongle* et d'*oncle*
pour plaire à celle dont la *verge* est l'*âme*
son Desirat : son prix *entre* en sa *chambre*