MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

G. KREWERAS

Dénombrements systématiques de relations binaires externes

Mathématiques et sciences humaines, tome 26 (1969), p. 5-15
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1969__26__5_0>

M.S.H. (7e année, n° 26, 1969, p. 5-15)

DÉNOMBREMEMTS SYSTÉMATIQUES DE RELATIONS BINAIRES EXTERNES

par

G. KREWERAS

1. — INTRODUCTION.

Les *relations binaires externes* sont parmi les êtres de raison les plus fréquemment rencontrés dans de nombreuses branches de la réflexion mathématique appliquée ; ne mentionnons, à titre d'exemples, que les descriptions qui visent l'aptitude de certains ouvriers à certaines tâches, les réponses affirmatives ou négatives aux rubriques (« items ») d'un questionnaire, la possession de certains caractères par telle ou telle espèce biologique, les nomenclatures d'articles fabriqués ou non par diverses entreprises, etc.

Les deux représentations visuelles les plus familières d'une relation binaire entre deux ensembles finis M et N sont : 1) le *tableau rectangulaire* (produit cartésien $M \times N$, avec M ensemble des lignes et N des colonnes) dont les cases sont marquées 1 ou 0 suivant que la relation est satisfaite ou non ; 2) le *graphe biparti* dans lequel M et N sont deux ensembles de sommets, la relation étant définie par un ensemble d'arêtes dont chacune a une extrémité dans M et l'autre dans N.

Nous utiliserons en général dans ce qui suit la première de ces représentations, en appelant T le tableau (de m lignes et n colonnes), en utilisant le mot « rangée » pour « ligne ou colonne », et en qualifiant une rangée de « nulle », d' « unitaire » ou de « constante » dans les cas respectifs où les cases dont elle se compose sont marquées toutes 0, toutes 1, ou toutes de même manière.

Admettant qu'il est parfois utile de dénombrer combien, parmi les relations entre deux ensembles donnés M et N, possèdent une propriété donnée (affirmation qui ne manquerait pas de justifications si elle venait à être mise en doute), nous nous poserons ci-après méthodiquement quelques problèmes relatifs aux propriétés suivantes :

a) pas de ligne nulle ;
b) pas de ligne constante ;
c) pas de rangée nulle ;
d) ni ligne nulle ni colonne unitaire ;
e) pas de rangée constante ;
f) pas de ligne répétée ;
g) pas de rangée répétée ;
h) ni rangée nulle ni rangée répétée ;
i) ni rangée nulle ni ligne répétée ;
j) connexité (possibilité de joindre deux cases unitaires quelconques par une chaîne de cases unitaires telles que deux cases consécutives soient sur une même rangée) ;
k) connexité sans rangée nulle.

Les réponses à ces problèmes seront désignées par des lettres qui rappelleront l'étiquetage ci-dessus.

2. — CONDITIONS DE NON-CONSTANCE DE RANGÉES.

Le tableau T a mn cases et chaque manière de le remplir revient à définir une partie de cet ensemble de m cases, celle dont les cases seront marquées 1 ; si donc on n'impose aucune restriction particulière, le nombre total de tableaux est :

$$\boxed{\mathrm{t}\,(m, n) = 2^{mn}.}$$

Mais T définit aussi, si l'on veut, une application T : M $\rightarrow \mathcal{P}$ (N) pour laquelle T (α) est l'ensemble des éléments de N qui sont « dans la relation T » avec α. Imposer aux lignes de n'être jamais nulles (resp. unitaires) revient à imposer à T (α) de n'être jamais la partie vide (resp. pleine) de N ; T doit alors appliquer M non plus dans $\mathcal{P}$ (N), qui est de cardinal 2^n, mais dans $\mathcal{P}$ (N) — { $\varnothing$ } ou dans $\mathcal{P}$ (N) — { N }, qui sont de cardinal $2^n - 1$.

On voit ainsi immédiatement que :

$$\boxed{\mathrm{a}\,(m, n) = (2^n - 1)^m}$$

Bien entendu si l'on interdit à la fois la partie vide et la partie pleine de $\mathcal{P}$ (N) comme images de $\alpha \in$ M, on trouve :

$$\boxed{\mathrm{b}\,(m, n) = (2^n - 2)^m.}$$

Plus intéressant est le calcul de c (m, n), nombre de tableaux auxquels on impose de n'avoir ni ligne ni colonne nulle ; c'est en quelque sorte le nombre de relations binaires « propres » entre M et N, c'est-à-dire de celles auxquelles aucun élément de M ni de N n'est en fait « étranger ». Il est clair que c (m, n) sera une fonction symétrique des arguments m et n ; il sera commode de poser par convention c (0, n) = 0 pour tout $n \geqslant 1$, mais c (0, 0) = 1 ; on utilisera en outre constamment dans ce qui suit la convention $0^0 = 1$.

Cela posé, il est clair que les $(2^m - 1)^n$ tableaux qui n'ont aucune *colonne* nulle peuvent se classer suivant le cardinal du nombre de *lignes* nulles qu'ils présentent ; on voit ainsi que :

$$(2^m - 1)^n = \mathrm{c}\,(m, n) + C_m^1\, \mathrm{c}\,(m-1, n) + \dots + C_m^{m-1}\, c\,(1, n) + C_m^m\, \mathrm{c}\,(0, n),$$

d'où, par le procédé classique d'inversion :

$$\boxed{\mathrm{c}\,(m, n) = (2^m - 1)^n - C_m^1\,(2^{m-1} - 1)^n + \dots + (-1)^{m-1}\, C_m^{m-1} \,.\, 1^n + (-1)^m\, C_m^m\, 0^n}$$

Dans la mesure où, pour m donné, cette expression est une combinaison linéaire de puissances $n^{\text{ièmes}}$ de nombres fixes, nous l'appellerons une « *expression spectrale* » ; le *spectre* sera ici la suite :

$$2^m - 1 \quad 2^{m-1} - 1 \quad \dots \quad 2^0 - 1$$

et les *coefficients* seront les binomiaux alternés.

Mais il peut être intéressant de donner de c (m, n) une « *expression symétrique* » en m et n ; on trouve ici, en développant chacune des différences élevées à la puissance n par la formule du binôme :

$$\boxed{\mathrm{c}\,(m, n) = \sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant m \\ 0 \leqslant j \leqslant n}} (-1)^{i+j}\, C_m^i\, C_n^j\, 2^{(m-i)\,(n-j)}}$$

Enfin, pour faciliter la formation de proche en proche du tableau numérique des c (m, n), donné ci-dessous pour $m + n \leq 9$, on peut avoir intérêt à se servir d'une récurrence *purement additive* au lieu des expressions à signes alternés. Une récurrence utilisable ici est la suivante :

$$\boxed{\begin{aligned}\mathrm{c}(m, n) = (2^m - 1)\, \mathrm{c}(m, n-1) + C_m^1\, 2^{m-1}\, \mathrm{c}(m-1, n-1) + C_m^2\, 2^{m-2}\, \mathrm{c}(m-2, n-1) + \dots \\ + C_m^{m-1}\, 2\, \mathrm{c}(1, n-1)\end{aligned}}$$

Elle s'obtient en classant les $c(m, n)$ tableaux suivant le nombre de lignes nulles qui y apparaissent lorsqu'on y supprime la dernière colonne.

$c(m, n)$	$n = 1$	2	3	4	5	6	7	8
$m = 1$	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	7	25	79	241	727	2 185	
3	1	25	265	2 161	16 081	115 465		
4	1	79	2 161	41 503	693 601			
5	1	241	16 081	693 601				
6	1	727	115 465					
7	1	2 185						
8	1							

Le cas où l'on impose qu'il n'y ait *ni ligne nulle ni colonne unitaire* se traite immédiatement à partir de la remarque suivante. Si l'on impose qu'il y ait *au moins une ligne nulle*, le nombre de possibilités est :

$$t(m, n) - a(m, n) = 2^{mn} - (2^n - 1)^m.$$

De même si l'on impose qu'il y ait *au moins une colonne unitaire*, le calcul est le même que si l'on imposait au moins une colonne nulle, et le nombre de possibilités est :

$$2^{mn} - (2^m - 1)^n.$$

Mais puisqu'une ligne nulle et une colonne unitaire sont incompatibles, on obtient par simple addition le nombre de cas où il existe *au moins une ligne nulle ou une colonne unitaire.* En retranchant de 2^{mn}, on trouve enfin le nombre $d(m, n)$ de cas où il n'y a *ni ligne nulle ni colonne unitaire ;* d'où *l'expression symétrique :*

$$\boxed{d(m, n) = (2^m - 1)^n + (2^n - 1)^m - 2^{mn}.}$$

Une expression *spectrale* s'obtient immédiatement par développement binomial de $(2^n - 1)^m$; on a ainsi pour spectre :

$$2^m - 1 \quad 2^{m-1} \quad 2^{m-2} \quad \ldots \quad 2^0$$

avec, comme coefficients, les binomiaux alternés.

Enfin, pour le calcul numérique du tableau $d(m, n)$ ci-dessous, il peut être économique de se servir de la *récurrence additive :*

$$\boxed{d(m, n) = (2^m - 1)\, d(m, n - 1) + \sum_{\lambda=1}^{m-1} C_m^\lambda\, (2^\lambda - 1)\, (2^{n-1} - 1)^\lambda}$$

que l'on justifie aisément en appelant $m - \lambda$ le nombre de lignes dont tous les termes, sauf le dernier, sont nuls.

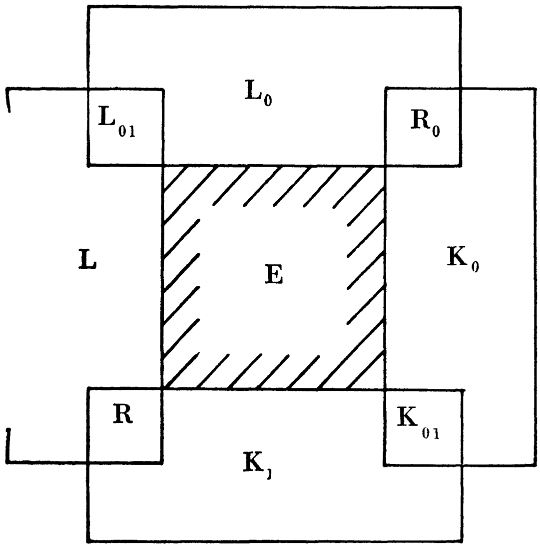
$d(m, n)$	$n = 1$	2	3	4	5	6	7	8
$m = 1$	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	2	12	50	180	602	1 932	
3	0	12	174	1 680	13 830	105 552		
4	0	50	1 680	35 714	634 320			
5	0	180	13 830	634 320				
6	0	602	105 552					
7	0	1 932						
8	0							

Pour traiter le cas où l'on impose qu'il n'y ait aucune rangée constante, le plus simple est de représenter, sur un diagramme de Venn, les quatre ensembles L_0, L_1, K_0, K_1 définis comme les ensembles de tableaux ayant :

L_0 : au moins une ligne nulle,
L_1 : au moins une ligne unitaire,
K_0 : au moins une colonne nulle,
K_1 : au moins une colonne unitaire.

Évidemment L_0 et K_1 ont une intersection vide, de même que L_1 et K_0, d'où la figure ci-dessous, dans laquelle on a désigné les intersections non-vides par :

$$\begin{aligned} R_0 &= L_0 \cap K_0 \\ R_1 &= L_1 \cap K_1 \\ L_{01} &= L_0 \cap L_1 \\ K_{01} &= K_0 \cap K_1. \end{aligned}$$



C'est E, complémentaire de la réunion $L_0 \cup L_1 \cup K_0 \cup K_1$, dont on cherche le cardinal $e(m, n)$.

Mais on connaît le cardinal $c(m, n)$ du complémentaire de la réunion $L_0 \cup K_0$; on peut donc écrire :

$$c(m, n) = e(m, n) + \text{card}(L_1 - L_{01}) + \text{card}(K_1 - K_{01}) - \text{card}R_1.$$

D'autre part, on établit aisément que :

$$\begin{aligned} \text{card}(L_1 - L_{01}) &= a(m, n) - b(m, n), \\ \text{card}(K_1 - K_{01}) &= a(n, m) - b(n, m), \end{aligned}$$

et enfin que :

$$\text{card } R_1 = c(m, n) + 2^{mn} - a(m, n) - a(n, m),$$

d'où, finalement, compte tenu des expressions trouvées précédemment pour a et b, l'expression *symétrique :*

$$\boxed{e(m, n) = 2c(m, n) + 2^{mn} - 2(2^m - 1)^n - 2(2^n - 1)^m + (2^m - 2)^n + (2^n - 2)^m.}$$

L'expression *spectrale* correspondante peut se calculer à partir de là, mais n'est pas particulièrement intéressante ; le spectre comprend, outre les deux plus grandes valeurs $2^m - 2$ et $2^{m-1} - 1$, tous les nombres $2^{m-\lambda}$ et $2^{m-\lambda} - 1$ pour $\lambda \in \{2, 3, \ldots, m\}$; à noter que le nombre 1 apparaît ainsi deux fois, une fois comme $2^1 - 1$ et une autre comme 2^0, ce qui donne au coefficient correspondant une apparence d'irrégularité (le lecteur intéressé par l'expression complète peut la calculer sans aucune peine ; à titre d'exemple : $e(4, n) = 14^n - 8.7^n + 12.4^n + 12.3^n - 24.2^n + 6.1^n$).

Il ne semble pas y avoir de récurrence additive particulièrement simple. Cependant le tableau ci-dessous se forme sans trop de difficultés :

$e(m, n)$	$n = 1$	2	3	4	5	6	7	8
$m = 1$	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	2	6	14	30	62	126	
3	0	6	102	906	6 510	42 666		
4	0	14	906	22 874	417 810			
5	0	30	6 510	417 810				
6	0	62	42 666					
7	0	126						
8	0							

3. — CONDITIONS DE NON-RÉPÉTITION DE RANGÉES.

L'étude des cas qui font intervenir des conditions de non-répétition amènera à dénombrer non plus des applications quelconques mais des applications injectives, c'est-à-dire fera intervenir les « sous-exposants » de la notation de Vandermonde :

$$(x)_k = x(x-1) \ldots (x-k+1),$$

avec $(x)_0 = 1$.

Ainsi, si l'on impose au tableau T de n'avoir aucune ligne répétée, c'est-à-dire de n'avoir pas deux lignes remplies de la même manière, comme l'ensemble de toutes les lignes possibles est de cardinal 2^n, on trouve immédiatement l'expression (non symétrique) :

$$\boxed{f(m, n) = (2^n)_m.}$$

Il y a lieu de noter, en passant, qu'il existe l'expression spectrale correspondante, que l'on obtient en développant le produit des m facteurs $2^n, 2^n - 1, \ldots, 2^n - m + 1$. Le spectre est $2^m\ 2^{m-1}\ 2^{m-2} \ldots 4\ 2$, et les coefficients correspondants sont les *nombres de Stirling de première espèce*, avec signes alternés :

$$1 \quad -Q_1^m \quad Q_2^m \ldots (-1)^{m-1} Q_{m-1}^m.$$

Q_λ^m peut se définir comme la somme des produits λ à λ des nombres $\{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$. (Il est bien connu que ces nombres interviennent dans l'inversion des formules où apparaît le nombre de partitions P_l^k d'un ensemble de k éléments en l classes non-vides ; les P_l^k sont les *nombres de Stirling de deuxième espèce*. Plus précisément, on a, chaque fois que $0 < l < k$:

$$P_l^k - Q_1^k P_l^{k-1} + Q_2^k P_l^{k-2} - \ldots = 0 \,; \qquad (1)$$

la somme du premier membre comprend en droit k termes, dont en fait seuls $k - l + 1$ sont nuls, puisque les P s'annulent quand leur indice du haut devient inférieur à l).

Mais il faut noter que $f(n, m)$, qui est égal à $(2^m)_n$, n'a pas d'expression spectrale proprement dite puisque $(2^m)_n$ n'est pas égal, pour m donné, à une combinaison linéaire de puissances $n^{\text{ièmes}}$ de nombres fixes. Nous utiliserons cependant plus loin des expressions que nous nommerons « subspectrales », où l'on aura non plus des exposants, mais des sous-exposants égaux à n.

Pour rechercher le nombre $g(m, n)$ de tableaux auxquels on impose de n'avoir ni deux lignes identiques, ni deux colonnes identiques, considérons, dans l'un quelconque T des 2^{mn} tableaux a priori possibles, une classe *complète* L de lignes identiques et une classe *complète* K de colonnes identiques. Il est clair que le sous-tableau T(L, K) de T formé de toutes les cases définies par une ligne de L et une colonne de K est rempli soit tout entier par des zéros, soit tout entier par des unités.

Or les relations « identité de deux lignes » et « identité de deux colonnes » définissent, respectivement sur M et N, des *partitions* en classes, p.e. en i classes non-vides pour M et en j classes non-vides pour N. Il y aura ainsi ij sous-tableaux analogues à T(L, K), et chacun sera ou « nul » ou « unitaire » : la chose est particulièrement facile à se représenter si toutes les classes L sont des « paquets » de lignes et toutes les classes K des « paquets » de colonnes. De plus, il est exclu que deux « lignes de sous-tableaux », définies par deux classes distinctes L et L', soient identiques ; car s'il en était ainsi, les classes L et L' pourraient se réunir en une classe unique, contrairement à l'hypothèse qu'il s'agit de classes complètes. De même pour les colonnes.

T apparaît alors comme un « tableau de sous-tableaux », à i « lignes » et j « colonnes », et le nombre de manières dont ces sous-tableaux peuvent se répartir en nuls et unitaires est précisément égal à $g(i, j)$. D'où la relation :

$$2^{mn} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} P_i^m P_j^n \, g(i, j), \tag{2}$$

puisqu'il y a P_i^m partitions de M en i classes et P_j^n partitions de N en j classes.

Il suffit de combiner linéairement des relations (2), en tenant compte de la formule d'inversion (1), pour trouver d'abord

$$\begin{aligned}(2^m)_n &= \sum_{i=1}^{m} P_i^m \, g(i,n) \\ &= P_1^m \, g(1, n) + \dots + P_i^m \, g(i, n) + \dots + P_m^m \, g(m, n),\end{aligned}$$

et ensuite :

$$(2^m)_n - Q_1^m \, (2^{m-1})_n + \dots = g(m, n) \, ;$$

on a donc l'expression *sub-spectrale :*

$$\boxed{g(m, n) = (2^m)_n - Q_1^m \, (2^{m-1})_n + \dots + (-1)^{m-1} \, Q_{m-1}^m \, (2^1)_n}$$

L'expression *symétrique* s'établit sans peine par re-developpement des expressions factorielles $(2^{m-i})_n$; on trouve :

$$\boxed{g(m, n) = \sum_{(i,j)} (-1)^{i+j} \, Q_i^m \, Q_j^n \, 2^{(m-i)\,(n-j)}}$$

étant entendu que $Q_0^m = Q_0^n = 1$ et que la sommation se fait pour $0 \leq i \leq m-1$ et $0 \leq j \leq n-1$.

On peut aisément se passer d'une récurrence additive pour former le tableau numérique :

$g(m, n)$	$n = 1$	2	3	4	5	6	7	8
$m = 1$	2	2	0	0	0	0	0	0
2	2	10	24	24	0	0	0	0
3	0	24	264	1 608	6 720	20 160		
4	0	24	1 608	33 864	483 840			
5	0	0	6 720	483 840				
6	0	0	20 160					
7	0	0						
8	0	0						

Si, outre les répétitions de rangées, on interdit les rangées nulles, le nombre de possibilités $h(m, n)$ est donné par l'expression *sub-spectrale* :

$$\boxed{h(m, n) = (2^m - 1)_n - Q_1^{m+1} (2^{m-1} - 1)_n + \dots + (-1)^m Q_m^{m+1} (2^0 - 1)_n.}$$

Une manière de l'établir est de s'intéresser d'abord au nombre de possibilités $h'(m, n)$ correspondant au cas où l'*on interdit seulement les colonnes nulles ;* il est alors facile de voir que l'on a :

$$(2^m - 1)_n = P_1^m h'(1, n) + \dots + P_i^m h'(i, n) + \dots + P_m^m h'(m, n),$$

d'où par inversion l'expression sub-spectrale :

$$h'(m, n) = (2^m - 1)_n - Q_1^m (2^{m-1} - 1)_n + \dots + (-1)^{m-1} Q_{m-1}^m (2^1 - 1)_n. \tag{3}$$

Or, on doit d'autre part avoir :

$$h'(m, n) = h(m, n) + m\, h(m - 1, n), \tag{4}$$

le facteur m étant le nombre de positions que pourrait occuper une ligne qui serait effectivement nulle. L'équation (4), où $h'(m, n)$ est connu, est alors une équation de récurrence en $h(m, n)$, dont il est facile de s'assurer que l'expression encadrée est bien une solution; le calcul utilise la relation bien évidente entre nombres de Stirling de première espèce : $Q_i^{m+1} = Q_i^m + mQ_{i-1}^m$.

Par développement des binômes à sous-exposant n, on trouve également l'expression *symétrique :*

$$\boxed{h(m, n) = \sum_{(i,j)} (-1)^{i+j} Q_i^{m+1} Q_j^{n+1} 2^{(m-i)(n-j)},}$$

la sommation s'étendant à $0 \leq i \leq m$ et $0 \leq j \leq n$.

On obtient cette fois le tableau :

$h(m, n)$	$n = 1$	2	3	4	5	6	7	8
$m = 1$	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	6	6	0	0	0	0	0
3	0	6	174	840	2 520	5 040	5 040	0
4	0	0	840	24 360	335 160			
5	0	0	2 520	335 160				
6	0	0	5 040					
7	0	0	5 040					
8	0	0	0					

Au nombre $i(m, n)$ de tableaux sans ligne répétée ni rangée nulle se rattache un problème qu'il peut être utile de savoir résoudre rapidement : étant donné un ensemble N de cardinal n, de combien de manières peut-on le *recouvrir* à l'aide d'une *famille* de m parties *non-vides ?* Si l'on énumère ces m parties en un tableau de m lignes, en notant 1, dans chacune d'elles, les éléments de N qu'elle comprend, et O les autres, le fait que les parties soient non-vides s'exprime par la condition qu'aucune ligne ne soit nulle, et le recouvrement de N par la condition qu'aucune colonne ne soit nulle ; enfin le fait qu'il s'agisse d'une famille de parties distinctes s'exprime par la non-répétition des lignes. Si le nombre de tels recouvrements est $i_0(m, n)$, on a évidemment :

$$\boxed{i(m, n) = m\,!\, i_0(m, n)}$$

Nous donnerons donc ci-après le tableau des nombres $i_0(m, n)$, lesquels sont plus vite calculés que les $i(m, n)$ puisque plus petits.

Quant au calcul de $\mathrm{i}(m, n)$, il peut se conduire en introduisant comme intermédiaire le nombre $\mathrm{i}'(m, n)$ que l'on obtient en ne tenant d'abord pas compte de la condition « pas de ligne nulle », mais seulement des conditions « pas de colonne nulle » et « pas de ligne répetée » ; on voit ainsi que :

$$(2^m - 1)^n = \mathrm{P}_1^m\, \mathrm{i}'(1, n) + \dots + \mathrm{P}_\lambda^m\, \mathrm{i}'(\lambda, n) + \dots + \mathrm{P}_m^m\, \mathrm{i}'(m, n),$$

puis par inversion (expression *spectrale*) :

$$\mathrm{i}'(m, n) = (2^m - 1)^n - \mathrm{Q}_1^m\,(2^{m-1} - 1)^n + \dots + (-1)^{m-1}\,\mathrm{Q}_{m-1}^m\,(2^1 - 1)^n.$$

En tenant compte ensuite de :

$$\mathrm{i}'(m, n) = \mathrm{i}(m, n) + m\,\mathrm{i}(m - 1, n),$$

on trouve, par une démarche qui achève l'analogie avec ce que l'on avait fait pour justifier l'expression sub-spectrale de $\mathrm{h}(m, n)$:

$$\boxed{\mathrm{i}(m, n) = (2^m - 1)^n - \mathrm{Q}_1^{m+1}\,(2^{m-1} - 1)^n + \dots + (-1)^m\,\mathrm{Q}_m^{m+1}\,(2^0 - 1)^n.}$$

Quant au nombres $\mathrm{i}_0(m, n)$, on peut en former le tableau en faisant appel à la *récurrence additive* que voici :

$$\boxed{\mathrm{i}_0(m, n) = (2^m - 1)\,\mathrm{i}_0(m, n - 1) + \sum_{\lambda=1}^{+\infty} 2^{m-2\lambda}\,(\mathrm{C}_{m-\lambda}^{\lambda} + 2\,\mathrm{C}_{m-\lambda}^{\lambda-1})\,\mathrm{i}_0(m - \lambda, n - 1)}$$

Pour la justifier, on peut examiner ce qui reste lorsque, étant donné un recouvrement R de $\mathrm{N} = \{1, 2, \dots, n\}$ à l'aide d'une famille de n parties non-vides, on supprime l'élément n dans chacune des parties qui le contiennent.

a) Si ce qui reste est un recouvrement R′ de $\{1, 2, \dots, n - 1\}$ à l'aide d'une famille de m parties distinctes et non-vides, on peut reconstituer R en précisant auxquelles de ces m parties on rattache également l'élément n ; il faut rattacher n au moins à l'une d'entre elles pour que R soit bien un recouvrement de n, ce qui justifie le premier terme de la formule ci-dessus.

b) Dans le cas contraire, les m parties de R ont pour traces sur $\{1, 2, \dots, n - 1\}$ des parties dont $m - \lambda$ seulement forment une famille F de parties distinctes et non-vides, les λ autres étant constituées soit par la répétition de λ des membres de F, soit par la partie vide et la répétition de $\lambda - 1$ des membres de F.

Une fois fixé l'une des $\mathrm{i}_0(m - \lambda, n - 1)$ familles F possibles, il est obligatoire, pour reconstituer R, de rattacher n une fois à chacune des parties répetées (et à la partie vide si elle est présente) et il est facultatif de rattacher n également à certaines des parties non-répetées de F ; les nombres de possibilités sont donc :

si $\varnothing$ est absente $\quad \mathrm{C}_{m-\lambda}^{\lambda}\, 2^{m-2\lambda}$,
si $\varnothing$ est présente $\quad \mathrm{C}_{m-\lambda}^{\lambda-1}\, 2^{m-2\lambda+1}$,

ce qui achève de justifier la formule annoncée.

Le tableau des $\mathrm{i}_0(m, n)$ est :

$\mathrm{i}_0(m, n)$	$n = 1$	2	3	4	5	6	7	8
$m - 1$	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	3	12	39	363	1 092	3 279	
3	0	1	32	321	2 560	20 825		
4	0	0	35	1 225	24 990			
5	0	0	21	2 919				
6	0	0	7					
7	0	0	1					
8	0	0	0					
8	0	0	0					

4. — CONDITIONS DE CONNEXITÉ.

Les deux derniers problèmes abordés ci-après font intervenir la notion de *connexité* d'une relation binaire externe, notion qui est spécialement intuitive dans le langage des graphes bipartis : elle correspond au cas où l'ensemble des *arêtes* est d'un seul tenant. En termes de tableaux T, la connexité consiste en ce que deux cases unitaires quelconques du tableau peuvent être jointes par une chaîne de cases unitaires telles que deux cases consécutives de la chaîne soient dans une même rangée (qui sera bien entendu alternativement ligne et colonne). Nous nous intéresserons à la fois au nombre $j(m, n)$ de tableaux connexes au sens ci-dessus et au nombre $k(m, n)$ de tableaux connexes assujettis en outre à avoir au moins une case unitaire dans chaque rangée. Nous commencerons par le calcul de $k(m, n)$, qui est le plus intéressant, sans cependant donner ici les démonstrations complètes de certaines étapes intermédiaires.

Nous utiliserons notamment :

a) La définition et les propriétés élémentaires des *suites de Young* (cf. [1]) : une suite de Young $X = (x_1 \, x_2 \ldots)$ est une suite illimitée non-croissante d'entiers non-négatifs dont seuls un nombre fini sont non-nuls. Si la suite comporte h entiers non-nuls et que la somme de ceux-ci soit m, on écrira que $X \in [m, h]$ (on dit parfois que X est un *h-partage* de l'entier positif m). Si la suite X comprend s_p termes égaux à p ($p = 1, 2, \ldots$), on posera :

$$\mu(X) = \frac{m\,!}{(1\,!)^{s_1}\, s_1\,!\, (2\,!)^{s_2}\, s_2\,! \ldots}$$

$\mu(X)$ est le nombre de partitions (ou relations d'équivalence) « *de type X* » que l'on peut définir sur un ensemble de m éléments.

b) la notion de *permanent* d'ordre h (cf. [2]) : si $\gamma(x, y)$ est un tableau de nombres à deux indices, avec $1 \leq x \leq h$ et $1 \leq y \leq h$, et si $J = (j_1 \, j_2 \ldots j_h)$ est une permutation arbitraire de $(1 \; 2 \ldots h)$, on appelle permanent la somme ci-dessous de $h\,!$ produits :

$$\operatorname{per} \gamma(x, y) = \sum_{J} \gamma(1, j_1)\, \gamma(2, j_2) \ldots \gamma(h, j_h).$$

c) un *théorème d'inversion* (cf. [3]), que nous énonçons ci-après sans démonstration : si $X = (x_1 \, x_2 \ldots x_i \ldots)$ et $Y = (y_1 \, y_2 \ldots y_j \ldots)$ sont deux suites de Young telles que $X \in [m, h]$ et $Y \in [n, h]$, on fait correspondre à toute fonction numérique de deux arguments entiers positifs, $\gamma(x, y)$, la fonction numérique :

$$\gamma(X, Y) = \operatorname{per} \gamma(x_i, y_j),$$

le permanent étant d'ordre h. Dans ces conditions le théorème énonce l'*équivalence des deux affirmations* (5) *et* (6) ci-dessous :

$$\beta(m, n) = \sum_{h} \sum_{\substack{X \in [m,h] \\ Y \in [n,h]}} \mu(X)\, \mu(Y)\, \alpha\, X, Y) \qquad \begin{array}{l} \forall\, m > 0 \\ \forall\, n > 0 \end{array} \tag{5}$$

$$\alpha\,(m, n) = \sum_{h} \sum_{\substack{X \in [m,h] \\ Y \in [n,h]}} (-1)_{h-1}\, \mu(X)\, \mu(Y)\, \beta(X, Y) \qquad \begin{array}{l} \forall\, m > 0 \\ \forall\, n > 0 \end{array} \tag{6}$$

Pour utiliser ces résultats en vue du calcul de $k(m, n)$, nous remarquerons que si dans (5) on remplace $\alpha(x, y)$ par $k(x, y)$, et par conséquent $\alpha(X, Y)$ par $k(X, Y)$, le $\beta(m, n)$ fourni par le premier membre de (5) se trouve être égal à ce que nous avons appelé plus haut $c(m, n)$, nombre de tableaux sans aucune rangée nulle. En effet, tout tableau sans rangée nulle peut être examiné du point de vue de la connexité ; s'il n'est pas connexe il définit des partitions des deux ensembles M et N (lignes et colonnes) en un même nombre h de « *composantes connexes* », et X et Y sont les *types* respectifs de ces partitions.

Une fois fixés les types X et Y, il y a $\mu(X)\ \mu(Y)$ manières de définir un couple de partitions de M et N suivant ces types, et pour chaque couple de partitions il y a $h\,!$ manières d'accoupler les parties correspondantes ; chacune de ces $h\,!$ manières donne évidemment, pour les h composantes connexes, un nombre de possibilités qui sera l'un des $h\,!$ produits dont la somme constitue le permanent $k(X, Y)$. En sommant tout cela pour $X \in [m, h]$ et $Y \in [n, h]$, puis en faisant varier h de 1 au plus petit des deux entiers m et n, on dénombre bien la totalité des $c(m, n)$ tableaux sans rangée nulle.

On a alors, en vertu du théorème d'inversion :

$$k(m, n) = \sum_{h} \sum_{\substack{X \in [m,h] \\ Y \in [n,h]}} (-1)_{h-1}\ \mu(X)\ \mu(Y)\ c(X, Y),$$

expression que l'on peut mettre sous une forme particulièrement maniable en se servant de l'expression spectrale de $c(x, y)$ précédemment établie :

$$c(x, y) = (2^x - 1)^y - C_x^1\,(2^{x-1} - 1)^y + \ldots + (-1)^x\, C_x^x\,(2^0 - 1)^y.$$

Nous ne donnons pas ici le calcul complet de $k(m, n)$, qui s'appuie sur des changements adéquats d'ordre de sommation et sur des groupements de termes qui donnent des sommes partielles nulles. Nous donnons seulement le résultat assez remarquable relatif à $k(m, n)$ sous sa *forme spectrale :* si, pour une suite de Young, $Z = (z_1\, z_2 \ldots)$, on pose $\omega(Z) = (2^{z_1} - 1) + (2^{z_2} - 1) + \ldots$, le spectre de $k(m, n)$ est formé de tous les $\omega(Z)$ des suites de Young Z telles que $z_1 + z_2 + \ldots = m$, et les coefficients correspondants sont égaux à $(-1)_{h_Z - 1}\ \mu(Z)$ (où h_Z désigne le nombre de termes non nuls de Z).

Exemple : pour $m = 4$, il y a cinq suites de Young, dont le tableau ci-dessous donne la liste avec les valeurs correspondantes du spectre et le calcul des coefficients :

$Z =$	(4)	(31)	(22)	(211)	(1111)
$\omega(Z) =$	15	8	6	5	4
$h_Z =$	1	2	2	3	4
$(-1)_{h_Z-1} =$	1	-1	-1	2	-6
$\mu(Z) =$	1	4	3	6	1
Coefficient $=$	1	-4	-3	12	-6

On a ainsi :

$$k(4, n) = \overline{15}^n - 4 \times 8^n - 3 \times 6^n + 12 \times 5^n - 6 \times 4^n.$$

Le tableau numérique des $k(m, n)$ est donné ci-dessous :

$k(m, n)$	$n = 1$	2	3	4	5	6	7	8
$m = 1$	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	5	19	65	211	665	2059	
3	1	19	205	1 795	14 221	106 819		
4	1	65	1 795	36 317	636 331			
5	1	211	14 221	636 331				
6	1	665	106 819					
7	1	2 059						
8	1							

A partir de là il est facile de calculer $j(m, n)$, nombre de tableaux connexes dans lesquels on n'impose plus l'absence de rangées nulles : il est clair, en effet, que :

$$j(m, n) = \sum_{\substack{\alpha \geqslant 1 \\ \beta \geqslant 1}} C_m^\alpha C_n^\beta k(\alpha, \beta),$$

mode de calcul qui suppose la convention de ne pas compter comme connexe un tableau entièrement rempli de zéros (relation « vide »). On trouve ainsi le tableau numérique :

$j(m, n)$	$n = 1$	2	3	4	5	6	7	8
$m = 1$	1	3	7	15	31	63	127	255
2	3	13	51	205	843	3 493	14 451	
3	7	51	397	3 303	27 877	233 751		
4	15	205	3 303	55 933	943 095			
5	31	843	27 877	943 095				
6	63	3 493	233 751					
7	127	14 451						
8	255							

BIBLIOGRAPHIE

[1] KREWERAS G. — « Sur une classe de problèmes de dénombrement liés au treillis des partitions des entiers », *Cahiers du B.U.R.O.*, n° 6 (1965), Paris.

[2] MARCUS M. et MINC H. — «Permanents », *Amer. Math. Monthly*, 72 (1965), pp. 577-591.

[3] KREWERAS G. — « Inversion des polynômes de Bell bidimensionnels », *C.R. Ac. Sc.*, Paris, t. 268, série A (1969), pp. 577-579.