MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

G. TH. GUILBAUD

Objets simpliciaux

Mathématiques et sciences humaines, tome 26 (1969), p. 17-31

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1969__26__17_0>

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (http://msh.revues.org/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

M.S.H. (7e année, n° 26, 1969, p. 17-31)

OBJETS SIMPLICIAUX

par

G. Th. GUILBAUD

(1). — LE PREMIER MODÈLE.
(Complexe simple ou simplexe.)

(11) Esquisse d'une description algorithmique.

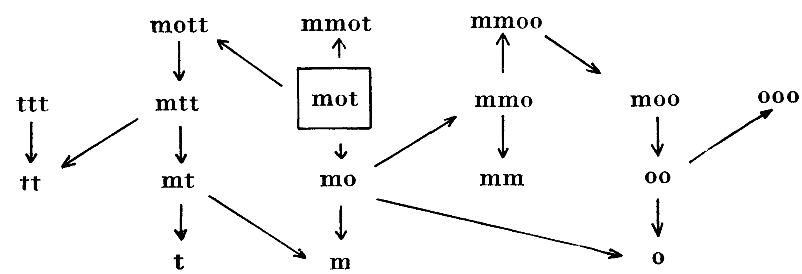
(111) Un alphabet. Des *mots*. Des *opérations* élémentaires sur les mots :

— recopier sans changement (orthographie),
— recopier en doublant une lettre (dittographie),
— recopier en omettant une lettre (haplographie).

On compose ces opérations de toutes les façons possibles en partant d'un mot *source*.

(112) *Exemple :* « mot » →« mmot » →« mmo » →« mmoo » → , etc.

Diagrammes plus lisibles quand on situe les mots produits à différents *niveaux* selon leurs longueurs :



Exercice : dessiner, ci-dessus, toutes les flèches possibles.

(113) Le dessin ci-dessus ne figure qu'un fragment de ce qu'on peut obtenir, par les opérations élémentaires, à partir du mot source « mot ». C'est la totalité de ce qui peut être engendré de cette façon qu'on désignera par la notation :

$$\Delta\,[\text{mot}]$$

et qu'on nommera *simplexe*.

Le delta (Δ) évoquera le triangle, archétype du simplexe. Si l'on se bornait aux opérations simplifiantes d (flèches descendantes), on aurait le diagramme classique :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathrm{mot} \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathrm{mo} \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \mathrm{mt} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \mathrm{ot} \arrow[d, dash] \arrow[dl, dash] \\
\mathrm{m} \arrow[dr, dash] & \mathrm{o} \arrow[d, dash] & \mathrm{t} \arrow[dl, dash] \\
 & {} &
\end{tikzcd}$$

(12) *Organisation du simplexe.*

Remarque préliminaire : si toutes les lettres du mot source sont distinctes, la structure ne dépend que de la longueur du mot ; d'où la notation abrégée : Δ (3), Δ (4), etc. et : Δ (m), pour le cardinal m.

(121) D'abord un ensemble de mots, que l'on partitionne en :

Δ^1 ensemble des mots d'une lettre,
Δ^2 ensemble des mots de deux lettres,

et ainsi de suite : Δ^n. On y ajoutera Δ^0 ensemble qui ne comprend qu'un seul élément : le mot vide.

(122) Trois classes d'applications :

$\Delta^n \to \Delta^{n-1}$, notées d^n et nommées *faces*,
$\Delta^n \to \Delta^{n+1}$, notées s^n et nommées *dégénérescences*,
$\Delta^n \to \Delta^n$, notée o^n et nommée *identité*.

(123) Schéma.

$$\begin{array}{lccccccc}
\text{Flèches d :} & \Delta^0 \longleftarrow & \Delta^1 & \leftleftarrows & \Delta^2 & \overset{\longleftarrow}{\underset{\longleftarrow}{\longleftarrow}} & \Delta^3 \ldots \\
\text{Flèches o :} & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\
\text{Flèches s :} & & \Delta^1 & \longrightarrow & \Delta^2 & \rightrightarrows & \Delta^3 \ldots
\end{array}$$

Indexation complète :

d_j^n = supprimer la j-ème lettre d'un mot de n lettres,
s_j^n = redoubler la j-ème lettre d'un mot de n lettres,
o^n = recopier un mot de n lettres.

(éventuellement : indexations abrégées : d_j, s_j, d^n, s^n, o^n, d, s, o).

(124) Composition : elle est *associative.*

Une opération d^n peut être suivie d'une o^{n-1}, d'une d^{n-1} ou d'une s^{n-1} ; une s^n de : o^{n+1}, d^{n+1}, s^{n+1} ; une o^n de : o^n, d^n, s^n.

(125) Cinq espèces de relations fondamentales, vraies quelle que soit la longueur du mot source, et dont on déduira toutes les autres.

(1251) Les o sont neutres, d'où la première espèce d'équations telles que :

$$\mathrm{od} = \mathrm{d} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{do} = \mathrm{o} \qquad \text{etc.}$$

(1252) Seconde espèce de forme : sd = o, lorsqu'on redouble une lettre pour la supprimer ensuite.

Exemples : $\mathrm{s}_1^n\ \mathrm{d}_1^{n+1} = \mathrm{o}^n$, $\quad \mathrm{s}_1\ \mathrm{d}_2 = \mathrm{o}$, $\quad \mathrm{s}_1\ \mathrm{d}_1 = \mathrm{o}$.

(1253) Un composé de la forme $d^n\, d^{n-1}$ peut s'écrire de deux façons selon l'ordre dans lequel on supprime les deux lettres.

Exemples : $d_5\, d_3 = d_3\, d_4$ $\qquad d_j\, d_i = d_i\, d_{j-1}$ $\qquad$ (si $i < j$).

(1254) Quatrième espèce, analogue à la précédente : s s = s s.

(1255) Cinquième espèce : sd = ds, lorsque la lettre redoublée est différente de la lettre supprimée, on peut choisir l'ordre des deux opérations, puisqu'il n'y a pas d'interférence.

Exemple : $s_1\, d_3 = d_4\, s_1$.

(1256) Voir plus loin, en (313), le tableau complet des relations.

(126) *Remarque.* — Dans les écritures ds, dd, sd, etc., on convient que l'opération écrite à gauche est effectuée avant l'autre (il arrive qu'on fasse la convention contraire).

(127) *Forme canonique d'une opération composée.*

Tout programme d'élisions et répétitions peut s'écrire avec d, o et s, de plusieurs manières. Mais on peut convenir de commencer d'écrire d'abord toutes les d et ensuite toutes les s (ou bien le contraire). On peut aussi décider que les d seront rangées selon les indices inférieurs décroissants (ou bien croissants, si l'on préfère) et de même pour la succession des s.

Exemple :

$$\begin{aligned} d_3\, d_4\, d_7\, s_1\, s_5\, s_6\, s_8 &= d_9\, d_5\, d_3\, s_5\, s_4\, s_4\, s_1 \\ &= s_1\, s_7\, s_8\, s_{10}\, d_{13}\, d_6\, d_4 \\ &= s_7\, s_6\, s_6\, s_1\, d_4\, d_5\, d_{11} \end{aligned}$$

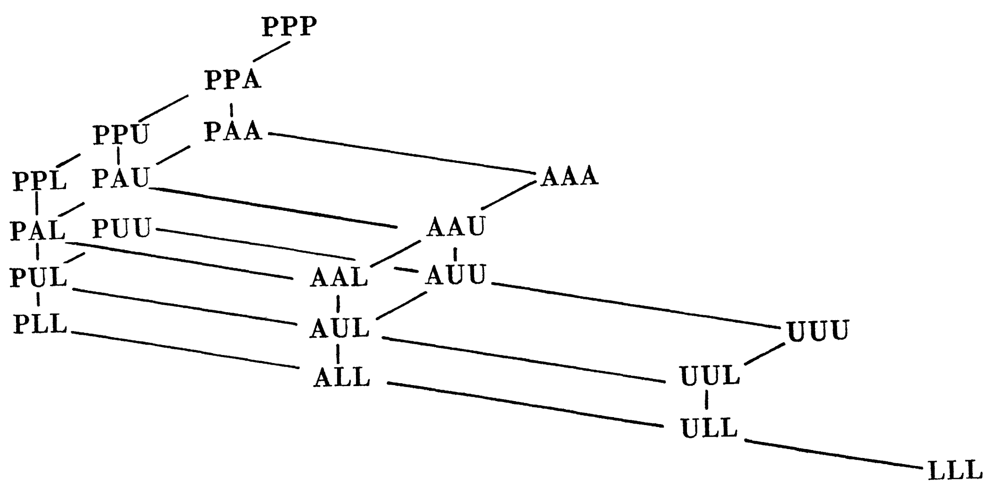
(opération qui transforme le mot « boulanger » en « bbolnnngge »).

(13) *Combinatoire traditionnelle.*

Étudier en détail la structure simpliciale Δ, selon le mot d'ordre célèbre : « énumérer, dénombrer, organiser », conduira à retrouver le rudiment classique : combinaisons de lettres, triangle arithmétique de Pascal, et le reste. Indiquons seulement ici quelques exercices.

(131) Les ensembles Δ^n peuvent être dotés d'un ordre partiel induit par l'ordre des lettres dans le mot source.

Exemple : le mot source étant PAUL, voici le dessin de Δ^3 (PAUL) et de son ordre partiel « naturel ».



Remarque. — Si l'on désigne par E l'ensemble des quatre lettres du mot « PAUL », le schéma ci-dessus est une partie du produit cartésien $E \times E \times E$ ou E^3 (tétraèdre, sizième du cube).

Le nombre des mots : card. $\Delta^n(m)$ se lit dans le triangle Pascalien (en langage d'autrefois : c'est le nombre des combinaisons complètes ou avec répétitions). Sur le dessin on voit d'ailleurs apparaître le nombre figuré (que Pascal nomme pyramidal) somme de triangulaires :

$$10 + 6 + 3 + 1 = 20.$$

Autre formule :

$$\text{card. } \Delta^3 (4) = \frac{4.5.6}{3.2.1} = 20.$$

En général :

$$\text{card. } \Delta^n(m) = \frac{m(m+1)(m+2)\ldots}{n(n-1)(n-2)\ldots}$$

(autant de facteurs entiers consécutifs en haut qu'en bas).

On pourra s'exercer à dessiner Δ^4 (PAUL) qui comporte :

$$\frac{4.5.6.7}{1.2.3.4} = 35 \text{ éléments.}$$

(132) Soit maintenant à énumérer, dénombrer et organiser l'ensemble des applications $\Delta^4 \to \Delta^3$; non seulement les quatre simplifications notées d_1^4, d_2^4, d_3^4, d_4^4, mais aussi toutes les applications obtenues en composant de toutes les façons possibles les d et les s. On peut utiliser ce qui a été dit en (127), en choisissant l'une des formes canoniques. Les formes possibles pour une application : $\Delta^4 \to \Delta^3$, sont :

$$d^4, \qquad d^4\, d^3\, s^2, \qquad d^4\, d^3\, d^2\, s^1\, s^2;$$

reste à choisir les indices inférieurs (décroissants pour d, croissants pour s).

C'est un exercice facile que de vérifier qu'il y a vingt possibilités. Mais il est plus simple encore de remarquer que l'organisation de l'ensemble de mots Δ^3 (4) peut aussi bien servir pour l'ensemble des applications $\Delta^4 \to \Delta^3$.

Soit en effet une application, $f : \Delta^4 \to \Delta^3$.

On peut la désigner par l'effet qu'elle a sur un élément de Δ^4, pourvu qu'on prenne la précaution de choisir un mot dont toutes les lettres sont distinctes.

C'est-à-dire qu'on donnera f (PAUL) lequel doit être un mot de trois lettres à choisir dans Δ^3 (PAUL).

La correspondance entre Δ^3 (4) et $\Delta^4 \to \Delta^3$ ainsi définie est visiblement bijective.

(133) Autre rapprochement utile : un mot peut être identifié à une application d'un ensemble totalement ordonné dans un alphabet. Mot de m lettres : application de $(1 < 2 < 3 < \ldots < m)$ dans un alphabet.

On est alors conduit à étudier les applications monotones (croissantes au sens large) de $(1 < 2 < \ldots < m)$ dans $(1 < 2 < \ldots < n)$, lesquelles correspondent aux applications $\Delta^n \to \Delta^m$ (noter le renversement de la flèche).

(2). — QUELQUES AUTRES MODÈLES.

(21) Prenons un monoïde et, pour ne pas compliquer les choses, le plus simple de tous : le monoïde des entiers naturels, la table d'addition des écoliers ; en voici un petit morceau :

$$3 + 4 \to 7.$$

Pour montrer l'associativité, caractère ici fondamental, on expliquera que : $1 + 2 + 4$, peut « donner » soit : $3 + 4$, soit $1 + 6$ et que finalement le résultat est le même. On peut le faire avec un dessin :

$$\begin{tikzcd}
& 1+2+4 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
3+4 \arrow[dr] & & 1+6 \arrow[dl] \\
& 7 &
\end{tikzcd}$$

On peut généraliser ; voici le cas d'une somme de quatre termes :

$$\begin{tikzcd}
& 1+2+4+5 \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
3+4+5 \arrow[d] \arrow[dr] & 1+6+5 \arrow[dl] \arrow[dr] & 1+2+9 \arrow[dl] \arrow[d] \\
7+5 \arrow[dr] & 3+9 \arrow[d] & 1+11 \arrow[dl] \\
& 12 &
\end{tikzcd}$$

On retrouve le diagramme simplicial bien connu.

(22) Soit M un monoïde. L'opération sera notée + comme chez les entiers (mais on ne la suppose pas commutative, seule l'associativité importe).

Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$ une liste d'éléments de M : chaque x_i appartient à M, donc x appartient au produit cartésien M^n.

Introduisons des applications $d_i : M^n \to M^{n-1}$ qui transforment (x) en (y) par :

$$y_1 = x_1,\ y_2 = x_2,\ \dots,\ y_i = x_i + x_{i+1},\ y_{i+1} = x_{i+2},\ \dots$$

Il est facile de donner la règle de composition de deux opérations (d) :

(221) *Premier cas.*

Deux additions de termes voisins, mais les deux opérations sont assez éloignées pour ne pas interférer.

Cette transformation peut être réalisée de deux façons différentes, car l'ordre dans lequel on effectue les deux additions est évidemment indifférent.

Soit donc :

$$(\dots x_i \dots x_j \dots) \quad \text{devient} \quad (\dots x_i + x_{i+1} \dots x_j + x_{j+1} \dots),$$

ce qui peut être obtenu, soit par :

d'abord d_i, puis d_{j-1}

ou bien :

d'abord d_j, puis d_i.

(222) *Deuxième cas.*

$$(\ldots x_i\, x_{i+1}\, x_{i+2} \ldots) \quad \text{devient} \quad (\ldots x_i + x_{i+1} + x_{i+2} \ldots),$$

ce qui peut être décomposé en d_i suivi de d_i ou bien d_{i+1} suivi de d_i.

On retrouve bien les règles déjà rencontrées en (1253) ci-dessus, et l'on aperçoit la relation entre ces règles et la loi d'associativité.

(223) Lorsque le monoïde dans lequel on travaille est un groupe, on peut utiliser une procédure, bien connue des statisticiens et des probabilistes, qui consiste à remplacer la donnée d'une liste $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ par celle de la liste « cumulée » $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ définie par :

$$X_1 = x_1,\ X_2 = x_1 + x_2,\ X_3 = x_1 + x_2 + x_3, \text{ etc.}$$

et aussi :

$$x_1 = X_1,\ x_2 = X_2 + \overline{X}_1,\ x_3 = X_3 + \overline{X}_2, \text{ etc.}$$

($\overline{X}$ est l'opposé de X : $X + \overline{X} =$ zéro).

On a donc une bijection entre les x et les X.

L'opération d_i transforme x en y :

$$y_h = x_h \quad \text{si} \quad h < i,\ y_i = x_i + x_{i+1},\ y_j = x_{j+1} \quad \text{si} \quad i < j,$$

il en résulte une transformation de X en Y :

$$Y_h = X_h,\ Y_i = X_{i+1},\ Y_j = X_{j+1}.$$

C'est-à-dire finalement :

$$(\ldots, X_{i-1}, X_i, X_{i+1}, \ldots) \to (\ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots)$$

l'opération d_i dans l'espace des X n'est autre que la suppression d'une coordonnée (projection), tout comme dans le premier modèle. Ceci donne l'idée de définir les opérations s_i d'abord sur les cumulées X : $(X_1 \ldots X_n) \to (\ldots, X_{i-1}, X_i, X_i, X_{i+1} \ldots)$ par répétition de X_i.

Et en déduire la définition de s_i pour les x :

$$s_i : (x_1, \ldots, x_n) \to (x_1, \ldots, x_i, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

en désignant par 0 l'élément neutre du groupe.

(23) Revenons au monoïde. Les opérations $d : M^n \to M^{n-1}$ ayant été définies, il reste à définir les s. On veut d'abord (voir 1252 ci-dessus) que $s_i d_i$ soit la transformation identique ainsi que $s_{i-1} d_i$.

Ce qui a été fait (223) suggère une solution : l'opération s_i consiste à intercaler un élément neutre; (on rappelle la coutume : tout monoïde doit posséder un neutre). On vérifiera alors sans peine toutes les relations (125).

Exemple : avec les entiers naturels :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
3+0+0+4 \arrow[dr, dash] & & 1+2+0+4 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & 1+0+2+4 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & 1+0+0+4 \arrow[dl, dash] \\
& 3+0+4 \arrow[dr, dash] & & 1+2+4 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & 1+0+6 \arrow[dl, dash] & \\
& & 3+4 \arrow[dr, dash] & & 1+6 \arrow[dl, dash] & & \\
& & & 7 & & &
\end{tikzcd}$$

qui a la même forme que le simplexe :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
aaa \arrow[dr, dash] & & aab \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & abb \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & bbb \arrow[dl, dash] \\
& aa \arrow[dr, dash] & & ab \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & bb \arrow[dl, dash] & \\
& & a \arrow[dr, dash] & & b \arrow[dl, dash] & & \\
& & & {} & & &
\end{tikzcd}$$

(24) Mais il n'est même pas nécessaire d'exiger un monoïde; ce qui joue un rôle dans la construction précédente c'est seulement : 1) l'associativité, 2) l'existence de neutres.

On peut donc tout simplement partir d'une *catégorie*, c'est-à-dire d'une structure algébrique associative, mais où la composition n'est pas partout définie.

Contentons-nous, pour l'instant, des images intuitives habituelles, et de leurs représentations *graphiques*.

Trois flèches, ou trois trajets, bout à bout :

$$\xrightarrow{\quad a \quad} \quad \xrightarrow{\quad b \quad} \quad \xrightarrow{\quad c \quad}$$

On peut composer a et b, ainsi que b et c, posons :

$$ab = p, \ bc = q,$$

puis de même :

$$abc = pc = aq = t;$$

quant aux neutres intercalaires, ce seront les trajets « nuls », ici figurés par des « stations » intermédiaires :

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, dash, "a"] & g \arrow[r, dash, "b"] & h \arrow[r, dash, "c"] & {}
\end{tikzcd}$$

et l'on posera :

$$\begin{array}{llll} ag = a & gb = b & bh = b & hc = c. \\ & gq = q & ph = p. & \end{array}$$

Finalement tout l'attirail algébrique pourra être décrit par des opérations (d) et (s) effectuées sur des « mots » et que l'on peut rassembler sur un diagramme, toujours le même :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
phhc \arrow[dr, dash] & & abhc \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & agbc \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & aggq \arrow[dl, dash] \\
& phc \arrow[dr, dash] & & abc \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & agq \arrow[dl, dash] & \\
& & pc \arrow[dr, dash] & & aq \arrow[dl, dash] & & \\
& & & t & & &
\end{tikzcd}$$

(241) On peut s'étonner de n'avoir introduit que des neutres intermédiaires, et d'avoir négligé les extrémités :

$$f \xrightarrow{\quad a \quad} g \xrightarrow{\quad b \quad} h \xrightarrow{\quad c \quad} i$$

Rien n'empêche, il est vrai, de définir pour le mot « abc » non plus deux, mais quatre opérations s qui seraient respectivement :

$$\text{abc} \longrightarrow \text{fabc, agbc, abhc, abci.}$$

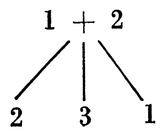
Mais alors si l'on veut conserver scrupuleusement la forme simpliciale, il va falloir définir aussi quatre opérations simplifiantes de la classe d. Et bien entendu, conserver cependant toutes les propriétés formelles.

C'est facile. On vérifiera, à titre d'exercice que voici, une bonne solution :

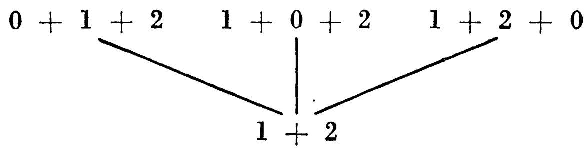
$$d_1(\text{abc}) = \text{bc},\ d_2(\text{abc}) = \text{pc},\ d_3(\text{abc}) = \text{aq},\ d_4(\text{abc}) = \text{ab};$$

en langage clair : les opérations d_i consistent à composer deux lettres voisines du mot proposé, sauf aux deux bouts où elles consistent à supprimer respectivement la première et la dernière lettre.

Voici ce que donne cette variante sur notre vieux modèle de l'addition des entiers ; les trois opérations d^3 sont :



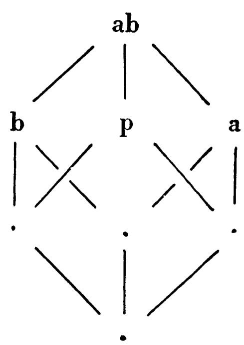
et les trois s^3 :



schémas qui correspondent, dans le cas général d'une catégorie quelconque, à :

$$d_1^3(\text{ab}) = \text{b} \qquad d_2^3(\text{ab}) = \text{p} \qquad d_3^3(\text{ab}) = \text{a}.$$

Mais alors un autre petit inconvénient surgit : comment définir les d^2, soient : d_1^2 et d_2^2, qui doivent opérer sur des mots d'une seule lettre. Première attitude, résignée : admettre de tels schémas simpliciaux « tronqués » par le bas. Ce n'est pas défendu. Mais on peut faire mieux : il suffit de donner des noms aux éléments innommés du schéma ci-dessous. Et l'on ne sera pas en peine de leur trouver une interprétation intuitive. (Cela donnera une occasion de réfléchir à ces complexes populaires que sont les « graphes ».)



Sur notre dessin, on lit :

$$d_2(\text{b}) = d_1(\text{a}).$$

C'est dire que l'arrivée (d_1) de a est identique au départ (d_2) de b. Et de même : arrivée de b = arrivée de p, $d_1\text{b} = d_1\text{p}$.

Mais alors que dire de f, g, h : ce sont des trajets *nuls* et non pas des points. Or notre algèbre formelle rejoint ici l'intuition et le langage spatial spontané ; en effet, c'est un exercice facile, on vérifiera qu'on doit écrire (en vertu des équations (125) :

$$s_1(d_1(a)) = g$$
$$s_1(d_2(a)) = f.$$

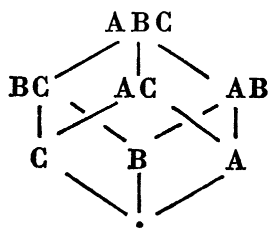
L'opération fait donc monter l'objet « point » (arrivée ou départ) au niveau « trajet », mais c'est un trajet nul.

Pour conformer les notations aux coutumes de la géométrie classique (laquelle emploie depuis longtemps les écritures simpliciales), on redessinera la figure ainsi :

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \quad \text{ou :} \quad \underline{A \quad\quad B \quad\quad C}$$

et l'on posera : f : = AA a : = AB, g : = BB et ainsi de suite.

Et notre dessin devient :



bon vieux simplexe !

Exercice : qu'est-ce qui joue le rôle des « points » dans l'addition des entiers, puisque les nombres entiers sont considérés comme des « trajets » ?

(3). — CATÉGORIE SIMPLICIALE.
(Complexe abstrait.)

En présence de modèles dont l'isomorphie est visible, il devient naturel, pour dégager la structure, d'adopter un point de vue formel, poser une description abstraite de ce qui est commun à tous les simplexes ; on ne se souciera plus de savoir ce que représentent les lettres d, o, s ; on ne dit plus « ce que c'est », mais seulement « comment ça fonctionne ».

(31) Grammaire formelle.

(311) Les constituants sont :

les o :	o^0	o^1	o^2	o^3	...	o^n	...
les d :		d_1^1	d_1^2	d_1^3	...	d_1^n	...
			d_2^2	d_2^3	...	d_2^n	...
				d_3^3	...	d_3^n	...
					...	...	...
						d_n^n	...
les s :		s_1^1	s_1^2	s_1^3	...	s_1^n	...
			s_2^2	s_2^3	...	s_2^n	...
				s_3^3	...	s_3^n	...
					...	...	...
						s_n^n	...

(312) Règles de *composition associative :*

$$\begin{array}{llllll} \text{tout } d^n \text{ peut être suivi de :} & o^{n-1} & \text{ou} & d^{n-1} & \text{ou} & s^{n-1} \\ \text{tout } s^n \text{ peut être suivi de :} & o^{n+1} & \text{ou} & d^{n+1} & \text{ou} & s^{n+1} \\ \text{tout } o^n \text{ peut être suivi de :} & o^n & \text{ou} & d^n & \text{ou} & s^n. \end{array}$$

(313) Règles de *transformation :*

$$\begin{array}{llll}
1) & o^n\, d^n_i = d^n_i, & o^n\, s^n_i = s^n_i, & o^n\, o^n = o^n \\
 & d^n_i\, o^{n-1} = d^n_i, & s^n_i\, o^{n+1} = s^n_i & \\
2) & s^n_i\, d^{n+1}_i = o^n, & s^n_i\, d^{n+1}_{i+1} = o^n & \\
3) & d^n_i\, d^{n-1}_j = d^n_j\, d^{n-1}_{i-1} & \text{si } i > j & \\
4) & s^n_j\, s^{n+1}_i = s^n_{i-1}\, s^{n+1}_j & \text{si } i > j & \\
5) & s^n_i\, d^{n+1}_j = d^n_j\, s^{n-1}_{i-1} & \text{si } i > j & \\
 & d^n_i\, s^{n-1}_j = s^n_j\, d^{n+1}_{i+1} & \text{si } i > j &
\end{array}$$

(avec les règles d'usage du signe =, à savoir transitivité et substituabilité).

La structure ainsi formée est une *catégorie* (abstraite). On pourrait dire : *catégorie simpliciale*, mais on dit plus communément « complexes ».

(4). — ENSEMBLES SIMPLICIAUX.
(Ou complexes ensemblistes).

(41) La catégorie qu'on vient de décrire (les d, o, s et leur grammaire) peut être « réalisée », ou « représentée » : en mettant à la place des d, o, s des objets mathématiques déterminés (eux-mêmes pourvus d'une structure interne. Par exemple des applications ensemblistes comme c'est le cas pour les modèles présentés ci-dessus (1 et 2). On dit dans ces cas qu'on a un *ensemble* simplicial (on peut considérer cette expression comme abrégée de : modèle ensembliste de catégorie simpliciale) ou encore *complexe* ensembliste.

Un tel modèle est constitué par : 1) des ensembles K^0, K^1, K^2, ..., K^n, ... et 2) des applications :

$$\begin{array}{llll}
d: K^0 \longleftarrow & K^1 & \overleftarrow{\overleftarrow{\quad\quad}} & K^2 \ldots \\
o: & \updownarrow & & \updownarrow \qquad \text{etc.} \\
s: & K^1 & \longrightarrow & K^2 \ldots
\end{array}$$

avec les cinq espèces de relations énumérées ci-dessus en (125) et en (313).

(42) Voici un autre exemple d'ensemble simplicial.

Choisissons un ensemble quelconque A, et construisons les produits $A \times A$, $A \times A \times A$, etc. qu'on notera, comme de coutume A^2, A^3, etc.

Il existe, comme on sait, deux applications surjectives :

$$A \times A \longrightarrow A$$

nommées *projections*, qui seront d_1 et d_2.

Pour l'application $S_1 : A \longrightarrow A \times A$, on choisira l'application *diagonale* qui à l'élément a de A, fait correspondre l'élément diagonal (a, a) de A^2.

On continue aisément : définir trois projections d_1, d_2, d_3 de $A \times A \times A$ sur $A \times A$. Et deux injections, qu'on peut encore nommer diagonales de A^2 en A^3, celles qui à (a, b) élément de A^2 font correspondre (a, a, b) et (a, b, b) éléments de A^3. Et ainsi de suite.

Il est facile de voir que les d et s définis de cette manière obéissent aux conditions exigées.

Revoir maintenant, ci-dessus en (131), le complexe Δ^3 [PAUL] comme partie du cube : $\{ P, A, U, L \}^3$.

(43) *Complexes et simplexes* (l'opération Chapeau).

Une réalisation ensembliste K, qu'on désignera souvent par le nom de Complexe (sans épithète, pour abréger), est constituée par des ensembles K^n et par des applications.

$$d : K^n \longrightarrow K^{n-1} \quad \text{et des applications} \quad s : K^n \longrightarrow K^{n+1}$$

satisfaisant aux conditions susdites (cinq espèces d'équations).

Dans le cas d'un simplexe (premier modèle), les éléments des ensembles sont engendrés à partir d'un mot source unique.

Dans le cas général, choisissons un élément quelconque : $p \in K^m$.

Associons-lui un mot de *m* lettres toutes distinctes, soit M. (Nomenclature simpliciale, ancienne tradition de la géométrie classique, on disait : « soit le triangle ABC ».)

On va construire alors une application :

$$Ch : \Delta\,[M] \longrightarrow K$$

d'un complexe-type Δ ou simplexe, dans le complexe quelconque K.

Ce sera un morphisme de la structure simpliciale.

Pour cela on posera d'abord : $Ch\,(M) = p$,

puis : $Ch\,(d_i M) = d_i p$, $Ch\,(s_j M) = s_j p$

et ainsi de suite.

On obtient ainsi une « nomenclature simpliciale » pour une partie de K, à savoir l'image de Δ par l'application notée Ch.

Ainsi dans tout complexe K et pour tout élément p, on peut construire une image de Δ : c'est le simplexe *singulier* attaché à p, qu'on notera $\hat{p}$ (chapeau). A vrai dire, ce n'est pas à proprement parler l'image toute seule (partie de K), qui importe, mais cette image *munie* des étiquettes que sont les mots de Δ (). On définira donc plutôt le « simplexe singulier » comme l'*application* elle-même, ci-dessus provisoirement notée Ch. On écrira en définitive :

$$\hat{p} : \Delta\,[M] \longrightarrow K$$

$$\hat{p}(p) = M.$$

Cela explique qu'on puisse dénommer « simplexes » les éléments (au sens ensembliste) d'un complexe K, par un abus de langage tout à fait classique et commode. On pourra ainsi se représenter un complexe comme une architecture dont les matériaux sont des simplexes (certains auteurs emploient le tilde au lieu du chapeau).

(5). — PRODUIT DE SIMPLEXES.

On va montrer que tout produit cartésien de simplexes peut être organisé comme un complexe ; ce qui fournira un premier procédé pour fabriquer des complexes.

(51) Anticipant sur ce qui sera nommé plus tard réalisation géométrique (affine) d'un complexe, signalons que la géométrie élémentaire utilise, depuis des siècles, et sans le dire, les structures simpliciales présentes dans les architectures affines les plus communes : points, segments de droite, triangles, etc.

Par exemple, quand je dis : « le segment AB », je vise, entre autres, la relation des points A et B avec le dit segment :

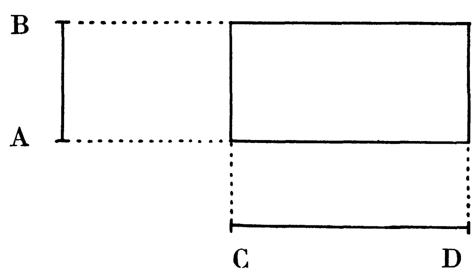
$$\begin{tikzcd} & AB \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

Et, comme on l'a déjà signalé (241, in fine), on peut avoir besoin des « segments nuls » : AA et BB.

Ainsi à tout segment, on attachera un simplexe du type Δ (2).

Considérons maintenant le produit cartésien de deux segments : si l'on adopte la définition ensembliste, ce sera l'ensemble des couples de points. On dit, tout naturellement, que le carré cartésien du segment : $(0 \leqq x \leqq 1)$ est un carré. (En fait, ce sera le plus souvent un parallélogramme, puisqu'on travaille en géométrie affine, laquelle ignore l'angle droit.)

Ci-dessous, l'image traditionnelle (cartésienne, dit-on), du produit de deux segments.



Mais l'architecture combinatoire du parallélogramme (ou : carré) n'est pas simpliciale : quatre sommets, quatre côtés.

On va voir que ce n'est qu'une apparence.

(52) Abandonnons, pour un moment, les images géométriques, pour ne parler que des structures combinatoires. C'est-à-dire, considérons deux simplexes : Δ [A B] et Δ [C D].

Le premier est constitué, comme on a vu, par les ensembles :

K_1 : A, B
K_2 : A A A B B B
K_3 : AAA, AAB, ABB, BBB

et ainsi de suite ; avec, en plus, les applications d et s, définies comme on a vu.

Le second est pareil (isomorphe), nommons le L :

L_1 : C, D
L_2 : C C, C D, D D
L_3 : C C C, C C D, C D D, D D D etc.

La définition d'un produit de pareilles structures est évidemment :

1) Former les produits $K_i \times L_i$ pour $i = 1, 2, 3, \ldots$;
2) Définir des applications d et s.

La façon naturelle sera,

si : $x \in K_i$ et $y \in L_i$, alors : $(x, y) \in K_i \times L_i$
et : $d\,(x, y) = (d\,x, d\,y)$, $s\,(x, y) = (s\,x, s\,y)$, par définition.

Le complexe produit : M = K $\times$ L, sera donc, dans notre exemple, défini par :

M_1 : (A, C), (A, D), (B, C), (B, D)

M_2 : (AA, CC), (AA, CD), (AA, DD), (AB, CC), ..., (BB, DD)

M_3 : ..., (AAB, CCD), (AAB, CDD), ..., (ABB, DDD)

et ainsi de suite.

Et l'on vérifie sans peine que les d et les s obéissent aux règles qu'il faut :

$$d^1\,(\mathrm{AAB, CCD}) = (\mathrm{AB, CD})$$

$$d_2\,(\mathrm{AAB, CDD}) = (\mathrm{AB, CD}).$$

Le lecteur pourra ici s'essayer à dessiner le diagramme.

(53) Le simplexe K peut être dit monogène, en ce sens qu'il est « engendré » par le seul mot « AB », auquel on applique de toutes les façons possibles, les opérations d et s. Il en est de même de L.

Mais ce n'est plus tout à fait la même chose avec M = K $\times$ L.

Par exemple l'élément (AB, CD) ne suffit pas à engendrer M : par les opérations d on n'obtient que (A, C) et (B, D). Aucune succession de d et s ne permet d'atteindre, par exemple, l'élément :

(AAB, CDD).

On peut alors se poser le problème de trouver des éléments générateurs. Donnons seulement ici la réponse ; le lecteur pourra établir que si l'on part de :

(AAB, CDD) et (ABB, CCD)

on peut atteindre tout autre élément du produit M par une séquence d'opérations s et d convenablement choisies.

C'est-à-dire que les éléments de M se retrouvent tous dans les deux simplexes :

Δ [(AAB, CDD)] et Δ [(ABB, CCD)]

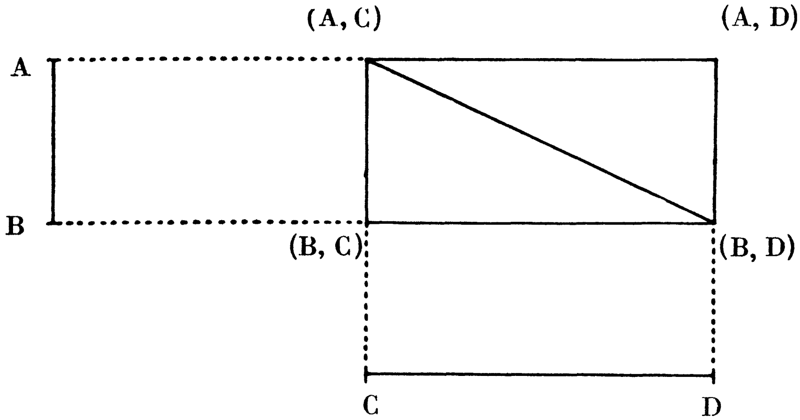
soit dans l'un ou l'autre, soit dans les deux.

(54) Revenons alors à l'interprétation géométrique. A quoi correspond Δ [(AAB, CDD)], par exemple ? Effectuons d'abord toutes les opérations d : on obtient :

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathrm{AAB, CDD}) \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
(\mathrm{AB, DD}) \arrow[d] \arrow[dr] & (\mathrm{AB, CD}) \arrow[dl] \arrow[dr] & (\mathrm{AA, CD}) \arrow[d] \arrow[dl] \\
(\mathrm{B, D}) & (\mathrm{A, D}) & (\mathrm{A, C})
\end{tikzcd}$$

qui désigne l'architecture du triangle dont les trois sommets sont : (B, D), (A, D) et (A, C).

On peut alors dessiner la figure :



et le parallélogramme se trouve simplicialement structuré, c'est-à-dire décomposé en triangles.

(55) Pour se familiariser avec ce mécanisme, on pourra traiter deux autres exemples.

(551) Le produit d'un triangle par un segment, donne le volume d'un prisme triangulaire. On examinera le complexe Δ [A B] $\times$ Δ [C D E] ; on verra qu'il peut être engendré par les simplexes :

Δ [(AAAB, CDEE)]
Δ [(AABB, CDDE)]

et

Δ [(ABBB, CCDE)]

d'où une décomposition du prisme en trois tétraèdres :

six sommets : (A, C), (A, D), (A, E), (B, C), (B, D), (B, E) ;
douze arêtes : (AA, CD), (AA, CE), (AA, DE),
(AB, CC), (AB, DD), (AB, EE),
(AB, CD), (AB, CE), (AB, DE),
(BB, CD), (BB, CE), (BB, DE).

(552) Le produit de trois segments est un pavé.

Le complexe Δ [AB] $\times$ Δ [CD] $\times$ Δ [EF] peut être engendré à partir des six mots-produits :

(AAAB, CCDD, EFFF)
(AAAB, CDDD, EEFF)
(AABB, CDDD, EEEF)
(AABB, CCCD, EFFF)
(ABBB, CCDD, EEEF)
(ABBB, CCCD, EEFF)

ce qui décompose le pavé en six tétraèdres.

(A suivre).

PETITE BIBLIOGRAPHIE INITIALE

1. Les exposés faits par Henri Cartan, en décembre 1956, sous le titre : « Sur la théorie de Kan », publiés par le secrétariat mathématique de l'Institut Henri-Poincaré (Séminaire H. Cartan, E.N.S., 1956-57), réédités en volume par Benjamin, inc. New York, 1967.
2. Auxquels il faut ajouter les « deux exposés qui n'ont jamais eu lieu », mais la même année et dont une rédaction figure dans le susdit recueil, sous les titres : « Sur le foncteur Hom en théorie simpliciale » et « Théorie des fibrés simpliciaux » (*ibid.*, p. 3-01, 3-12 et 4-01, 4-12).
3. Dans les Ergebnisse : Calculus of fractions and Homotopy theory, de P. Gabriel et M. Zisman (Springer, Berlin, 1967), dont surtout les chapitre 2 : Simplicial sets, et chapitre 4 : Homotopic category.
4. J. Peter May. — Simplicial objects in algebraic topology (Van Nostrand math. studies, n° 11), Van Nostrand Cy inc., Princeton, 1967, 161 p.
5. Si l'on a en main le recueil cité en (1) ci-dessus, on pourra jeter un coup d'œil sur l'exposé de J. L. Moore (1955), Séminaire H. Cartan, 1954-55, p. 12-01 et sur celui de H. Cartan, intitulé : « Opérations cohomologiques », *ibid.*, p. 14-01.
6. Chacune des trois sources citées, comporte des renseignements bibliographiques.