HENRY ROUANET
JANINE ROGALSKI
DOMINIQUE LÉPINE

Algèbre linéaire et formalisation de la notion de comparaison

Mathématiques et sciences humaines, tome 24 (1968), p. 5-16
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1968__24__5_0>

M.S.H. (7e année, nº 24, 1968, p. 5-16)

ALGÈBRE LINÉAIRE ET FORMALISATION DE LA NOTION DE COMPARAISON

par

Henry ROUANET [1], Janine ROGALSKI [2]
et Dominique LÉPINE [1]

INTRODUCTION

L'exposé qu'on va lire s'inscrit dans un ensemble de recherches actuellement en cours, dont l'objectif est d'exprimer avec précision, à l'intérieur d'un cadre mathématique adéquat (nous dirons : « formaliser »), certaines notions de la méthodologie expérimentale, et plus particulièrement celles concernant le recueil et le traitement de données [3].

Dans ce domaine, actuellement, existent de nombreuses méthodes, utilisées avec des degrés variés de pertinence. Des structures mathématiques, pas toujours bien dégagées, sont sous-jacentes à ces méthodes. L'explicitation de ces structures peut-elle apporter une amélioration substantielle dans l'emploi de ces méthodes ? A cette question nous répondrons affirmativement, quoiqu'avec quelque nuance ; nous pensons en effet qu'un facteur important qui doit entrer en ligne de compte est le degré de complexité des méthodes.

Pour les méthodes les plus simples (calculs statistiques élémentaires tels que moyenne, coefficient de corrélation, etc.), le gain *immédiat*, il faut le reconnaître franchement, peut n'être qu'assez mince ; par exemple, la notion méthodologique sous-jacente à celle de « corrélation linéaire » est en elle-même suffisament claire (nuage de points pouvant être ajusté approximativement par une droite) ; exprimer cette notion à l'aide de celle de « cosinus » n'est pas nécessairement plus efficace à court terme [4]. On notera par ailleurs, que dans ce cas, le concept de cosinus n'exprime rien de plus précis que la formule habituelle du coefficient de corrélation : il s'agit donc ici, non pas de « formalisation » à proprement parler, mais d'une simple traduction terminologique — traduction qui pourra être plus ou moins appropriée selon l'application que l'on veut en faire, les habitudes verbales de l'utilisateur, etc.

Il n'en va certainement pas de même pour des méthodes plus complexes, comme les méthodes dites d'« analyse de la variance », couramment utilisées par l'expérimentaliste : celui-ci, partant d'hypothèses (ou plus généralement d'interrogations) recueille des données et cherche à les traiter de la manière la plus appropriée à ses intentions de recherche.

En pareil cas, l'expérimentaliste se livre en général à une analyse de variance, après consultation d'un recueil de procédures de calcul — vulgairement et hélas ! péjorativement appelées « recettes ».

---

1. Laboratoire de Psychologie expérimentale et comparée de la Sorbonne, associé au C.N.R.S.
2. Laboratoire de Psychologie, E.P.H.E., VIe section, Paris
3. Un tel programme de recherche avait été tracé dans un article antérieur (H. Rouanet, *M.S.H.*, nº 16), consacré aux relations entre mathématiques et méthodologie.
4. Insistons bien sur « à court terme » : à plus long terme, le concept de cosinus aidera à mieux comprendre les méthodes d'analyse factorielle, etc.

Mais la démarche qui a conduit le chercheur, depuis ses intentions, au choix de telle ou telle procédure, n'est plus du tout en général une simple traduction : loin d'être une « affaire courante », elle comporte souvent des difficultés réelles.

Nous pensons qu'une source essentielle de difficultés réside dans la *distance* entre les intentions du chercheur et les procédures de calcul. Or, c'est là un fait que nous avons constaté à plusieurs reprises, les structures mathématiques sous-jacentes aux procédures se trouvent souvent, en réalité, *plus proches des intentions du chercheur que les procédures de calcul elles-mêmes :* d'où l'intérêt pratique d'expliciter ces structures.

L'exposé qui suit est une illustration des considérations précédentes : on y trouvera la formalisation d'une notion méthodologique qui joue un rôle central dans la démarche expérimentale, celle de *comparaison :* (à partir de données provenant de différents groupes : peut-on considérer que les différences observées sont négligeables — « non-significatives » — ou doit-on au contraire « distinguer » les différents groupes ?) [1].

Le cadre mathématique adéquat à cette formalisation sera, naturellement, l'*algèbre linéaire* dont la puissance et la souplesse font à l'heure actuelle, l'outil le plus important pour le traitement des données numériques (on sait par exemple, combien les méthodes dites non-paramétriques, parfois présentées comme solution de rechange, posent des problèmes d'interprétation délicats et se plient difficilement au traitement de nombre de plans d'expérience usuels même relativement simples).

D'aucuns pourront peut-être s'étonner que cette formalisation de la notion de comparaison au moyen de structures linéaires ne soit pas déjà classique, au niveau sinon des recueils de « recettes » mentionnés plus haut, du moins des traités plus savants sur l'analyse de variance [2]. En réalité, de la lecture de ces traités ressortent à l'évidence les propriétés de linéarité des méthodes d'analyse de variance, mais la présentation de ces propriétés est souvent faite par des voies assez détournées, mettant par exemple l'accent sur les techniques de calcul matriciel (certes indispensables pour les calculs numériques) plutôt que sur les structures linéaires que ces techniques supposent.

La formalisation que nous proposerons, qui nous paraît exprimer d'une façon directe l'idée intuitive de cette notion, nous permettra en outre d'introduire la distinction entre la comparaison elle-même (espace vectoriel) et une base de vecteurs qui l'engendre (base qui sera représentée par une matrice en vue des calculs). Une telle conception, que l'on peut entrevoir à l'état d'amorce dans maint développement sur l'analyse de variance, ne semble pas avoir été jusqu'ici clairement formulée [3].

La formalisation de la notion centrale de comparaison nous permettra, enfin, de présenter tout un cortège de notions, dont on trouvera la liste dans un glossaire annexe.

*
* *

Comme le laissent certainement prévoir les considérations précédentes, les idées qui sont à la base de cet article ont été le résultat de la confrontation entre quelques réflexions a priori et beaucoup de problèmes expérimentaux réels [4], ainsi que de la pratique d'un enseignement sur les Plans d'expérience donné dans le cadre de l'Institut de Psychologie et du Certificat C3 de Psychologie expérimentale [5].

Cet article a été rédigé de manière à pouvoir être lu d'une part de façon autonome, d'autre part en ne supposant acquises que des connaissances élémentaires sur les espaces vectoriels (on trouvera en appendice quelques rappels sur des notions peut-être moins familières). Dans un contexte élargi, les notions de base de l'article actuel pourront d'une part être définies à partir de concepts plus primitifs, d'autre part faire l'objet de généralisations (cf. en particulier les trois notes pp. 7, 8, 13).

---

1. Ce rôle central est développé dans un article récent de D. Lépine (*Bull. Psychol.*, 1968-1969, *XXII*, nº 9-13, 578-586).
2. Comme, par exemple, l'excellent traité de Scheffé : *The Analysis of Variance*, Wiley, 1959.
3. Ce que certains auteurs, comme Hays par exemple, définissent formellement comme une « comparaison » est en réalité non pas l'espace vectoriel, mais un vecteur de cet espace (que nous appellerons ici « vecteur-contraste »), alors que l'espace vectoriel lui-même, qui constitue la notion essentielle, ne reçoit pas de dénomination.
4. Qu'il nous soit permis, à cet égard, de mentionner que la mise au point de ce texte a été précédée de plusieurs discussions avec M. Jean Grisez, qui nous a aidés à mettre en place certains concepts importants, notamment ceux de la troisième partie (C).
5. Une partie du cours de H. Rouanet sur les Plans d'expérience a été publiée au *Bulletin de Psychologie* (Novembre 1968).

A. — CONTRASTES - COMPARAISONS - COMPARAISON GLOBALE - SUPPORTS

Contrastes.

Soit E un ensemble fini (« ensemble de base »). Nous appellerons vecteur-contraste sur E, ou E-contraste une application

$$c_E : E \to \mathbf{R}$$

telle que

$$\sum_{e \in E} c_E(e) = 0 \qquad [1]$$

Les valeurs $c_E(e)$ seront appelées *coefficients* ou *poids* du contraste c_E.

Tout ensemble de E-contrastes engendre un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^E$ (espace vectoriel des applications de E dans $\mathbf{R}$) qui est un espace vectoriel de contrastes. En effet, la somme de deux E-contrastes c_E et d_E, et l'homothétique λc_E ($\lambda \in \mathbf{R}$) d'un contraste c_E sont des E-contrastes. Donc tout élément du sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^E$ engendré par un ensemble de E-contrastes est un E-contraste.

Comparaisons.

— L'espace vectoriel C engendré par un ensemble de E-contrastes est appelé *comparaison* sur E ou E-comparaison (on supprimera « E » ou « sur E » si le contexte ne laisse aucune ambiguïté).

— Le rang (ou dimension) de cet espace vectoriel s'appelle le *nombre de degrés de liberté* de la comparaison, noté dl C.

— Un contraste non nul engendre une comparaison *unidimensionnelle* (de rang 1) ou simple ; toute comparaison de rang supérieur à 1 est dite *multidimensionnelle*, ou *multiple*.

La comparaison engendrée par le contraste nul sera dite *impropre* (elle est de rang nul). Sauf spécification contraire, il sera toujours seulement question par la suite de comparaisons propres.

Comparaison globale.

Nous appellerons *comparaison globale* (sur E) l'*espace vectoriel* C_E de tous les E-contrastes.

Propriété : Si le cardinal de E est n, le nombre de degrés de liberté de la comparaison globale sur E est $n - 1$.

Pour démontrer que le rang de C_E est $n - 1$, il suffit de construire une partie à $n - 1$ éléments et de vérifier qu'elle constitue une base : par exemple, on vérifie que l'ensemble des $n - 1$ contrastes

$$\begin{aligned} c_1 &= (1,0, \ldots, 0, -1) \\ c_2 &= (0,1, \ldots, 0, -1) \\ &\;\;\vdots \\ c_{n-1} &= (0,0, \ldots, 1, -1) \end{aligned}$$

forme une base.

Remarque : Une démonstration immédiate mais moins élémentaire consiste à s'appuyer sur le fait que la comparaison globale est l'hyperplan de $\mathbf{R}^E$, noyau de la forme linéaire (« somme ») de $\mathbf{R}^E$ dans $\mathbf{R}$, qui à toute application f de $\mathbf{R}^E$ associe la somme des valeurs prises par cette application

$$f \to \sum_{e \in E} f(e)$$

1. Dans un cadre plus général, un contraste pourra être défini comme forme linéaire sur $\mathbf{R}^E$. Cette forme sera caractérisée par l'application c_E (donnant les coefficients de la forme linéaire par rapport à la base canonique de $\mathbf{R}^E$) que nous prenons ici comme définition d'un contraste.

Sous-comparaisons.

— Etant donné deux comparaisons C_1 et C_2, on dit que C_2 est une ***sous-comparaison*** de C_1 si C_2 est un sous-espace vectoriel de C_1 (ce qui définit un ordre partiel sur les comparaisons). C_2 est dite sous-comparaison *stricte* de C_1 si elle est un sous-espace vectoriel strict de C_1 (c'est-à-dire différent de C_1).

— Une comparaison *partielle* sur E est une sous-comparaison stricte de la comparaison globale (sur E).

Toute comparaison sur E est une sous-comparaison de la comparaison globale, donc celle-ci est la E-comparaison maximum pour l'ordre d'inclusion des comparaisons.

Pour $n = 2$, il existe une seule comparaison (propre), à la fois unidimensionnelle et globale ; il n'y a pas de comparaison partielle.

Contrastes orthogonaux.

Deux contrastes c et d sont orthogonaux s'ils vérifient

$$\sum_{e \in E} c(e)\, d(e) = 0 \qquad (^1)$$

Le produit cd des contrastes c et d (défini par $(cd)\,(e) = c(e)\, d(e)$) est alors un contraste. Inversement, si le produit de deux contrastes est un contraste, ces deux contrastes sont orthogonaux.

Rappelons que deux sous-espaces vectoriels sont orthogonaux si tout vecteur de l'un est orthogonal à tout vecteur de l'autre (en ce cas l'intersection des deux sous-espaces se réduit au vecteur nul).

Pseudo-contrastes, pseudo-comparaison.

Nous appellerons *pseudo-contraste global* (sur E) une application constante de E dans $\mathbf{R}$, et *pseudo-comparaison globale* (sur E) l'espace vectoriel (unidimensionnel) engendré par les pseudo-contrastes.

Toute comparaison sur E est orthogonale à la pseudo-comparaison globale.

Tout contraste étant un vecteur orthogonal à la pseudo-comparaison globale (de rang 1), on retrouve le fait que le rang de la comparaison globale est $n - 1$ (rang de $\mathbf{R}^E$ — rang de la pseudo-comparaison globale).

On peut toujours trouver une base orthogonale de la comparaison globale sur E. Par exemple :

$$\begin{aligned}
c_1 &= (1, -1, \quad 0, 0, \ldots, 0)\\
c_2 &= (1, \quad 1, -2, 0, \ldots, 0)\\
&\ \vdots\\
c_{n-1} &= (1, \quad 1, \quad 1, 1, \ldots, 1, -(n-1))
\end{aligned}$$

forment une base orthogonale (contrastes deux à deux orthogonaux).

Supports d'un contraste, d'une comparaison.

— On appelle *support d'un E-contraste* c_E, la partie S_E de E définie par :

$$S_E = \{e \in E \mid c_E(e) \neq 0\}$$

---

1. Cette définition de l'orthogonalité repose implicitement sur l'introduction dans $\mathbf{R}^E$ d'un produit scalaire pour lequel la base canonique est orthonormée ; le cas échéant, une définition reposant sur un produit scalaire différent pourra être plus adéquate.

— On dit qu'une partie P de E *porte* un contraste c si :

$$e \in \complement P \Rightarrow c(e) = 0 ;$$

on dit aussi que c *s'appuie sur* P, ou que c est un contraste intra-P.

Une partie P qui porte un contraste peut inclure strictement le support de ce contraste ; donc ne pas confondre « porté par ...» et « de support ...».

Propriétés.

— Tous (et seuls) les ensembles P contenant S support de c_E (y compris S lui-même) portent le contraste c_E ; le support d'un E-contraste est la plus petite partie de E qui porte ce contraste (c'est l'intersection des parties qui portent ce contraste).

— Une condition suffisante pour que la restriction d'un E-contraste à une partie P de E soit un P-contraste est que P porte c_E.

Remarque.

Cette condition n'est pas nécessaire ; en effet soit :

$$E = \{a, b, c, d\}$$

et

$$P = \{a, b\}$$

$$c_E = (1, -1, 2, -2)$$

a pour support E, donc n'est pas porté par P ; cependant :

$$c_E^P = (1, -1)$$

est un P-contraste.

Enfin, nous dirons qu'une partie de S est le *support d'une comparaison* C si :

a) tout contraste de C est porté par S ;

b) il existe (au moins) un contraste de C dont le support est S.

B. — COMPARAISONS ASSOCIÉES A UNE PARTIE DE E.

Soit P une partie de E. Tout ensemble de contrastes portés par P engendre une comparaison C_P, dont tous les contrastes sont portés par P. On dit que cette *comparaison* est *portée par* P ou qu'elle est une comparaison *intra-P*.

Il existe une comparaison maximum intra-P : la comparaison engendrée par tous les contrastes intra-P. Nous l'appellerons *la* comparaison intra-P, ou *la* comparaison associée à P, notée C_E^P, ou C^P, ou même, pour des raisons de clarté typographique $C_E(P)$ ou $C(P)$.

Propriété.

A tout E-contraste intra-P c_E^P, on peut associer canoniquement un P-contraste c_P, restriction de c_E^P à P défini par :

$$c_P(e) = c_E^P(e), \quad \forall\, e \in P.$$

Réciproquement : à tout P-contraste c_P on peut associer un E-contraste intra-P, c_E^P, défini par :

$$c_E^P(e) = c_P(e) \qquad \text{si} \qquad e \in P$$
$$c_E^P(e) = 0 \qquad \text{si} \qquad e \notin P$$

L'application de C_P dans C_E^P qui à c_P associe c_E^P, est linéaire et bijective.

Toute P-comparaison est isomorphe à une E-comparaison intra-P. En particulier, la P-comparaison globale est isomorphe à la E-comparaison associée à P (intra-P maximum). Celle-ci a donc $|P| - 1$ degrés de liberté.

Si $P = E$, la comparaison intra-P n'est autre que la E-comparaison globale ; si P est une partie stricte de E, la comparaison intra-P est une E-comparaison partielle.

On pourrait être tenté de croire qu'inversement toute E-comparaison partielle est portée par une partie stricte de E. Il n'en est rien ; pour le voir il suffit de construire une comparaison partielle de support E. Considérons par exemple la comparaison engendrée par le contraste (de support E) : $(1, 1, 1, \ldots, -(n-1))$; cette comparaison est unidimensionnelle ; or si $n > 2$, elle est partielle et il n'existe pas de partie propre de E qui la porte.

— Nous appellerons *pseudo-contraste porté par* P, ou s'appuyant sur P ou intra-P, toute application de E dans R constante sur P et nulle sur le complémentaire de P.

— On appelle *pseudo-comparaison portée par* P, ou *intra-*P, l'espace vectoriel (unidimensionnel) engendré par les pseudo-contrastes intra-P.

Si $P = E$ nous retrouvons les notions de pseudo-contrastes globaux et de pseudo-comparaison globale.

Propriétés.

— La pseudo-comparaison intra-P est isomorphe à la pseudo-comparaison globale sur P.

— Toute comparaison intra-P est orthogonale à la pseudo-comparaison intra-P.

C. — COMPARAISONS ASSOCIÉES A UNE FAMILLE DE PARTIES DISJOINTES

Soit $\mathcal{P} = \{ P_i \}_{i \in I}$ une famille de parties de E disjointes.

Toute comparaison intra-P_i est orthogonale à toute comparaison intra-P_j $(i \neq j)$. En effet, le produit d'un contraste intra-P_i par un contraste intra-P_j est le contraste nul.

Contrastes et comparaisons intra-$\mathcal{P}$.

On appelle *contraste intra-*$\mathcal{P}$ une somme de contrastes intra-P_i, pour i parcourant une partie J de I.

Exemple

Soit $E = \{ a, b, c, d \}$ $\qquad \mathcal{P} = \{ P_1, P_2 \}$ $\qquad$ avec $P_1 = \{ a, b, \}$

$P_2 = \{ c, d, \}$

Le contraste $c = (1, -1, 2, -2)$ est un contraste intra-$\mathcal{P}$, somme des deux contrastes :

$$C_1 = (1, -1, 0, 0) \qquad \text{(intra-}P_1\text{)}$$
$$\text{et} \quad C_2 = (0, 0, 2, -2) \qquad \text{(intra-}P_2\text{)}.$$

On appelle *comparaison intra-$\mathcal{P}$* une somme (voir appendice) de comparaisons intra-P_i, pour i parcourant une partie J de I. (En particulier toute comparaison intra-P_i est une comparaison intra-$\mathcal{P}$.) Il existe une comparaison intra-$\mathcal{P}$ maximum, qui est la somme de toutes les comparaisons intra-P_i maximum, pour i parcourant l'ensemble I. On parlera alors de *la* comparaison intra-$\mathcal{P}$.

Il résulte immédiatement de la définition que la restriction

— d'un contraste intra-$\mathcal{P}$ à une partie P_i ($P_i \in \mathcal{P}$) est un P_i-contraste;

— d'une comparaison intra-$\mathcal{P}$ à une partie P_i est une P_i-comparaison.

Propriétés.

— Le nombre de degrés de liberté d'une comparaison intra-$\mathcal{P}$ est la somme des nombres de degrés de liberté des comparaisons intra-P_i qui la composent. En particulier, le nombre de degrés de liberté de la comparaison intra-$\mathcal{P}$ (maximum) est :

$$\sum_{i \in I} (|P_i| - 1) = \sum_{i \in I} |P_i| - |I|$$

En effet les comparaisons intra-P_i étant orthogonales, leur somme est une somme directe et on peut appliquer la propriété d'additivité des rangs.

— Toute réunion de bases B_i des comparaisons intra-P_i constitue une base de la comparaison intra-$\mathcal{P}$.

En effet, par définition, la comparaison intra-$\mathcal{P}$ est engendrée par la réunion des bases B_i. D'autre part, les comparaisons intra-P_i étant orthogonales, la réunion des vecteurs de base est un système libre. Ce système libre engendrant la comparaison intra-$\mathcal{P}$ forme une base de cette comparaison.

Toute comparaison intra-P_i est orthogonale à toute pseudo-comparaison intra-P_j, pour tout i et j (y compris pour $i = j$).

Remarque.

Dès que $|I| > 1$, la comparaison intra-$\mathcal{P}$ est contenue strictement dans la comparaison associée à $\bigcup_{i \in I} P_i$.

En effet, le nombre de degrés de liberté de la comparaison associée à $\bigcup_{i \in I} |P_i|$ est $\sum_{i \in I} |P_i| - 1$, alors que le nombre de degrés de liberté de la comparaison intra-$\mathcal{P}$ est $\sum_{i \in I} |P_i| - |I|$.

Exemple :

$$E = \{a, b, c, d\} \qquad \begin{aligned} \mathcal{P} &= \{P_1, P_2\} \\ P_1 &= \{a, b\} \\ P_2 &= \{c, d\} \end{aligned}$$

La comparaison associée à $P_1 \cup P_2$ est la E-comparaison globale; elle n'est pas engendrée par les comparaisons intra-P_1 et intra-P_2 : elle contient par exemple, le contraste $(1, 1, -1, -1)$ qui n'est pas de la forme $(\lambda, -\lambda, \mu, -\mu)$ des contrastes de la comparaison intra-$\mathcal{P}$.

Contrastes et comparaisons inter-$\mathcal{P}$.

— On appelle *contraste inter-$\mathcal{P}$* un contraste porté par $\bigcup_{i \in I} P_i$ dont la restriction à chaque partie P_i de $\mathcal{P}$ est un pseudo-contraste intra-P_i. (Remarque : Un contraste inter-$\mathcal{P}$ n'a pas nécessairement une valeur différente sur chaque partie P_i.)

— On appelle *comparaison inter-$\mathcal{P}$* une comparaison engendrée par un ensemble de contrastes inter-$\mathcal{P}$.

La comparaison inter-$\mathscr{P}$ engendrée par l'ensemble de tous les contrastes inter-$\mathscr{P}$ sera appelé *la* comparaison inter-$\mathscr{P}$ [1].

Propriétés.

— Le nombre de degrés de liberté de la comparaison inter-$\mathscr{P}$ (maximum) est égal à $|I| - 1$.

En effet, considérons l'espace vectoriel engendré par les $|I|$ pseudo-comparaisons intra-P_i. Celles-ci étant orthogonales, cet espace est de rang $|I|$. La comparaison inter-$\mathscr{P}$ est un sous-espace de cet espace vectoriel orthogonal à la pseudo-comparaison globale, donc elle a pour rang $|I| - 1$.

— Toute comparaison inter-$\mathscr{P}$ est orthogonale à toute comparaison intra-$\mathscr{P}$. En effet, ces comparaisons sont dans les espaces vectoriels engendrés respectivement par les pseudo-comparaisons intra-P_i et par les comparaisons intra-P_i qui sont orthogonales deux à deux comme nous l'avons vu plus haut (page 11).

En particulier, *la* comparaison inter-$\mathscr{P}$ (maximum) est orthogonale à *la* comparaison intra-$\mathscr{P}$ (maximum).

— La comparaison associée à la réunion $\bigcup_{i \in I} P_i$ est la somme directe de la comparaison inter-$\mathscr{P}$ et de la comparaison intra-$\mathscr{P}$:

$$\begin{aligned} C\left(\bigcup_{i \in I} P_i\right) &= C \text{ (intra-}\mathscr{P}) \oplus C \text{ (inter-}\mathscr{P}) \\ &= \bigoplus_{i \in I} C(P_i) \oplus C \text{ (inter-}\mathscr{P}). \end{aligned}$$

En effet, C (intra-$\mathscr{P}$) et C (inter-$\mathscr{P}$) sont deux sous-espaces vectoriels de $C\left(\bigcup_{i \in I} P_i\right)$ dont l'intersection est le contraste nul et on a :

$$\mathrm{dl}\, C\left(\bigcup_{i \in I} P_i\right) = \sum_i |P_i| - 1$$

$$\mathrm{dl}\, C \text{ (intra-}\mathscr{P}) = \sum_i |P_i| - |I$$

$$\mathrm{dl}\, C \text{ (inter-}\mathscr{P}) = |I| - 1$$

donc $\mathrm{dl}\, C\left(\bigcup_{i \in I} P_i\right) = \mathrm{dl}\, C$ (inter-$\mathscr{P}$) $+ \mathrm{dl}\, C$ (intra-$\mathscr{P}$) d'où la conclusion.

Pour avoir une base de $C\left(\bigcup_{i \in I} P_i\right)$ on peut donc prendre la réunion d'une base de C (inter-$\mathscr{P}$) et d'une base de C (intra-$\mathscr{P}$).

D. — APPLICATIONS ; COMPARAISONS ASSOCIÉES A UNE PARTITION

Considérons le cas où $\mathscr{P}$ est une partition, c'est-à-dire où $\bigcup_{i \in I} P_i = E$: tous les résultats du paragraphe précédent s'appliquent évidemment à ce cas, d'où la propriété de *décomposition de la comparaison globale :* la comparaison globale est la somme directe de la comparaison intra-partition et de la comparaison inter-partition, et la *propriété d'additivité des degrés de liberté :*

$$\mathrm{dl}\, C(E) = \mathrm{dl}\, C \text{ (inter-}\mathscr{P}) + \mathrm{dl}\, C \text{ (intra-}\mathscr{P})$$

$$n - 1 = (|I| - 1) + \left(\sum_i |P_i| - |I|\right)$$

1. Remarquons qu'une comparaison inter-$\mathscr{P}$ est une comparaison « entre » les classes de la partition $\mathscr{P}$ (d'où le terme « inter »). Mais il pourrait être aussi bien justifié de parler de comparaison « intra »-$\mathscr{P}$ puisque la comparaison est une comparaison « à l'intérieur » de $\mathscr{P}$ considéré comme un ensemble dont les éléments sont les classes de la partition $\mathscr{P}$. Toutefois, il nous a paru préférable (cf. plus haut) de parler de comparaison « intra »-$\mathscr{P}$ pour désigner une somme de comparaisons à l'intérieur des classes elles-mêmes (somme de comparaison intra-P_i).

La comparaison associée à la partition la plus fine est la comparaison globale; celle associée à la partition la moins fine est la comparaison impropre.

Définition.

On dit qu'une partition $\mathcal{P}$ est ***équilibrée*** si toutes ses classes ont même effectif. (On généralise cette notion à une famille $\mathcal{P}_0$ de parties disjointes.) Pour une partition équilibrée $\mathcal{P}$ de k classes à p éléments, on a $n = k\,p$ et la propriété d'additivité des degrés de liberté s'écrit :

$$\boxed{n - 1 = (k - 1) + k\,(p - 1)}$$

Revenons au cas d'une partition $\mathcal{P}$ quelconque : on appellera π la surjection canonique

$$\pi : E \to \mathcal{P}\ (\pi\,(e) = P_i \text{ si } e \in P_i).$$

A toute application $\varphi : \mathcal{P} \to \mathbf{R}$ on peut associer

l'application $f : E \to \mathbf{R}$ définie par $f = \varphi \circ \pi$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{E} \arrow[rr, "\Pi"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathcal{P} \arrow[dl, "\varphi"] \\ & \mathbf{R} & \end{tikzcd}$$

On dit que φ ***se remonte*** (de $\mathcal{P}$ vers E) en f (par π), ou que f ***se rabat*** (de E sur $\mathcal{P}$) en φ (par π).

— On dit que $f : E \to \mathbf{R}$ est ***constante sur la partition*** $\mathcal{P}$ si la restriction de f à toute partie P_i de $\mathcal{P}$ est une application constante, ou d'une manière équivalente si f se factorise à travers π, c'est-à-dire s'il existe $\varphi : \mathcal{P} \to \mathbf{R}$ telle que $f = \varphi \circ \pi$.

Nous allons particulariser les notions précédentes au cas où les applications sont des contrastes [1].

Notons d'abord que si φ est un $\mathcal{P}$-contraste, l'application f associée n'est pas nécessairement un E-contraste.

Exemple :

$$E = \{\,a, b, c\,\} \qquad\qquad \mathcal{P} = \{\,\{\,a\,\}, \{\,b, c\,\}\,\}$$

$$\varphi\,\{\,a\,\} = 1$$

$$\varphi\,\{\,b, c\,\} = -1$$

φ est un $\mathcal{P}$-contraste.

Cependant $f\,(a) = 1$

$$f\,(b) = f\,(c) = -1$$

donc $\sum_{e \in E} f\,(e) = -1$ et f n'est pas un E-contraste.

1. Dans un cadre élargi où un contraste ne sera plus défini comme une application (cf. note p. 7), les notions et propriétés qui suivent (en particulier celles concernant le « rabattement » et la « remontée » d'un contraste ou d'une comparaison) pourront cependant être encore généralisées.

Inversement un E-contraste constant sur $\mathcal{P}$ (c'est-à-dire un contraste associé à $\mathcal{P}$) ne se rabat pas nécessairement en un $\mathcal{P}$-contraste.

Si un ensemble de $\mathcal{P}$-contrastes se remonte en un ensemble de E-contrastes, il en est de même de toute combinaison linéaire de ces $\mathcal{P}$-contrastes donc de la $\mathcal{P}$-comparaison qu'ils engendrent.

On dit qu'une $\mathcal{P}$-comparaison se remonte en une E-comparaison si tout $\mathcal{P}$-contraste de cette comparaison se remonte en un E-contraste (définition analogue pour « se rabattre»).

Plus généralement, soit $\mathcal{P}_0$ une famille de parties disjointes; soit P_0 la réunion de ces parties et $\pi_0 : P_0 \to \mathcal{P}_0$ la surjection canonique associée.

Si un $\mathcal{P}_0$-contraste γ_0 se remonte en c_0 sur P_0 on peut lui associer un E-contraste c défini par

$$
\begin{aligned}
c(e) &= c_0(e) = (\gamma_0 \circ \pi_0)(e) && \text{si } e \in P_0 \\
c(e) &= 0 && \text{si } e \notin P_0.
\end{aligned}
$$

On dira alors que le $\mathcal{P}_0$-contraste γ_0 se remonte en un E-contraste c.

On généralise de façon analogue la notion de rabattement d'un E-contraste en un $\mathcal{P}$-contraste.

On dit qu'une $\mathcal{P}_0$-comparaison se remonte en une E-comparaison si tout $\mathcal{P}_0$-contraste de cette comparaison se remonte en un E-contraste (définition analogue pour « se rabattre »).

Soit $\mathcal{P}$ une partition de E qui contient $\mathcal{P}_0$. On sait associer à un $\mathcal{P}_0$-contraste γ_0 un $\mathcal{P}$-contraste γ (cf. page 10). Si γ se remonte en un E-contraste, celui-ci est le contraste c précédemment défini.

Les conditions :

— γ_0 se remonte en c_0 sur P_0,

— γ se remonte en c sur E

sont équivalentes.

Théorème.

Soit $\mathcal{P}_0$ une famille de parties disjointes, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1) $\mathcal{P}_0$ est équilibrée,

2) toute $\mathcal{P}_0$-comparaison se remonte sur E en une comparaison inter-$\mathcal{P}_0$,

3) toute E-comparaison inter-$\mathcal{P}_0$ se rabat en une $\mathcal{P}_0$-comparaison.

Un cas fréquent d'utilisation de ce théorème est celui où $\mathcal{P}_0$ est une partition de E.

APPENDICE

Rappel sur les sommes de sous-espaces vectoriels.

Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

On appelle somme des sous-espaces vectoriels E_i, et on note $\sum_{i \in I} E_i$ le sous-espace vectoriel de E engendré par la réunion des E_i.

Soit $F = \sum_{i \in I} E_i$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

a) tout vecteur x de F se décompose de manière *unique* en une somme de vecteurs de E_i :

$$x = \sum_{i \in I} x_i$$

b) pour tout $i \in I$, $E_i \cap (\sum_{i \neq j} E_j) = \{0\}$. S'il en est ainsi, nous dirons avec Godement (*Cours d'Algèbre*, p. 225)[1], que les E_i sont *linéairement indépendants*. Dans ce cas, on dit que F est *somme directe* des E_i et on note :

$$F = \bigoplus_{i \in J} E_i$$

Si $F = \sum_{i \in I} E_i$, $\max_{i \in I}$ (rang E_i) $\leqq$ rang $F \leqq \sum_{i \in I}$ (rang E_i).

Si $F = \bigoplus_{i \in I} E_i$, rang $F = \sum_{i \in I}$ rang E_i.

Si G, E_1 et E_2 sont trois sous-espaces vectoriels de E tels que : $G = E_1 \oplus E_2$ on dit que E_1 et E_2 sont supplémentaires par rapport à G.

Des sous-espaces vectoriels orthogonaux (deux à deux) sont linéairement indépendants, donc toute somme de sous-espaces vectoriels orthogonaux est (une somme) directe.

Un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie[3] a un et un seul supplémentaire orthogonal.

En particularisant les notions précédentes au cas des comparaisons, nous obtenons les notions de :

— Somme de comparaisons;

— Comparaisons linéairement indépendantes[2];

— Somme directe de comparaisons;

— Comparaisons supplémentaires (par rapport à une comparaison donnée, par exemple la comparaison globale).

Nous définissons de plus la comparaison *résiduelle* d'une comparaison C comme la comparaison orthogonale supplémentaire de C (par rapport à une comparaison donnée).

GLOSSAIRE

Ensemble de base.
Contraste, vecteur-contraste, coefficients, poids.
Comparaison engendrée par un ensemble de contrastes.
Comparaison sur E, E-comparaison.
Nombre de degrés de liberté.
Comparaison unidimensionnelle, simple.
Comparaison multidimensionnelle, multiple.
Comparaison propre.
Comparaison impropre.
Comparaison globale.
Sous-comparaison.
Sous-comparaison stricte.
Comparaison partielle.
Comparaisons orthogonales.
Pseudo-contraste global.
Pseudo-comparaison globale.
Support d'un contraste — d'une comparaison.
Contraste porté par..., s'appuyant sur...
Comparaison portée par...
Comparaison intra-P ($P \subset E$).
Comparaison (maximum) intra-P.
Comparaison associée à P = *la* (E)-comparaison intra-P-(C_E^P).

1. Godement R., *Cours d'Algèbre*, Paris, Hermann, 1963.
2. On se gardera évidemment de confondre la notion d'indépendance entre comparaisons qui vient d'être définie (indépendance linéaire, notion purement algébrique) et la notion d'indépendance telle qu'elle apparaît en inférence statistique, en relation avec un modèle probabiliste explicite (par exemple : indépendance des carrés moyens associés à deux comparaisons).
3. Ou plus généralement : d'un espace vectoriel de Hilbert.

Pseudo-contraste intra-P (porté par P).
Pseudo-comparaison intra-P (portée par P, associée à P).
Comparaison intra-$\mathcal{P}$.
Contraste intra-$\mathcal{P}$.
Contraste inter-$\mathcal{P}$.
Comparaison inter-$\mathcal{P}$.
Comparaison (maximum) inter-$\mathcal{P}$ = la comparaison inter-$\mathcal{P}$ = la comparaison associée à $\mathcal{P}$.
Partition équilibrée.
(Famille de parties disjointes équilibrée.)
Remonter.
Rabattre.
Somme de comparaisons.
Comparaisons linéairement indépendantes.
Somme directe de comparaisons.
Comparaison résiduelle (d'une comparaison).
Comparaisons supplémentaires.