MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

P. DURIF

Quelques méthodes d'évaluation du statut social

Mathématiques et sciences humaines, tome 23 (1968), p. 17-35

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1968__23__17_0>

M.S.H. (7e année, nº 23, 1969, p. 17-37)

QUELQUES MÉTHODES D'ÉVALUATION DU STATUT SOCIAL *

par

P. DURIF

INTRODUCTION

La notion de *statut social* n'est pas toujours précisément définie, mais son emploi est fréquent dans la littérature sociologique, ethnologique et psychologique. D'un point de vue très général et relativement aux macrosociétés, on la caractérise comme la *place*, la *position* de l'individu, considéré comme interchangeable dans une structure sociale définie selon un caractère social ou un ensemble de ces caractères. Le concept de statut social renvoit à l'idée d'espace, plus précisément d'*espace social*, tandis que le concept de rôle qui lui est presque toujours associé implique celle du développement *temporel* d'une suite d'activités procédant de la place occupée dans le milieu social : l'individu« occupe» un certain statut, il « joue» son rôle. On a pu distinguer statut objectif, statut subjectif et statut accordé (ou reconnu) : le statut *objectif* étant soit *juridique* (ensemble des capacités légales d'un individu selon sa place dans la structure sociale) soit *économique* (ensemble d'obligations nées d'un certain niveau de revenus), soit *hiérarchique* (ensemble d'obligations nées de la place prise dans la hiérarchie) ; le statut *subjectif* se définissant par la conception que se fait la personne de sa propre situation dans le système, par rapport aux autres personnes ; le statut *accordé* étant enfin la représentation que se font les autres du statut de l'individu.

Mais une telle notion, qu'il fallait évoquer ici pour éviter toute confusion, n'est guère « opérationnelle» et ne se prête que difficilement à l'analyse expérimentale. C'est le concept *sociométrique* de statut social qui va faire l'objet de la présente recherche. Il s'agira, plus précisément, de l'élaboration d'un *indice de statut social* permettant la description et l'interprétation des données recueillies par un *test sociométrique*. Nous aurons donc affaire à un groupe numériquement restreint, à une micro-société faite de plusieurs personnes formant à certains égards un univers clos. Et nous appuierons l'analyse sur un exemple précis. Le groupe testé est composé de 16 personnes, 8 femmes (désignées par A, B, C ... H) et 8 hommes (désignés par i, j, k ... p). La question sociométrique qui leur a été posée est formulée ainsi : « Désignez parmi les membres de ce groupe, au moins 3 personnes avec lesquelles vous souhaiteriez rester en contact amical après la fin du stage qui vous a réunis.»

Les résultats obtenus sont donnés par la matrice M suivante où la présence d'une croix à l'intersection de la ligne i et de la colonne j signifie que l'individu i a désigné l'individu j.

La construction d'un indice de statut social présuppose évidemment, quelques hypothèses sur les consignes préalablement données à l'expérimentateur. Des travaux publiés sur la question depuis 1937 nous retiendrons d'abord deux modes d'évaluation. Le plus simple postule que le nombre d des choix demandés au sujet testé est imposé, et n'exige que l'addition des choix reçus rapportée au nombre total des choix possibles ; il s'écrit : statut social $= \frac{r}{n-1}$. Ainsi le statut social du sujet A est égal à $\frac{4}{15}$,

* La présente étude procède d'une série de séminaires du Bureau d'Études et de Recherches en Sciences Humaines Appliquées, du Centre Condorcet, tenus sous la direction de MM. Barbut et Daval, sur un travail initial de M. Joseph Saingolet, maître assistant à la Faculté des Lettres et Sciences Humaines de Bordeaux. A cette recherche de M. Durif, M. Peaucelle a donné une contribution particulièrement importante.

Exemple de test sociométrique : matrice de choix M

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*i*	*j*	*k*	*l*	*m*	*n*	*o*	*p*
A			×	×		×										
B						×					×	×				
C	×			×		×										
D	×		×									×				
E						×					×	×				
F		×						×	×							
G									×		×		×			
H	×					×										×
i		×				×					×					
j				×				×						×		
k		×					×					×				
l		×				×		×								
m						×	×		×							
n										×		×				×
o	×					×		×								
p		×										×				

(Les émissions apparaissent dans les lignes, les réceptions dans les colonnes) celui du sujet H à $\frac{5}{15}$, celui de m à $\frac{1}{15}$, etc.. Le test sociométrique fondé sur ces hypothèses sera désigné plus loin par « test α ». Une autre hypothèse gouverne un « test β » qui laisse le sujet libre du nombre de ses choix et permet par conséquent de tenir compte de l'« expansivité » affective de l'émetteur : être choisi par un sujet qui choisit beaucoup est sans doute moins gratifiant qu'être choisi par une personne avare de ses choix.

On pourrait imaginer des « tests γ » de type intermédiaire entre les tests α et β, dans lesquels on demanderait au sujet de faire *au moins ou au plus d* choix.

Du point de vue enfin du mode de traitement de l'information recueillie, on peut considérer comme nécessaire de faire intervenir les *choix indirects* : je peux être choisi par un sujet A qui soit un « isolé » je peux aussi être choisi par un sujet B qui soit déjà l'objet des préférences de plusieurs autres émetteurs ; ces deux choix qui se portent sur moi sont-ils équivalents ? Si, comme cela est vraisemblable, on est porté à répondre non, il est souhaitable de faire intervenir aussi les choix indirects dans l'évaluation du statut social.

Nous nous proposons dans les pages qui suivent, de soumettre ces modes classiques d'évaluation à un examen critique ayant pour but de forger à l'intention du clinicien qui en l'occurrence doit avoir toujours le dernier mot, des outils conceptuels divers et précis.

QUELQUES DÉFINITIONS DU STATUT SOCIAL.

On constate en général que la socio-matrice associée à un groupe ne peut pas être considérée comme remplie « au hasard ». La répartition des choix se fait donc suivant certaines règles et les individus sont corrélativement classés dans un certain ordre. La recherche du statut social de chaque individu du groupe est en fait la recherche de cet ordre.

On se limitera ci-dessous à l'examen de quelques méthodes qui visent à obtenir cette classification par l'affectation à chaque individu d'un indice et qui présupposent donc que le statut social est mesurable. L'étude du statut social peut être abordé de plusieurs façons :

— Ou bien (c'est ainsi qu'on le définit d'habitude) le statut social d'un individu sera défini comme une mesure agrégée de l'ensemble des choix des individus qui se sont portés sur lui, ces choix étant donnés *a priori* ;

— Ou bien le statut social sera défini comme un facteur qui est associé à chaque individu et qui intervient de façon identique dans le processus de formation des choix de tous les autres individus ; ce facteur doit *expliquer* (ou au moins contribuer à expliquer partiellement) que certains individus soient plus choisis que d'autres.

Il s'agit dans les deux cas, de résumer une information assez complexe sous la forme d'« indice » mais la démarche logique est différente. La première méthode se veut simplement *descriptive*, la seconde *explicative*, au moins pour la partie du choix individuel qui est commune à tous les membres du groupe. On voit en effet tout de suite que :

— Dans la première approche, il n'est pas nécessaire de faire l'hypothèse sur le processus décisionnel, certainement complexe, qui conduit un individu à en choisir un autre ; par contre, il faudra trouver une solution au problème de l'importance relative des différents choix qui se portent sur chaque individu ;

— Dans la seconde approche, l'agrégation des choix ne présente plus la même importance ; par contre il sera difficile d'isoler le facteur « statut social » des autres facteurs. Par contre, il est nécessaire d'expliciter le « modèle » de formation des choix sous-jacent à la méthode. Il n'est pas certain que ce modèle, forcément très simplificateur, permette d'isoler correctement le facteur statut social des autres facteurs de choix.

On va examiner ci-dessous, le détail de ces deux méthodes après avoir défini les notations utilisées dans cette étude.

A. — LES NOTATIONS UTILISÉES

On suppose les résultats du test donnés sous une forme dichotomique : « choix » ou « non choix », sans tenir compte de l'intensité avec laquelle les choix se sont exprimés. La socio matrice M représentative du sociogramme d'un groupe de n individus se définit ainsi :

m_{ij} étant l'élément courant de M,

$m_{ij} = 1$ si i choisit j,

$m_{ij} = 0$ si i ne choisit pas j.

Remarque : Un individu ne peut se choisir lui-même : $\forall\, i, \qquad m_{ii} = 0$.

En ce qui concerne les conditions de l'expérience, on distinguera :

— Le cas où le nombre de choix que peut faire chacun est imposé : modèle α. On appellera d le nombre de choix imposé à l'émetteur.

— Le cas où le nombre de choix est libre (simplement limité par le nombre $n - 1$ des individus qui peuvent être choisis), au moins en théorie car pour certains groupes et certains critères, il est peu probable que $n - 1$ choix soient effectués. On appellera ce cas, le modèle β.

Soit J le vecteur ligne dont tous les éléments sont égaux à 1 :

$$J = \underbrace{(1 \,.\,.\,.\,.\,.\, 1)}_{n}$$

I la matrice identité $(n \times n)$,

s_i le statut social de l'individu i,

S le vecteur ligne dont les n composantes sont les $s_i \qquad S = (s_1 \,.\,.\,.\,.\,.\, s_n)$.

Désignons par :

$$|| \, S \, || \quad \text{et} \quad || \, M \, ||$$

$$|| \, S \, || = \sum_{i=1}^{n} s_i \quad \text{et} \quad || \, M \, || = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} m_{ij}$$

N le nombre total de choix exprimés, on a :

$$N = || \, M \, ||.$$

B. — L'APPROCHE « CONSÉQUENCE DU CHOIX ».

1) *Introduction.*

Pour faire les calculs d'agrégation des choix, il faut déterminer d'abord l'unité de mesure. Deux grandes orientations peuvent être retenues :

a) *Expansivité libre* : l'hypothèse la plus simple est d'admettre que tous les choix sont équivalents entre eux, non seulement quel que soit l'individu émettant ces choix, mais aussi quel que soit le nombre de choix émis par lui. *L'unité sera donc le choix* et le statut social de j sera mesuré par le nombre de choix qui se sont portés sur lui.

On a alors pour le statut s'_j de l'individu j :

$$s'_j = \sum_i m_{ij}$$

soit en notations vectorielles, si on désigne par S'_1 le vecteur ligne $(s'_1, s'_2, \ldots, s'_n)$,

$S'_1 = J\,M$ par définition du produit d'une matrice par un vecteur.

La somme des statuts sociaux est égale[1] au nombre total de choix exprimés :

$$\| S'_1 \| = \sum_{ij} m_{ij} = N.$$

On peut « normaliser » les statuts sociaux en divisant par leur somme, soit :

$$S_1 = \frac{S'_1}{\|S'_1\|} = \frac{J\,M}{N}$$

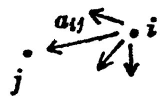
On calcule aussi souvent un troisième statut social :

$$S''_1 = \frac{J\,M}{n - 1}$$

qui exprime le statut social comme le rapport du nombre de choix effectivement reçus au nombre maximum que l'on pourrait théoriquement recevoir (dans le cas du modèle β).

Les trois statuts sociaux S_1, S'_1 et S''_1 sont évidemment proportionnels.

b) *Expansivité limitée* (d est imposé) : une autre hypothèse consiste à admettre que chaque choix a d'autant plus de valeur que l'individu en a effectué moins. Afin de se limiter à une définition simple, on suppose que la somme des mesures des choix émis par le même individu i est constante quel que soit i. *L'unité sera donc l'individu émetteur* et le poids accordé à chaque choix sera inversement proportionnel au nombre de choix émis : soit A la matrice déduite de M par « normalisation » des lignes, c'est-à-dire telle que :



$$a_{ij} = \frac{m_{ij}}{\sum_j m_{ij}}.$$

(On adoptera la convention : si pour un i, $m_{ij} = 0\ \forall j$, on prendra $a_{ij} = 0\ \forall j$.)

On définira à nouveau le statut social par la somme pondérée des choix reçus :

$$s'_{2j} = \sum_j a_{ij} \qquad \text{soit} \qquad S'_2 = J\,A$$

La somme des statuts sociaux est égale[1] au nombre total d'individus soit :

$$\| S'_2 \| = n$$

On peut normaliser les statuts sociaux en divisant par leur somme soit :

$$S_2 = \frac{S'_2}{\| S'_2 \|} = \frac{J\,A}{n}$$

c) *Remarques* : dans le cas d'une hypothèse α, d imposé, on a :

$$A = \frac{M}{d} \qquad \text{et} \qquad S_2 = \frac{JM}{nd} = \frac{JM}{N} = S_1$$

les deux statuts sociaux S_1 et S_2 sont égaux (ils diffèrent en général dans le cas d'une hypothèse β).

2) *Les statuts sociaux tenant compte des choix indirects.*

On considérera alors que le statut social s_j de l'individu est la somme du statut social calculé comme indiqué ci-dessus dans l'introduction et d'une certaine fraction du statut social des individus qui le choisissent, cette fraction étant transférée par l'intermédiaire des choix.

1. Sauf si certains individus n'émettent aucun choix.

En désignant par X cette matrice de transfert des choix reçus (X_{ij} est la fraction du statut social de i qui sera transférée à j) et par Y l'une des matrices par lesquelles on a défini les statuts sociaux sur les choix directs, on aura en notation matricielles $S = JY + SX$.

La matrice Y ne doit pas nécessairement être assimilée à la matrice X : en effet dans la partie du statut social où Y intervient, l'émetteur joue un rôle actif ; dans la matrice X, il n'est plus qu'un intermédiaire faisant plus ou moins écran entre les individus qui l'ont choisi et ceux qu'il a choisis. Par contre, les zéros de Y doivent nécessairement être ceux de X.

On peut écrire :

$$S = J\,Y\,(I - X)^{-1} \qquad \text{(si } I - X \text{ est inversible)} \tag{1}$$

$$= J\,(Y + YX + \ldots\ldots\ YX^{p} + \ldots\ldots)$$

Le premier terme de la série représente l'importance des choix directs, le second l'importance de ces choix transférés une fois, le p^{e} terme JYX^{p-1} représente l'importance des choix transférés $(p - 1)$ fois... Pour définir complètement le statut social, c'est à dire dans le cadre retenu la matrice X, on voit qu'il suffira de faire une hypothèse simple sur l'importance des choix transférés une fois.

On pourra utiliser deux types d'hypothèses dans le prolongement de celles faites ci-dessus (introduction, paragraphe 1).

1) Ou bien on considère que le mécanisme des choix aboutit à attribuer une valeur constante à chaque individu choisi, cette valeur ne dépendant que du statut social de l'individu émetteur et non pas de son expansivité ;

2) Ou bien on considère que la valeur détenue par chaque individu choisissant ne peut au mieux qu'être répartie entre les différents individus choisis.

Il sera commode de désigner ces hypothèses sous les vocables d'*attribution* ou de *répartition* du statut social de l'individu choisissant.

a) *L'optique d'attribution.*

On pose que la matrice de transfert X est de la forme $m'\,M$ (m' étant un scalaire.) La présence du facteur M s'explique par le fait qu'il ne peut y avoir transfert que sur les individus choisis [1], la présence du facteur m' indique qu'on fait à ce sujet l'hypothèse la plus simple possible : *la proportion m' du statut social transféré sera indépendante de l'individu choisissant, du nombre d'individus choisis et de la nature de ces individus choisis.* Il est raisonnable de penser que le statut social délégué par chaque individu ne doit pas être supérieur à son propre statut social. L'hypothèse inverse laisserait la possibilité, de par le jeu cumulatif des choix, d'augmenter à l'infini le statut social de chaque membre. On retiendra donc un coefficient m' tel que pour l'individu choisissant le maximum de personnes, la somme des statuts sociaux délégués ne puisse être supérieure au statut social de l'émetteur.

Soit k le nombre maximum de choix qui puisse être effectué ($k \leqslant n - 1$), on doit donc avoir :

$$0 \leqq k\,.\,m' \leqq 1$$

si on pose $m = km'$, on a :

$$X = \frac{m\,M}{k} \qquad \text{avec} \qquad 0 \leqslant m \leqslant 1$$

$$S_3 = J\,Y\,(I + \frac{m\,M}{k} + \frac{m^2}{k^2}\,M^2 + \ldots) = J\,Y\,(I - \frac{m}{k}\,M)^{-1} \tag{2}$$

car la matrice $(I - \frac{m}{k}\,M)$ est inversible (si tous les individus ne choisissent pas k personnes).

Le calcul du statut social revient donc à la détermination des deux paramètres m et k. Le statut social est une fonction croissante de m et de $\frac{1}{k}$.

1. Autrement dit, les 0 de M sont aussi ceux de X.

Remarques :

— Détermination de k.

k peut être imposé par le test — (modèle α : $k = d$), ou ne pas être fixé de façon précise. Le nombre de choix émis est habituellement inférieur au maximum possible ($n - 1$) surtout lorsque la taille du groupe est importante. Si on prend pour k la valeur $n - 1$ (maximum théorique), on obtiendra une valeur de chacun des statuts sociaux qui sera inférieure à la valeur homologue que l'on aurait obtenue en retenant un « maximum psychologique », ce qui a peu d'importance, puisqu'on ne cherche pas à définir un statut social *absolu* mais uniquement la *hiérarchie* des importances. Cependant l'*ordre* dans lequel se rangent les individus peut en être aussi affecté. Pour pallier cet inconvénient, il conviendrait de retenir un nombre k déduit de la distribution des fréquences du nombre de choix [1].

— Le choix d'une valeur de m.

Si $m = 0$, il n'y a pas de transmission du statut social, qui est donc simplement déterminé par les choix au premier degré, soit $S_3 = J\,M = S'_1$;

Si $m = 1$, un individu qui choisirait le nombre maximum d'individus déléguerait la totalité de son statut social. La matrice $(I - \frac{m}{k} M)$ est alors inversible si au moins un individu ne choisit pas le nombre maximum. Autrement dit, la convergence de la série (2) est assurée dès qu'un choix possible n'est pas réalisé.

Le cas où $m = 1$ peut être interprété de façon particulière à partir de la formule (2) qui devient :

$$S_3 = J\left(M + \frac{1}{k} M^2 + \dots \left(\frac{1}{k}\right)^{p-1} M^p + \dots\right) \tag{3}$$

ou S'_3 obtenu de façon proportionnelle :

$$S'_3 = J\left(\frac{M}{k} + \frac{1}{k^2} M^2 + \dots \left(\frac{M}{k}\right)^p + \dots\right)$$

qui est la somme de la série matricielle de terme général $\dfrac{J\,M^p}{k^p}$.

Le terme général $J\,M^p$ est le nombre de chemins de longueur p du graphe associé à la socio-matrice ayant comme extrémité l'individu considéré.

k^p est le nombre maximum de chemins de longueur p qui pourraient se terminer sur chaque individu si chacun effectuait le nombre maximum de choix [2].

Le terme M^p apparaît donc comme le rapport du nombre de chemins de longueur p du graphe associé à la socio-matrice se terminant sur chaque individu au nombre maximum théorique possible. Le premier terme en particulier est le rapport du nombre de choix reçus au nombre de choix possibles. Il correspond au statut S''_1 défini plus haut.

Puisque, lorsque $m = 1$, le statut social S'_3 est la *somme* de ces rapports, on peut dire que le statut social de i est proportionnel à la somme des choix de tous ordres qui se sont portés sur i, pondérés par la probabilité de chacun de ces choix, cette probabilité étant calculée en supposant que chacun des chemins possibles a la même probabilité élémentaire.

---

1. Par exemple : si on admet l'existence d'un modèle stochastique de formation des choix permettant un ajustement de la fréquence du nombre de choix effectués par une loi de type connu, on peut choisir k comme minimum de $\{ n - 1, K \}$, K étant le « maximum » du nombre de choix effectués tel que la probabilité de $\{$ nombre de choix $\geqslant K \}$ soit inférieure à un seuil α donné. On constatera cependant qu'une telle règle de détermination de k, outre son arbitraire (par l'intermédiaire de α) présuppose l'existence d'une distribution de probabilité sur les expansivités.

2. Y compris les recouvrements partiels de ces chemins.

b) *L'optique de répartition.*

La matrice A étant stochastique [1], prendre une matrice de transfert égale à A revient à supposer que le statut social de i est entièrement délégué aux individus qu'il choisit. On introduira comme dans l'optique d'attribution présentée ci-dessus, un coefficient a de transmission des choix : $0 \leqslant a < 1$ [2], et on obtiendra l'expression suivante du statut social (fonction du paramètre a) :

$$S'_4 = J\,A\,(I - aA)^{-1} = J\,(A + aA^2 + a^2\,A^3 + \ldots) \tag{4}$$

Remarque :

S'_4 est fonction croissante de a. Si on veut comparer les résultats de plusieurs calculs associés à des valeurs différentes de a, il sera bon de ne mesurer que des variations de structure après avoir éliminé l'effet d'ensemble du paramètre a. On va aboutir à cette définition d'un nouvel indice S_4 par deux voies différentes :

1) L'indice S'_4 correspond à la répartition d'un poids qui est lui-même fonction de a. En effet, dans cette optique de répartition, l'unité, c'est-à-dire l'importance de chaque individu i, est *répartie* entre les j choisis par i et la partie $(j \leftarrow i)$ du statut de j en provenance de i est elle-même répartie dans la proportion a entre les individus choisis par j, ... ce qui revient à répartir en réalité non pas une valeur égale à 1 mais :

$$\underset{\substack{\text{choix}\\ \text{directs}}}{1} + \underset{\substack{\text{choix}\\ \text{indirects}\\ \text{du 1}^{\text{er}}\\ \text{ordre}}}{a} + \underset{\substack{\text{choix}\\ \text{indirects}\\ \text{du 2}^{\text{e}}\\ \text{ordre}}}{a^2} + \ldots\ldots\ldots = \frac{1}{1-a}.$$

Pour se ramener à une *répartition* d'un poids unitaire pour chaque individu, il faut donc calculer :

$$S_4 = (1 - a)\,J\,A\,(1 - aA)^{-1}.$$

2) Pour dégager une notion de statut social « absolu », on peut chercher à rapporter l'indice S_4 à l'indice que l'on obtiendrait dans le cas où tous les statuts sociaux seraient identiques et donc tous les individus équivalents. Le moyen le plus simple de représenter cette situation est de considérer la matrice de choix A' [3] présentant le « maximum » de symétrie soit :

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1/n-1 & 1/n-1 & \ldots\ldots \\ 1/n-1 & 0 & & \ldots\ldots \\ 1/n-1 & 1/n-1 & 0 & \ldots\ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots\ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

on aura alors $s_i = s_j \;\forall\; i$ et j et le statut social « absolu » sera défini comme :

$$\frac{S'_4}{\dfrac{\| S_{A'} \|}{n}}$$

1. En effet par construction, la sommation en ligne de ses éléments est égale à 1.
2. Si on n'excluait pas $a = 1$, la série développant S'_4 ne serait pas convergente, ou ce qui est équivalent, $(I - a\,A)$ ne serait pas inversible.
3. C'est possible même dans le cas d'un modèle α : dans une optique probabiliste, on interpréterait alors A' comme la matrice « moyenne » résultant d'un grand nombre de tests où les individus sont équivalents.

L'inverse littérale de $(I - aA')^{-1}$ est :

$$B = \begin{pmatrix} u & v & v & \cdots \\ v & u & v & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

avec $$u = \frac{1 - \dfrac{n-2}{n-1}\,a}{\left(1 + \dfrac{a}{n-1}\right)\left(1 - a\right)} \qquad \text{et} \qquad v = \frac{a}{(1-a)\,(n-1+a)}$$

donc :

$$\frac{\|\ S_{A'}\ \|}{n} = \frac{1}{1-a}$$

On retrouve donc par une autre voie l'indice précédemment défini : $S_4 = (1 - a)\, J\, A\, (I - aA)^{-1}$. Cet indice S_4 semble plus intéressant que l'indice S'_4 par les interprétations qu'il permet. Compte tenu de la première interprétation $\|\ S_4\ \| = n$ (si chaque individu a effectué au moins un choix). Pour $a = 1$ on pourra définir un statut social par continuité [1].

c) *Interprétation du coefficient de transfert* (m ou a).

Pour fixer les idées on raisonnera sur le coefficient a.

Dans le calcul de S'_4 ou de S_4, a intervient comme coefficient de pondération des choix indirects par rapport aux choix directs (cf. formule (4)). Donc plus a est grand plus les choix indirects ont d'importance. Une grande part de cette importance est elle-même due à l'existence de circuits sur le graphe associé à la socio-matrice (en effet les choix de degré supérieur ou égal au n^e^ degré, contiennent nécessairement au moins un circuit). Le coefficient a est donc lié à l'importance implicite que l'on attribue aux circuits (par exemple, choix réciproques, triangles, ligues) par rapport aux choix simples. On va prendre ci-dessous deux exemples très simples.

— *Choix mutuels simples :*

1^er^ cas

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left] & B \arrow[l, shift left] \end{tikzcd}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(I - aA)^{-1} = \frac{1}{1 - a^2}\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

$$S'_{4A} = S'_{4B} = \frac{1}{1-a}$$

2^e^ cas

$$\begin{tikzcd} C & A \arrow[l] \\ B \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$S_{4A} = 1$$

Le rapport des statuts sociaux de A dans le premier et dans le second cas est $\dfrac{1}{1-a}$.

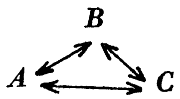
---

1. Chaque statut social est une fonction croissante de a bornée supérieurement par n. On pourrait aussi démontrer, compte tenu de ce que A est stochastique que :

$$\lim_{\substack{a \to 1 \\ a < 1}} (1 - a)\ J\ A\ (I - aA)^{-1} \text{ existe.}$$

— *Choix mutuels en triangle :*

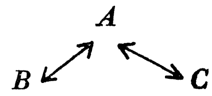
1er cas



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

on trouve : $S'_{4A} = S'_{4B} = S'_{4C} = \dfrac{1}{1-a}$

2e cas



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on trouve : $S'_{4A} = \dfrac{2+a}{1-a^2}$ $\qquad S'_{4B} = S'_{4C} = \dfrac{a+1/2}{1-a^2}$

Le rapport des statuts sociaux de A dans le premier et dans le second cas est $\dfrac{1+a}{2+a}$. Ce rapport reste compris entre 1/2 et 2/3.

Le rapport des statuts sociaux de B ou C dans le premier et dans le second cas est $\dfrac{1+a}{a+1/2}$. Ce rapport reste compris entre 4/3 et 2.

Les valeurs du rapport relatif à l'individu A peuvent surprendre. On notera toutefois dans le premier cas du choix en triangle que A est mis par B (C) en balance avec C (B), tandis que dans la seconde hypothèse B et C ne choisissent que A.

Quoiqu'il en soit et réciproquement la connaissance expérimentale de l'importance de certaines configurations particulières (par exemple triangle ou choix mutuels) par rapport à d'autres configurations, doit permettre de trouver une plage de définition numérique de a, donc de calculer l'ensemble des statuts sociaux. On notera toutefois que :

- Dans le cadre du modèle proposé le rapport des importances retenues doit être compris entre certaines limites.

- Il n'y a qu'un seul degré de liberté sur le paramètre de transmission : par exemple, si on a fixé l'importance des choix mutuels par rapport aux choix simples, on en déduit celle des choix en triangle.

- Surtout les exemples donnés ci-dessus n'ont qu'une valeur indicative : si on « plongeait » ces configurations élémentaires de choix mutuels dans le réseau constitué par l'ensemble des choix, les statuts sociaux relatifs en seraient modifiés : autrement dit le paramètre a est non seulement une mesure de l'importance des choix réciproques, mais aussi un indicateur du poids des choix par intermédiaire et les deux notions sont difficilement séparables.

d) *L'élimination des « boucles ».*

Il peut sembler anormal de retenir pour le calcul d'un indice de statut social la part qui provient d'un circuit. Cela revient en effet à supposer que certains individus contribuent à se créer leur propre statut. On peut donc ne retenir que les choix directs, c'est-à-dire que les chaînes l_i, l_j, l_v où tous les indices i, j et v sont différents. Il ne semble pas possible d'éliminer les chemins répétitifs (ou figurait plusieurs fois le même indice) de façon à la fois littérale (à partir de la donnée de A) et simple (cf. I. C. Ross et Harary *Psychometrika*, 1952). Sur un cas pratique la meilleure méthode consiste à faire sur machine la sélection des chemins sans circuit.

Cette méthode est utilisable aussi bien avec la matrice d'attribution qu'avec la matrice de répartition.

Par exemple : dans le second cas (matrice de répartition) si on se réfère au modèle α, on a :

$$S'_{4i} = \frac{1}{k}\sum_j \delta_{ij} + \frac{a}{k^2}\Sigma\delta_{ki} + \frac{a^2}{k_3}\Sigma\,\delta_{li} + \dots$$

δ_{ji} désignant une quantité égale à 1 s'il existe un chemin du premier ordre (sans intermédiaire) conduisant de j à i, nulle dans les autres cas, δ_{ki} désignant une quantité égale à 1, s'il existe un chemin du second ordre (avec 1 intermédiaire) conduisant de k à i, nulle dans les autres cas...
(k est le nombre de choix imposé et a le paramètre de transfert).

e) *Tableau résumé des indices définis ci-dessus.*

Les statuts sociaux S_1, S_2, S_3, S_4 ainsi définis paraissent alors se différencier autour de deux critères : la considération des choix simples (S_1 et S_2) ou celle des choix par intermédiaire (S_3 et S_4), d'une part ; l'équivalence des choix (S_1 et S_3) ou l'équivalence des individus (S_2 et S_4) d'autre part.

	Équivalence	
	des choix	*des individus*
Choix simples	S_1	S_2
Choix par intermédiaire :		
avec circuit	$S_{3,1}$	$S_{4,1}$
sans circuit	$S_{3,2}$	$S_{4,2}$

Les statuts sociaux S_3 et S_4 sont plus raffinés que S_1 et S_2. Cependant leur calcul pratique (qui comporte une inversion de matrice) est beaucoup plus lourd que celui de S_1 et S_2. Il appartient au clinicien de dire si le gain de précision ainsi acquis n'est pas simplement illusoire, le concept vulgaire de statut social étant encore trop vague pour qu'il soit possible de décider entre les divers statuts sociaux proposés.

C. — L'APPROCHE EXPLICATIVE DU CHOIX.

Elle consiste à utiliser un *modèle* simplifié de la formation du choix. Chaque individu j choisi par i l'est par combinaison de deux « causes » :

— j possède un certain statut social s_j qui exerce un pouvoir attractif sur i (*indépendant* de i),

— j possède un certain pouvoir $p_{(j \leftarrow i)}$ d'attraction sur chacun des individus i (et *variable* selon i).

Le problème est d'isoler le facteur d'attraction d'*ensemble* de j sur tous les autres individus, facteur que l'on appellera, par définition, le statut social de j. Plus précisément, on supposera que chaque individu i a une probabilité p_{ij} (fonction de i et de j) de choisir j. On définira le statut social de j comme la part p_i de p_{ij} qui peut être considérée comme indépendante de i.

Le modèle pourrait s'écrire $p_{ij} = p_j + \varepsilon_{ij}$, p_j étant une quantité certaine et ε_{ij} une variable aléatoire telle que $\underset{i}{\mathrm{E}}(\varepsilon_{ij}) = 0$.

Comment estimer pratiquement les p_j ? On leur donnera la valeur qui assurera la plus grande probabilité à la réalisation particulière de l'épreuve aléatoire des choix qu'est la socio-matrice expérimentale, le *seul facteur explicatif du choix étant le statut social* [1].

1. Il s'agit de la méthode communément connue sous le nom de « méthode du maximum de vraisemblance ».

Une option principale se présente alors :

a) *Les individus sont tous équivalents.*

La probabilité de voir n_j choix se porter sur j est :

$$\binom{n-1}{n_j} p_j^{n_j} (1-p_j)^{n-n_j-1}$$

L'application de la méthode du maximum de vraisemblance donne :

$$n_j (1-p_j) - p_j (n-n_j-1) = 0$$

$$\text{soit } p_j = \frac{n_j}{n-1} = s_j \text{ (par définition).}$$

On retrouve donc le statut social S''_1 étudié en B ci-dessus. On dispose ainsi d'une interprétation possible au modèle sous-jacent à la construction du statut social.

b) *Les choix des individus ont une importance proportionnelle à leur statut social.*

Si on appelle I_j l'ensemble des i choisissant j, on aura pour la probabilité de réalisation de la colonne j de la socio-matrice :

$$(p_j)^{\sum\limits_{i \in I_j} p_i} (1-p_j)^{\sum\limits_{i \neq j} p_i - \sum\limits_{i \in I_j} p_j}$$

L'application de la méthode du maximum de vraisemblance n'est plus possible aussi simplement car tous les paramètres interviennent dans la fonction de vraisemblance de chaque colonne. Il est alors nécessaire de définir une agrégation de ces fonctions de vraisemblance élémentaires.

On pourra par exemple, rechercher les p_j qui rendent maximale la fonction des n variables p_j :

$$\sum_j p_j (p_j)^{\sum\limits_{i \in I_j} p_i} (1-p_j)^{\sum\limits_{i \neq j} p_i - \sum\limits_{i \in I_j} p_i}$$

(moyenne des fonctions de vraisemblance pondérée par l'importance des individus choisis).

Les calculs mathématiques semblent complexes et ne pas devoir amener à trouver des indices analogues à S_1 ou S_2.

c) *Remarque :*

L'hypothèse de base de ces calculs est d'attribuer le maximum de pouvoir explicatif des choix au statut social de chaque individu récepteur. Elle néglige tout problème d'intéraction du facteur « statut social » et du facteur spécifique intervenant dans le choix de chaque individu. En particulier si on était en mesure de définir un autre facteur explicatif (par exemple une « distance » de culture ou de caractère des individus les uns par rapport aux autres), le statut social, même toujours calculé en adoptant le modèle exposé ci-dessus, serait certainement en moyenne plus faible. Il ne conserverait peut-être pas le même ordre entre les individus. La mesure du statut social par cette voie dépend donc fortement de la nature du modèle explicatif retenu.

D· — ÉTUDE DE L'EXEMPLE.

A partir de la socio-matrice présentée dans l'Introduction, on a calculé les valeurs du statut social S_4 dans plusieurs hypothèses portant sur a :

$a = 0$ (ce cas est très simple puisqu'il correspond à une hypothèse où l'on ne tient compte que des choix directs)
$a = 0{,}2$
$a = 0{,}4$
$a = 0{,}6$
$a = 0{,}8$
$a = 0{,}95$
$a = 0{,}999$

Afin de mesurer l'incidence sur le calcul du statut social de l'ordre de préférence dans lequel se sont exprimés les choix, on a fait l'hypothèse que l'importance du choix effectué au i^{eme} rang est b fois celle du choix effectué au $(i - 1)^{\text{eme}}$ rang ($b \leqslant 1$).

L'indice S_4 (où tous les choix sont équivalents) correspond au cas particulier $b = 1$. On a calculé une deuxième série d'indices en posant $b = 0{,}7$ de façon à fixer les idées.

Les résultats bruts du calcul sont présentés au tableau I.

On a vu au moment de la définition de l'indice S_4 que la somme des statuts sociaux était égale quel que soit a à n, nombre d'individus du groupe soit à 16 dans l'exemple choisi. Les légères différences que l'on pourra constater à partir du tableau ci-dessous, sont dues à des arrondis et à la puissance insuffisante de la machine utilisée dans le cas $a = 0{,}999$.

Les résultats ont été reportés sur les deux graphiques A et B établis l'un pour $b = 1$, l'autre pour $b = 0{,}7$.

Ils vont permettre l'examen de la sensibilité du statut social aux paramètres de calcul a et b puis, compte tenu de l'interprétation de ces paramètres, de regrouper les individus en « classes d'équivalences » et de définir certaines mesures liées au groupe.

a) *La sensibilité du statut social aux paramètres de calcul.*

On constate sur l'un ou l'autre des deux graphiques que la hiérarchie établie pour une valeur donnée du paramètre ne se maintient pas toujours lorsqu'on modifie ces valeurs.

Par exemple, les rangs obtenus sont :

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*i*	*j*	*k*	*l*	*m*	*n*	*o*	*p*
$b = 1$ $a = 0{,}2$	5	3	12	8	13	1	7	4	9	14	6	2	10	15	16	11
$b = 1$ $a = 0{,}999$	8	2	13	11	10	1	5	6	7	14	4	3	9	15	16	12
$b = 0{,}7$ $a = 0{,}999$	8	2	10	11	12	1	6	7	3	14	5	4	9	15	16	13
$b = 1$ différence des rangs pour $a = 0{,}2$ et $a = 0{,}999$	—3	1	—1	—3	3	0	2	—2	2	0	2	—1	1	0	0	1
$a = 0{,}999$ différence des rangs pour $b = 1$ et $b = 0{,}7$	0	0	3	0	—2	0	—1	—1	4	0	—1	—1	0	0	0	1

TABLEAU I

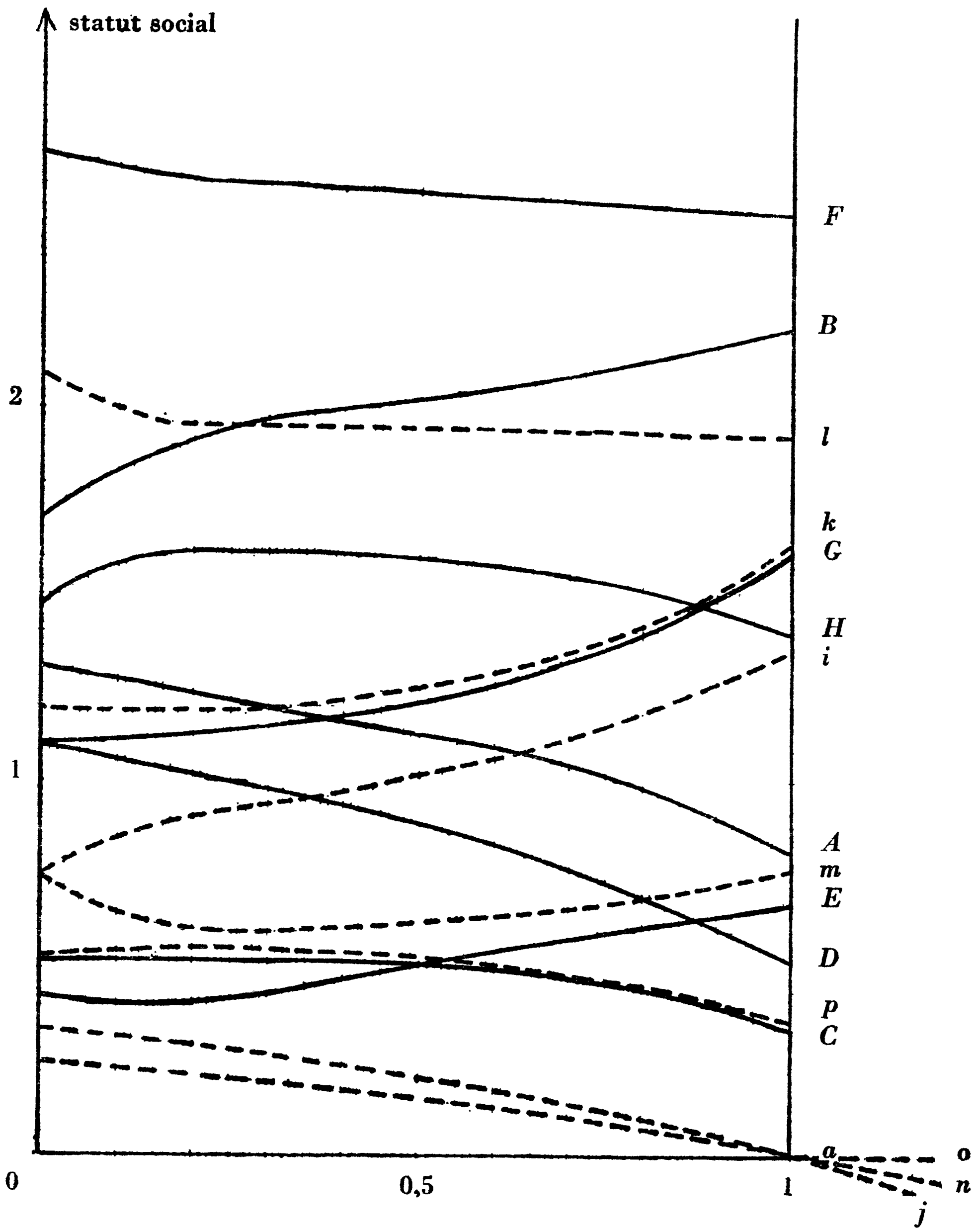
Niveau du statut social S_4 suivant différentes valeurs des paramètres

Individus	$a = 0$		$a = 0{,}2$		$a = 0{,}4$		$a = 0{,}6$		$a = 0{,}8$		$a = 0{,}95$		$a = 0{,}999$	
	$b = 1$	$b = 0{,}7$	$b = 1$	$b = 0{,}7$	$b = 1$	$b = 0{,}7$	$b = 1$	$b = 0{,}7$	$b = 1$	$b = 0{,}7$	$b = 1$	$b = 0{,}7$	$b = 1$	$b = 0{,}7$
A	1,28	1,26	1,21	1,30	1,15	1,23	1,07	1,18	0,96	1,08	0,83	0,96	0,78	0,89
B	1,70	1,64	1,91	1,72	1,97	1,82	2,04	1,92	2,11	2,03	2,17	2,15	2,20	2,17
C	0,50	0,79	0,51	0,81	0,51	0,81	0,48	0,80	0,43	0,73	0,35	0,62	0,32	0,56
D	1,08	1,06	1,00	1,00	0,92	0,93	0,81	0,85	0,63	0,73	0,54	0,59	0,49	0,52
E	0,42	0,18	0,41	0,21	0,48	0,25	0,55	0,28	0,62	0,32	0,67	0,35	0,68	0,35
F	2,65	2,86	2,58	2,90	2,56	2,96	2,54	3,04	2,52	3,13	2,49	3,21	2,48	3,21
G	1,08	0,99	1,12	0,98	1,17	0,99	1,25	1,02	1,39	1,70	1,56	1,21	1,63	1,26
H	1,45	1,65	1,60	1,60	1,59	1,53	1,56	1,46	1,50	1,35	1,42	1,26	1,38	1,21
i	0,75	0,99	0,90	1,12	0,97	1,25	1,06	1,41	1,18	1,60	1,30	1,80	1,35	1,86
j	0,33	0,32	0,28	0,20	0,22	0,21	0,16	0,15	0,08	0,08	0,02	0,02	0,00	0,00
k	1,17	1,15	1,18	1,12	1,21	1,12	1,29	1,16	1,42	1,24	1,59	1,36	1,66	1,40
l	2,07	1,68	1,94	1,65	1,93	1,61	1,92	1,58	1,92	1,55	1,92	1,54	1,92	1,53
m	0,73	0,59	0,59	0,59	0,61	0,59	0,63	0,60	0,68	0,61	0,73	0,65	0,76	0,67
n	0,25	0,19	0,21	0,16	0,17	0,13	0,12	0,09	0,07	0,05	0,02	0,01	0,00	0,00
o	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
p	0,53	0,65	0,56	0,60	0,53	0,53	0,49	0,45	0,43	0,36	0,37	0,27	0,35	0,24

Graphique A

ÉVOLUTION DES STATUTS SOCIAUX EN FONCTION DE *a*

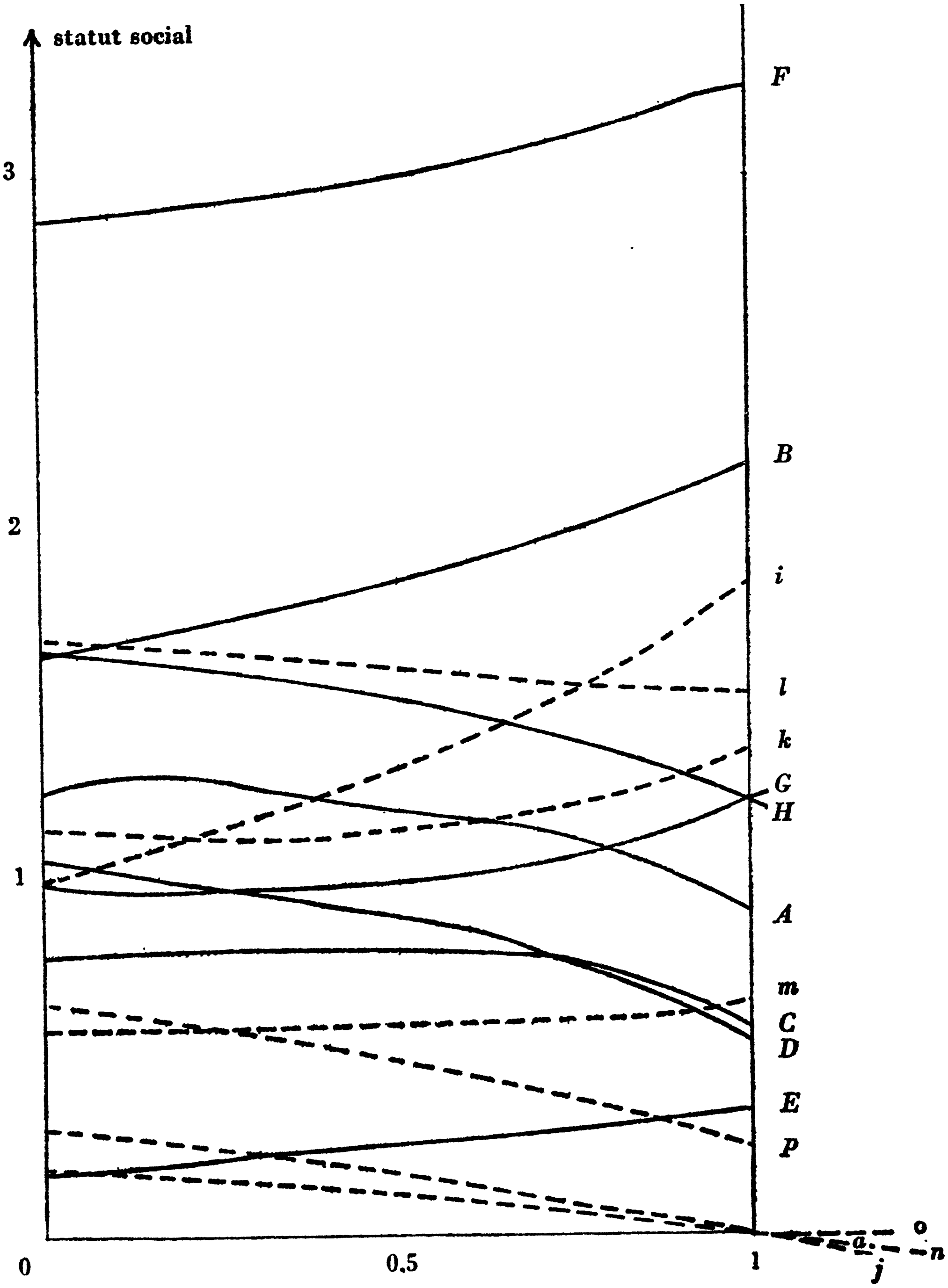
cas $b = 1$



Graphique B

ÉVOLUTION DES STATUTS SOCIAUX EN FONCTION DE a

cas $b = 0,7$



Une mesure du « flou » de la hiérarchie ainsi établie peut être donnée par exemple par :

- Le nombre maximum (pour toutes les valeurs possibles des paramètres a et b) d'inversions rapportées au nombre d'individus faisant partie du groupe. On trouve par exemple dans le cas ou b est fixé à 1, une valeur de $\frac{11}{16}$.

- Le maximum de la demi-somme des valeurs absolues des différences de rang : on trouve la même valeur $\frac{11}{16}$ que dans le calcul précédent [1].

Bien entendu, si le statut social dépend de plusieurs paramètres, la recherche des nombres maxima est rendue difficile. Mais en réalité les paramètres de calcul du statut social ne peuvent pas prendre avec une égale probabilité toutes les valeurs théoriquement possibles. Par exemple pour le paramètre a :

- L'interprétation psychologique de a et les idées que l'on a, a priori, sur l'importance de certaines liaisons particulières (choix réciproques, triangle...) par rapport aux choix simples définissent une première plage des valeurs vraisemblables.

- On examinera d'autre part la hiérarchie obtenue par diverses valeurs de a : certains ordres sembleront invraisemblables, d'autres possibles... On aura ainsi un deuxième ensemble de valeurs possibles pour a (celles qui donnent des ordres non invraisemblables).

On se limitera au calcul du « flou » pour les valeurs de a qui répondent aux conditions précisées ci-dessus et on établira des « classes d'équivalence » entre individus de la façon suivante : on dira que deux individus sont équivalents si aucun des deux n'a un statut uniformément (quel que soit a) supérieur à l'autre.

Exemple : si la plage retenue pour a est 0,4 à 0,8 et si on a pris $b = 1$, on obtiendra les « classes d'équivalence » suivantes :

Classe	*Individus*
1	*F*
2	*B*
3	*l*
4	*H*
5	*k*
6	*G*
7	*A, i*
8	*D*
9	*m*
10	*E, p, C*
11	*j*
12	*n*
13	*O*

b) *L'utilisation du statut social pour l'étude du groupe.*

On a vu au paragraphe a) ci-dessus que sous certaines hypothèses, l'utilisation de formules théoriques permettait de déterminer une hiérarchie des individus d'un groupe. Mais les calculs effectués peuvent être exploités plus avant :

b_1) *Classification des individus :* l'examen de chaque graphique montre qu'il y a des individus généralement « ascendants » (dont le statut social augmente avec a) et généralement « descendants »

1. Mais il s'agit d'une coïncidence.

(dont le statut social diminue avec a). Ce phénomène s'interprète de la façon suivante : certains individus doivent une grande part de leur statut social aux choix indirects [1] dont ils sont l'objet : ce sont les « ascendants » ; d'autres essentiellement aux choix directs : ce sont les « descendants ».

De la même façon il y a des individus « ascendants » pour b (qui sont plus rarement choisis d'abord) et « descendants » pour b (qui sont plus souvent choisis en premier).

On constate que les deux effets sont largement indépendants l'un de l'autre : ils ont donc vraisemblablement un sens autre que mathématique.

L'analyse simultanée des deux graphiques permet de déceler des individus « analogues » à statut social différent mais à « ascendance » en a identique (quel que soit b) : (K et G), (A, D, H), (j, n).

L'examen statistique des séries de statut social fournit donc des idées sur l'analyse psychologique des membres du groupe.

b_2) *Classification des groupes* : on sait que les statuts sociaux S_4 sont calculés de façon à éliminer l'effet de la taille du groupe puisque le statut moyen de chaque individu est égal à 1. On peut donc comparer directement la répartition des statuts sociaux d'un groupe à l'autre.

En particulier :

- La valeur du statut social du leader caractérise l'importance de son rôle. On peut aussi retenir le rapport de son statut social à celui de l'individu qui vient en deuxième rang.
- L'homogénéité du groupe peut être mesurée par l'état type :

$$\sigma = \frac{\sqrt{\sum_i (si - 1)^2}}{n}$$

- Pour des groupes assez importants on peut essayer de constituer une typologie de groupe par l'examen de la nature de la distribution des statuts.

Les deux graphiques établis sur l'exemple considéré montrent que les mesures de caractéristiques associées au groupe sont fonction des paramètres a et b ; elles n'ont donc qu'un caractère relatif par rapport aux paramètres, mais qui permet cependant une comparaison utile des individus ou des groupes entre eux.

On a d'autre part calculé les valeurs du statut social S_3 dans plusieurs hypothèses portant sur k. On a supposé $m = 1$ et $b = 1$. Afin de pouvoir comparer les résultats à ceux donnés par S_4, ils ont été ramenés à un total égal à n (16).

Ces résultats sont présentés au tableau II.

Compte tenu de l'interprétation des paramètres, $k = 15$ est la plus grande valeur possible et $k = 6$ la plus petite.

On constate que les statuts sociaux sont plus stables que ceux calculés précédemment. On voit assez simplement qu'il est impossible de trouver une valeur de a qui redonne exactement le même ordre établi à partir de S_4 que celui obtenu par S_3 pour une valeur de k donnée. Les deux formules de calcul ne sont donc pas réductibles l'une à l'autre.

Il est difficile d'examiner les différences de classement dans les deux systèmes puisque les paramètres retenus n'ont pas le même sens.

Toutefois si on retient des valeurs moyennes pour k ($k = 10$) et pour a ($a = 0{,}5$) et en posant $b = m = 1$, on a les ordres suivants :

D'après le statut social S_4 : *F B l H k G A i D m p C E j n o* ;

D'après le statut social S_3 : *F l B H A k G i D m E C p j n o*.

Il faut procéder à six inversions pour passer d'un ordre à l'autre. On remarque que ce nombre d'inversions n'a pas un très grand sens puisque par exemple, pour $a = 0{,}6$ on ne retrouverait plus que quatre inversions. Il semblerait alors préférable de définir la distance entre statuts sociaux par la somme des valeurs absolues des différences des indices de statut social entre les deux hypothèses retenues.

1. Y compris les choix mutuels.

TABLEAU II

Niveau du statut social S_3 suivant différentes valeurs de k et de m

Individus	$m = 0$ (*pas de transfert de choix*)	$m = 1$ (*transfert total du choix*)		
		$k = 15$	$k = 10$	$k = 6$
A	1,29	1,30	1,29	1,27
B	1,82	1,84	1,85	1,87
C	0,52	0,52	0,51	0,49
D	1,03	0,93	0,87	0,74
E	0,52	0,68	0,76	0,93
F	2,58	2,53	2,51	2,50
G	1,03	1,04	1,05	1,09
H	1,55	1,55	1,55	1,54
i	0,77	0,84	0,88	0,95
j	0,26	0,20	0,17	0,09
k	1,03	1,04	1,05	1,12
l	2,06	2,10	2,12	2,15
m	0,77	0,76	0,76	0,74
n	0,26	0,20	0,17	0,09
o	0,00	0,00	0,00	0,00
p	0,52	0,49	0,47	0,43

Conclusion.

Sur l'exemple considéré les deux méthodes de calcul de statut social S_3 et S_4 ne donnent pas des résultats plus divergents entre eux que ceux que l'on obtient en faisant varier les paramètres propres à la méthode S_4. Il semble donc qu'il sera aussi difficile de choisir d'après l'expérience entre ces deux méthodes qu'il peut l'être de retenir une valeur correcte pour les paramètres d'une méthode donnée. Par contre *l'analyse systématique* d'un grand nombre de groupes avec la même définition du calcul du statut social permettrait vraisemblablement d'obtenir une typologie « objective» de ces groupes et des individus qui le constituent.